This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

L Soc 3983.6

LSoc3983.6

9418
8



NOVI
COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOM. VII.

pro Annis MDCCLVIII. et MDCCLIX.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
c. MDCCLXI.

LSoc 3983.6

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

9468
53.43
8-13

SVMMARIVM DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS VII.

MATHEMATICA.

I.

Specimen alterum methodi nouae quantitates tranſcendentes inter ſe comparandi de comparatione arcuum Ellipſis.

Auctore Leon. Eulero p. 3.

III.

Specimen nouae methodi curuarum quadraturas et rectificationes aliasque quantitates tranſcendentes inter ſe comparandi.

Auctore Leon. Eulero p. 83.

Principio monendus eſt lector, rogandaque errori typothetarum excuſatio eſt, quod poſterior ordine diſſertatio priori eſt antepoſita. Culpam hanc aliquodam modo reſarcituri, vtramque diſſertationem ſimul conſiderabimus, et conſueta nobis breuitate, quid in iis praeſtitum ſit, dicemus. Verſatur methodus a Cel. Auctore propoſita ſingulari prorſus modo circa quantitates tranſcendentes, ſeu eiusmodi

quantitates in lineis curuis occurrentes, quae nullo modo algebraice exprimi poſſunt. Semper conſideratio linearum, vtcunque ſterilis in ſe videatur, tam Geometriam, quam Analyſin, pulcerrimis inuentis locupletauit. Cum primum enim Geometrae lineas curuas contemplari coeperunt, ſtatim omnibus viribus eo ſunt annisi, vt tam ſpatia ab iis incluſa, quam ipſam earum longitudinem, dimetirentur, quarum inueſtigationum prior circa curuarum quadraturas, altera circa earum rectificationem verſari dicebatur. Quoniam vero neutrum in circulo praeſtari poterat, etſi omnium linearum curuarum eſt ſimpliciſſima, eo maiori ſtudio in eiusmodi lineas curuas inquiſiuerunt, quae vel quadraturam, hoc eſt ſpatii iis incluſi dimenſionem, vel rectificationem, qua linea recta curuae aequalis aſſignari debet, admitterent. Interim tamen etiam inutiles conatus eorum, qui in quadratura circuli inueſtiganda fruſtra deſudarunt, praeter opinionem plurima egregia inuenta ſunt conſecuti, quibus idem vſu venit, quod Alchimicis, qui toti in lapidis philoſophorum praeparatione occupati, etſi voto ſuo exciderunt, plurima ſaluberrima remedia in vſum medicinae contulerunt. Poſt inuentam autem Analyſin infinitorum ſummum ſtudium, quod praecipue in quadrandis et rectificandis lineis curuis eſt conſumtum, vberrimos fructus protulit, quibus plures methodos ſatis ſublimes, quarum vſus per vniuerſam Matheſin ampliſſimus exiſtit, acceptas referre debemus. Quare haud minores fructus ab eorum ſtudio expectare licet, qui in comparatione linearum curuarum, quae per ſe, vel quadraturam, vel recti-

rectificationem, reſpuunt, exquirenda laborant, in quo negotio certe profundiſſima Analyſeos arcana ſunt adeunda, ita vt, qui hic quicquam praeſtiterit, is plurimum in hac ſcientia profeciſſe ſit cenſendus.

Huc ſine dubio referenda eſt noua methodus a Cel. Auctore excogitata, cuius ope innumerabilium curuarum, quarum rectificatio omnes vires Analyſeos tranſcendit, arcus inter ſe comparare docet. Pro iis quidem curuis, quarum rectificatio ope circuli, vel logarithmorum, expediri poteſt, hoc cognitis methodis praeſtari poteſt, ſed totum negotium multo facilius beneficio huius methodi conficitur, quemadmodum ex ſpecimine poſteriore luculenter apparet, vbi comparationem arcuum circularium, aliunde quidem ſatis cognitam, et arcuum parabolicorum, mira ſimplicitate exequitur, vt iam hinc ſumma vtilitas huius methodi abunde eluceat.

In altero autem ſpecimine, quod hic primo loco extat, hanc methodum potiſſimum ad Ellipſin accommodatam conſpicimus, cuius lineae rectificationem, neque ad arcus circulares, neque logarithmos reuocari poſſe, inter Geometras ſatis ſuperque conſtat. Neque etiam in hac curua binos arcus diſſimiles, qui inter ſe ſint aequales, abſcindere licet, ex quo multo magis mirum videbitur, dato huius curuae arcu quocunque, ſemper alium arcum, et in dato quidem puncto terminatum, exhiberi poſſe, qui ab illo differat quantitate geometrice aſſignabili, cum hoc ne in circulo quidem praeſtari queat. Si enim differentia inter duos arcus circulares geometrice aſſignari poſſet, eo ipſo recti-

rectificatio circuli abſoluta haberetur. In ellipſi autem haec ratio longe aliter eſt comparata, cum innumerabilibus modis differentia in binos arcus ellipticos definiri poſſit. Simili modo, propoſito arcu ellipſeos quocunque, ab alio quouis puncto arcum abſcindere licet, qui ab illius duplo, vel triplo, vel alio quouis multiplo, atque etiam ſubmultiplo, quantitate geometrice aſſignabili differat. Imo etiam fieri poteſt, vt haec differentia prorſus euaneſcat, ſicque bini arcus elliptici datam inter ſe rationem tenentes exhiberi queant, dummodo ratio illa non ſit aequalitatis, quippe quo caſu bini arcus prodeunt inter ſe ſimiles, in quo nihil ſingulare habetur. Cuncta autem haec problemata, quae Cel. Auctor hic pro ellipſi expediuit, ſimili plane modo etiam pro hyperbola, atque infinitis aliis lineis curuis multo magis complicatis, reſolui poſſe, manifeſtum eſt: ex quo haec methodus omni Geometrarum attentione et vberiori euolutione digniſſima videtur.

II.

Theoremata circa reſidua ex diuiſione poteſtatum relicta.

Auctore Leon. Eulero pag. 49.

In numerorum natura plurima adhuc myſteria latere, quae non obſtante ſummo ſtudio, quo tam veteres, quam recentiores Mathematici, in proprietates numerorum inquiſiuerunt, adhuc nobis ſunt abſcondita, iam

ſaepius

ſaepius eſt inculcatum, quod merito eo magis mirum videtur, quod prima noſtra quantitatum cognitio circa numeros verſari ſolet. Summa autem difficultas, quam in numerorum indole ſcrutanda offendimus, in eo potiſſimum conſiſtit, quod numeri ſint quantitates diſcretae, et natura ſua quaſi continuitatis rationi adverſentur. Non enim, vt linea parum a longitudine pedis deficiens, recte dicitur fere pedalis, ita numerus parum a numero, vel pari, vel quadrato, diſcrepans, dici poteſt, vel fere par, vel fere quadratus; vel minima enim differentia naturam numeri, vel paris, vel quadrati, aeque tollit, ac ſi eſſet maxima. Eodem modo etiam res ſe habet in diuiſibilitate numerorum, et in reſiduis, quae diuiſione facta remanent, in quibus nulla ratio continui locum inuenire poteſt, quare, cum methodi in Analyſi adhuc inuentae omnes rationi continuitatis innitantur, eas fruſtra ad proprietates numerorum inueſtigandas adhibemus, ſed ad hoc peculiaris analyſeos ſpecies requiri videtur, cuius forſitan prima elementa etiamnum nobis ſunt incognita. In lege igitur, quam reſidua ex diuiſione poteſtatum per diuiſores quoscunque relicta ſequuntur, Cel. *Eulerus* inprimis eſt occupatus, ac plura Theoremata affert, quorum demonſtrationes ſummo rigore adornat: multo plures autem in hoc genere veritates agnoſcere licet, quarum demonſtratio fruſtra eſt quaeſita, cuius rei exemplum in quantitatibus, vbi continuum ſpectatur, vix reperitur.

IV.

Demonſtratio Theorematis et Solutio Problematis in Actis Erud. Lipſ. propoſitorum.

Auctore Leon. Eulero p. 128.

Cum in Actis Lipſ. Theorema hoc ac problema ſine nomine ſint propoſita, Cel. Auctor hic ſtatim ſe eorum eſſe inuentorem profitetur. Vtrumque eximiam ellipſeos proprietatem complectitur. In Theoremate enim docetur, quomodo dimidia ellipſis, diametro quacunque terminata, ita in duas partes ſecanda ſit, vt partium differentia geometrice aſſignari queat, quae ipſa diuiſio cum partium differentia in eo exponitur, vt a geometris demonſtratio inueſtigaretur. Prodiit quidem nuper in Actis Sociorum Academiae Pariſinae huius Theorematis demonſtratio, quae etſi veritatem enunciatam rite oſtendat, non tamen ex genuinis principiis hauſta videtur. Vnde innumerabilia alia eiusdem generis in ellipſi aliisque lineis curuis inuenire licet. Idemque ex eo vel maxime apparet, quod auctor huius demonſtrationis ſolutionem problematis aggredi non ſit auſus, cum tamen ex iisdem principiis noſtri Auctoris expediri queat. In eo autem quaeritur modus, in quadrante elliptico partem geometrice aſſignandi, quae exacte ſemiſſi quadrantis aequetur. Celeberrimus igitur *Eulerus* in hoc ſcripto non ſolum ſuo more Theorema memoratum demonſtrat, ſed etiam

proble-

problema hoc reſoluit, idque ope methodi illius nouae, quam iam pridem in hunc finem excogitauit, et cuius bina noua in hoc volumine ſpecimina edidit, quorum occaſione de iſta methodo iam fuſius eſt expoſitum, quae hic repetere ſuperfluum foret. Adiungit etiam alia, quaedam non minus notatu digna, veluti id, quod circa finem affert, quo in ellipſi arcus aſſignatur, qui ſit totius perimetri ellipticae pars tertia.

V.

De aequationibus differentialibus ſecundi gradus.

Auctore Leon. Eulero p. 163.

Singularem atque omnino nouam methodum, aequationes differentiales ſecundi gradus tractandi, Auctor traditurus, ſtatim obſeruat, plurima atque adeo infinita capita quorum euolutio etiamnum in Matheſi deſiderantur, ad Analyſin ac potiſſimum ad reſolutionem aequationum differentialium ſecundi gradus reduci. Quoties enim quaeſtio ad partem quampiam Matheſeos, vti vocari ſolet, applicatae ſuſcipitur, eius enodatio duabus operationibus abſoluitur, quarum alterius ex principiis iſti parti propriis ſolutio ad aequationes analyticas reuocatur, altera autem in harum aequationum reſolutione conſumitur. Iam vero principia Mechanicae, ſeu Scientiae motus, tam ſolidorum, quam fluidorum, tum etiam Aſtronomiae theoreticae,

ita ſunt exculta, vt vix quaeſtio excogitari poſſit, cuius ſolutionem non iſtorum principiorum beneficio ad aequationes analyticas, easque vtplurimum differentiales ſecundi gradus, perducere liceat. Ex quo manifeſtum eſt, praecipuam Matheſeos perfectionem, quam quidem ſperare licet, in huiusmodi aequationum reſolutione eſſe quaerendam. Quam ob cauſam Cel. Auctor, cum iam ſaepius in hoc negotio vires ſuas exercuiſſet, ac varias methodos particulares, quae ſaepius in vſum vocari queant, in medium attuliſſet, hic omnino nouam latiſſimeque patentem viam ingreditur, iſtas aequationes tractandi, quae in hoc conſiſtit, vt multiplicator inueſtigetur, in quem huiusmodi aequatio ducta fiat integrabilis: Quin etiam pronunciare non dubitat, cuiuscunque fuerit ordinis aequatio differentialis, ſemper eiusmodi multiplicatorem negotium conficientem dari, atque in hac diſſertatione nonnulla huiusmodi aequationum genera, quae aliis methodis inacceſſa videntur, hac methodo feliciter ad aequationes differentiales primi gradus reduxit, neque vllum eſt dubium, quin haec methodus, ſi vberius excolatur, maxima incrementa in Analyſin ſit allatura.

VI.

VI.

Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales diuiduntur in triangula.

Auct. I. A. de Segner pag. 203.

Quando in Geometria area figurarum pluribus lateribus incluſarum definiri debet, eae per diagonales in triangula reſolui ſolent, quia tum cuiusque trianguli areae ex cognitis lateribus facile determinantur. Quo pluribus autem lateribus figura eſt praedita, eo pluribus modis eam hoc modo in triangula reſolui poſſe, vel leuiter attendenti ſtatim eſt manifeſtum. Ita cum in quadrilaterum duas diagonales ducere liceat, quadrilaterum duplici modo in bina triangula diuiditur. Pentagonum autem quintuplici modo, diagonalibus ducendis, in triangula reſolui poſſe reperitur, hexagonum vero 14 modis, et heptagonum 42 modis, octogonum 132 modis, enneagonum 429 modis etc. quae omnium modorum poſſibilium enumeratio, quo magis cum laterum numero eorum multitudo creſcit, eo fit difficilior et taedioſior. Quare quaeſtio omnino curioſa, et Geometrarum attentione digna videtur, qua lege iſti reſolutionum numeri pro laterum multitudine progrediantur, vt inde pro quouis polygono reſolutionum numerus rite definiri queat? Hinc Ill. Auctor modo prorſus ſingulari et ingenioſo legem progreſſionis horum numero-

merorum exponit, ac rigoroſe demonſtrat, dum docet, quomodo pro quouis polygono reſolutionum numerus, ex cognita reſolutione polygonorum ſimpliciorum, quae paucioribus conſtant lateribus, colligi debeat. Hac ratione, ſi a ſimpliciſſimis incipiamus, hanc inueſtigationem continuo ad polygona plurium laterum extendere licet, ſicque Ill. Auctor ſub finem tabellam adiecit, in qua iſtiusmodi reſolutiones ad polygona 20 laterum vsque exhibet. Liceat autem nobis, a ſummo quodam Geometra, qui eandem hanc tabulam calculo ſubiecit, admonitis, obſeruare, hanc tabulam, ob quendam calculi errorem, tantum vsque ad polygona 15 laterum eſſe iuſtam, quippe pro hoc polygono reſolutionum numerus non eſt 751900, vt tabella habet, ſed 742900, ſequentes quoque numeri, dum forte nouus error irrepſit, primo ad 17 vsque latera nimis ſunt magni, deinde vero nimis parui, dum pro 20 lateribus reſolutionum numerus eſt 477638700. Facilius haec apparent, ſi ex lege primum obſeruata, qua quilibet numerus ex omnibus praecedentibus colligitur, alia ad computum facilior eliciatur, cuius ope quilibet numerus ex ſolo praecedente definiatur. Ita ſi pro polygono n laterum numerus reſolutionum ſit P, pro polygono ſequente $n+1$ laterum numerus reſolutionum erit $\frac{4n-6}{n}$ P. Quin etiam hinc, ſine conſideratione praecedentium, ſtatim indefinite pro polygono n laterum numerus reſolutionum ita per factores exprimitur, vt ſit:

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \cdot \frac{18}{6} \cdot \frac{22}{7} \cdot \;\ldots\ldots\; \frac{4n-10}{n-1}$$

vbi numeratores quaternario, denominatores vero vnitate creſcunt. Hinc ſequentem nouam tabulam, beneuole

vole nobiſcum communicatam, adiungere e re viſum eſt, quod Ill. Auctori huius ſchediaſmatis non diſpliciturum eſſe ſperamus.

Num. laterum	numerus reſolutionum.	num. laterum	numerus reſolutionum.
III	1	XV	742900
IV	2	XVI	2674440
V	5	XVII	9694845
VI	14	XVIII	35357670
VII	42	XIX	129644790
VIII	132	XX	477638700
IX	429	XXI	1767263190
X	1430	XXII	6564120420
XI	4862	XXIII	24466267020
XII	16796	XXIV	91482563640
XIII	58786	XXV	343059613650
XIV	208012		

VII.

Methodus ſimplex et vniuerſalis omnes omnium aequationum radices detegendi.

Auct. I. A. de Segner pag. 211.

Complures iam a Geometris excogitatae ſunt methodi aequationum algebraicarum radices, vel accurate, vel proxime ſaltem, determinandi: omnes autem fere poſtulant, vt valores radicum, quae quaeruntur,

runtur, propemodum iam ſint cogniti, ad quam cognitionem quomodo ſit perueniendum, ſaepe numero parum perſpicitur. Cel. *Bernoulli* iam pridem quidem excellentem methodum tradidit, ope ſerierum recurrentium hoc praeſtandi: verum ipſe animaduertit, hoc modo tantum, vel ad maximam, vel ad minimam aequationis radicem, appropinquari. Ill. igitur Auctor hic mechanicam methodum perquam ingenioſam exponit, vbi deſcriptione certarum linearum curuarum limites omnium radicum realium manifeſto exhibentur, conſtructionem autem harum linearum geometricam admodum facilem docet, qua, quouis caſu oblato, fere ſine labore vti liceat. Quae lineae quo accuratius ſuper Charta delineantur, eo propius veros ſingularum radicum valores manifeſtat, quibus cognitis, eo promtius aliarum methodorum beneficio approximatio inſtituitur.

VIII.

De Problematibus quibusdam Iſoperimetricis.

Auct. Paullo Friſio pag. 227.

Iure monet Cl. Auctor in limine diſſertationis ſuae problema Iſoperimetricum a celeberrimis ſaeculi noſtri Geometris, *Eulero* potiſſimum, tanto iam ſtudio pertractatum eſſe, vt eorum lucubrationibus, vix quidquam amplius adiungi poſſit. Ita ſane Cel. *Eulerus* vniuerſam hanc Theoriam, quomodo inter omnes

lineas

ſineas quotcunque, proprietatibus communibus gaudentes, eam definiri oporteat, cui maximi minimiue proprietas conueniat, vberrime explicauit, methodumque facilem ac planam omnia huius generis problemata reſoluendi tradidit. Verum enim vero, cum huiusmodi inueſtigationes ſemper vberiora ſtudia admittant, ſuosque amatores raro optato fructu, promouendis vltra geometriae pomaeriis, deſtituant, Cl. quoque *Friſio* non deneganda laus eſt, quod caſus quosdam particulares huc redeuntes ingenioſa perſpicacitate magis illuſtrare, et breuiori calculo exhibere, conatus eſt. Caeterum dum Cl. Auctor p. 231. calculo ſuo praerogatiuam quandam prae *Euleriano* tribuit, vnicam Cel. *Euleri* diſſertationem, in Tomo VI. Comm. noſtrorum extantem, compertam habuiſſe videtur. Prodiit autem poſtmodum A. 1744. alia eiusdem de hoc argumento tractatio, Lauſannae excuſa, quam *Methodum inueniendi lineas curuas maximi minimiue proprietate gaudentes* vocauit, vbi, quae in priori diſſertatione deſiderari poſſe videbantur, abunde ſuppleuit. Denique nouam huius problematis ſolutionem, qua nihil pulchrius, nihil generalius, nihil magis analyticum, eſſe poteſt, ex nouo a ſe adornato *Calculo variationum* deductam, nobiscum *Eulerus* communicauit, quam indicaſſe ſufficiat, donec in aliquo ex ſubſequentibus Commentariorum noſtrorum voluminibus comparebit.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De quibusdam circa lentes cauſticas et ſpecula vſtoria emendatis et nouiter inuentis.

Auctore I. E. Zeihero pag. 237.

Vim ſolis calefaciendi duplici modo, reflexione ſcilicet ac refractione, eousque augeri poſſe, vt effectus etiam intenſiſſimum ignem longe ſuperet, experimenta, ſpeculis vſtoriis et lentibus cauſticis inſtituta, manifeſto declarant. Ad tam ſtupendum autem effectum producendum haec inſtrumenta tot labores tantosque ſumtus poſtulant, vt vix quisquam priuatus ſibi ea comparare queat, cum tamen in ſcientiae augmentum maxime eſſet optandum, vt naturae ſcrutatores huiusmodi inſtrumentis, iisque perfectiſſimis, eſſent inſtructi. *Archimedes* quidem apud nonnullos ſcriptores perhibetur ingenti ſpeculo vſtorio naues hoſtiles ad inſignem diſtantiam combuſſiſſe. Apud alios autem, eosque probatiores, de ratione, qua ille in exurendis nauibus verſatus eſt, nihil legitur; quare cum eundem effectum ignibus iniiciendis multo facilius conſequi potuiſſet, de rei veritate merito dubitatur. Interim tamen haec, ſiue hiſtoria, ſiue fabula, Cel. *Buffonum* in Gallia excitauit, vt de eiusmodi ſpeculo vſtorio cogitaret,

ſtaret, quod ex pluribus exiguis ſpeculis planis, ſecundum ſuperficiem ſphaericam diſpoſitis, conſtaret. Neque fefellit expectationem ſucceſſus: hoc enim modo inſignem vim vſtoriam ad ingentem diſtantiam propagauit.

Antequam hoc inuentum ad notitiam Cl. Auctoris perueniſſet, iam ipſe de combinandis pluribus ſpeculis planis cogitauerat, quorum lumen reflexum, dum in eundem locum proiiceretur, idem eſſet praeſtiturum, quod ſpeculum metallicum concauum maximis ſumtibus comparandum; ex quo iure ſibi partem quandam gloriae huius inuentionis vindicare poteſt. Hic autem inprimis egregium artificium excogitauit, ſpecula quotcunque plana facili negotio ſecundum ſuperficiem ſphaericam diſponendi, idque ope aſſerum, qui, vi rite adhibita, ſponte quaſi ad hanc figuram incuruantur. Neque vero hic inueſtigationes ſuas terminandas putauit, ſed etiam artificia quaedam excogitauit, tabulis vitreis planis curuaturam inducendi, qua deinceps, tanquam ſpeculo vſtorio, vel binis coniungendis, et cauitatem inter eas aqua implendo, tanquam lente vſtoria, vti liceat. Ad hunc finem aſſequendum, pluribus inſtitutis experimentis, didicit, quomodo tabula vitrea, catino concauo impoſita, igni ita ſit committenda, vt ea tantum non liquefacta catino perfecte ſe applicet, eiusque figuram accipiat, quam deinceps refrigerata conſtanter ſit ſeruatura; hoc certe modo maximis orbibus vitreis figura ſphaerica ſine tantis ambagibus induci poterit, quales alioquin politura exigeret. Etſi vero etiam ſine igne huiusmodi orbes vi-

trei aliquantillum incuruari poſſunt; ob elaſticitatem enim parumper a viribus idonee applicatis ſe inflecti patiuntur: attamen ex hoc ſtatu violento, ceſſante virium actione, mox ſe in ſtatum naturalem reſtituturas eſſe, nemo dubitabit. Clar. Auctor autem modum perquam ingenioſum proponit, iſtas tabulas hac ratione incuruatas in ſtatu violento retinendi, ita vt ſi ſuperficies conuexa argento viuo fuerit inducta, altera ſuperficies concaua vicem tanti ſpeculi metallici, maxima opera et ſumtibus comparati, eo maiore ſucceſſu ſuſtinere poſſit, quo ſpeculum vitreum radios ſolis multo copioſius reflectit, quam ſpeculum metallicum optime politum. Huc accedit, quod a tali vi externa vitrum non ad figuram ſphaericam incuruatur, ſed ad aliam propius ad parabolam accedentem, quae propterea radios ſolis multo magis in vnum focum eſt collectura. Hinc intelligere licet, quanta incrementa ab huiusmodi machinis vſtoriis, intenſiſſimas etiam ignis fuſorii vires longe ſuperantibus, tam in Phyſica, quam Chemia praeſertim, expectare queamus.

II.

Phaenomenorum Iridis ſeu arcus coeleſtis diſquiſitio.

Auctore Sim. Kotelnikow. p. 252.

Iridis originem et naturam Cl. Auctor hic explicandam et ex principiis dioptricis perſpicue euoluendam ſibi ſumſit; vbi ſtatim animaduertit, iam veteribus

bus cognitum fuiſſe, hoc phaenomenon in guttis aqueis per aerem delabentibus generari, dum a radiis ſolis ex aduerſo colluſtrantur. Non vno autem modo, ſed pluribus, imo innumeris, Iris produci poteſt, dum radii ſingulas guttas ingreſſi, vel ſemel, vel bis, vel pluries, reflectuntur, antequam inde reuertantur. Etſi enim guttae aqueae inſigni pelluciditatis gradu ſint praeditae, tamen hoc habent cum omnibus corporibus diaphanis commune, quod non omnes radios in ſuam ſuperficiem incidentes transmittant, ſed partem quandam eorum reflectant, vnde fit, vt radii ſolares, in guttas intrantes, iam quandam iacturam ſint paſſi. Radii autem ingreſſi ob eandem rationem non omnes per guttulam transmittuntur, ſed pars quaedam a ſuperficie interiore reflectitur, quae denuo, vbi inde in aerem erumpere deberet, ex parte quadam reflectitur: ita in eadem gutta idem radius plures reflexiones pati poteſt, antequam rurſus in aerem emittatur. Quo plures autem reflexiones in gutta patitur, eo magis debilitatur, ita vt mox omnem vim amittat. Neque vero omnes radii in guttas intrantes, et poſt vnam vel aliquot reflexiones inde emergentes, ad Iridem repraeſentandam ſunt idonei; ſed ii tantum, qui in exitu iterum inter ſe fiunt paralleli, quando quidem neceſſe eſt, vt radii, a ſingulis obiectorum conſpicuorum punctis in oculos noſtros transmiſſi, ſint fere inter ſe paralleli. Hinc pro certo ſolis et ſpectatoris ſitu, certae tantum guttulae aptae ſunt ad Iridem producendam, atque aliae quidem, quae radios ſemel reflexos, aliae, quae bis pluriesue reflexos, ad oculos noſtros transmittunt; et quia

radii diuerſorum colorum diuerſam refractionem patiuntur, aliae guttae nobis radios rubros, aliae violaceos, et reliquorum colorum, reddent; ob quam cauſam diverſi colores in Iride a ſe inuicem ſeparati repraeſentantur. Iam Iris principalis ab iis radiis exhibetur, qui in guttis aqueis ſemel tantum reflectuntur, quae etiam propterea maxime viuida apparet: radii autem bis in guttis reflexi, ideoque multo maiorem diminutionem paſſi, Iridem ſecundariam multo debiliori lumine ſpectandam praebent. Cum ipſum problema, quo vera poſitio omnium cuiusque ordinis Iridum quaeritur, attentione Phyſicorum quam maxime dignum cenſendum ſit, nulli dubitamus, Lectores cum voluptate ſolutionem a Cl. Auctore ſuppeditatam lecturos eſſe.

III.

Deſcriptio ac explicatio nouorum quorundam experimentorum electricorum.

Auctore F. V. T. Aepino. pag.

Pekini commorantes Reu. Patres *Soc. Ieſu*, pro laudabili ſuo in omne doctrinarum genus ſtudio, a multis annis nullam occaſionem praetermittere ſolent, qua non Academiam noſtram, hoc litterarum commercium debita officiorum reciprocatione colentem, de laboribus ſuis Phyſicis, Mathematicis, Hiſtoricis, Geographicis, certio-

certiorem reddant. Nunc accidit, vt nouo quodam experimento electrico valde ſingulari inſtituto, anſam praebuerint ad ipſam Theoriam Electricitatis magis illuſtrandam, et quantum in re, de qua tot ſenſus, quot capita, fieri poteſt, fere euictam praeſtandam.

Lamina vitrea electrica adplicatur ad pyxidem magneticam vitro tectam, quod dum fit, acus magnetica ſtilo incumbens cuſpide ſua confeſtim ſurſum rapitur ad vitrum pyxidem tegens, ipſique horas duas, vel tres, quaſi adglutinata, conſtanter adhaeret. Poſtmodum repentine decidit acus, et ad ſitum ſuum conſuetum redit. Auſertur lamina a pyxide, ecce paradoxon! acus dicto citius denuo aſcendit, operculo pyxidis vitreo iterum ſe adglutinans, et ad duarum aut trium horarum ſpatium, non aliter, ac ante factum erat, adhaerens. Admota iterum lamina, acus decidit, et ſublata rurſus attrahitur. Hoc vel centies repetere licuit Patribus *Ieſuitis*. Et haec ſumma eſt experimenti *Pekinenſis*, in quo nemo non mirabitur, quomodo Electricitas, quae poſt decurſum aliquot horarum penitus extincta videbatur, momento quaſi, et ſine vlla noua frictione, aut excitatione, per ſolam laminae remotionem, potuerit reſuſcitari, admota autem lamina, iterum extingui.

Haec cum ad Cel. Auctoris huius diſſertationis notitiam perueniſſent, mox in cauſam horum tam inſolentium phaenomenorum ſibi inquirendum eſſe cenſuit, et examinare, vtrum ex principiis Theoriae electricae *Francklinianae*, quam, vt ex libro ipſius de *Theoria Electricitatis et Magnetiſmi* conſtat, naturae miro modo con-

congruentem expertus eſt, explicari poſſint. Conſpicere autem ſibi viſus eſt conſenſum prorſus notabilem, de quo vt certior fieret, aliosque, ſi vera ſentiret, convinceret, repetiit primum experimentum *Pekinenſe*, dein elicuit ex nouis phaenomenis varias concluſiones, nouaque experimenta, ab his concluſionibus ſibi ſuggeſta, multo ſtudio inſtituit. Solitae Auctoris dexteritati tribuimus, quod maximis in hac re cautelis vſus eſt. Scimus illum valedicturum fuiſſe principiis Theoriae *Francklinianae*, ſi experimenta, quae, quid docere debebant, praeuidit, id iuſſiſſent. Accidit autem contrarium; quare nunc in ſententia ſua omnimode ſe confirmauit.

IV.

Obſeruatio Optica de mutabilitate diametri apparentis foraminis anguſti oculo propinqui.

Auct. F. V. T. Aepino. pag. 303.

Inter alias ſtupendas viſionis affectiones ex quibus infinita omnipotentis Creatoris ſapientia copioſiſſime elucet, ea quoque proprietas, qua pupilla, pro copia luminis ingredientis, vel dilatatur, vel conſtringitur, nos in admirationem rapere poteſt, tantoque magis, quo minus haec mutatio a voluntate noſtra pendet, ſed ſponte quaſi ad viſionis perfectionem, oculorumque conſeruationem, temperatur. Cum pupilla ſit foramen illud rotundum

dum in iride conſpicuum, per quod radii ab obiectis emiſſi in oculum intrant, in eoque ſuper retina tanquam in camera obſcura imagines obiectorum depingunt: hinc fit, vt, quo magis pupilla fuerit dilatata, eo maiori radiorum copiae ingreſſus in oculum concedatur, ſicque imago ſuper retina depicta viuidiori lumine exprimatur, ſiquidem lumen externum pari vi fuerit praeditum. Quemadmodum autem ad ſenſationem excitandam certa luminis vis requiritur, ita etiam lux nimis fortis delicatiſſimo huic organo damnum afferre poſſe in propatulo eſt; quod ne eueniat a ſapientiſſimo creatore eſt cautum, vt pupilla a fortiore lumine ſponte ſe contrahat, a debiliori vero ſe dilatet. Experientia hoc luculentiſſime teſtatur, dum in locis tenebricoſis pupillae apertura vehementer augeri, ad inſignem autem lucem ad puncti fere paruitatem imminui conſpicitur. Quae etſi ſunt notiſſima, tamen ſingularis circumſtantia circa mirabilem amborum oculorum conſenſum hic a Cel. Auctore primum obſeruata eſſe videtur, haec nempe, qua, ſi alrer tantum oculus fortiori lumini exponitur, pupilla quoque alterius ſe contrahit, etiamſi multo minorem luminis copiam excipiat: ita memorabili Auctoris exemplo edocemur, ſi quis oculo v. gr. ſiniſtro vtens obiecta per exiguum foramen ſpectat, tunc multo maiorem campum viſionis ſe offerre ipſi clauſo oculo dextro, quam eo aperto, cuius phenomeni ratio in eo eſt ſita, quod aperto oculo dextro, eiusque pupilla ob maius lumen coarctata, ſimul oculi ſiniſtri pupilla ob mutuum conſenſum contrahebatur, quae, clauſo oculo dex-

 tro,

tro, ob minorem luminis copiam, per foramen acceptam, iterum expandebatur; ideo non poterat non maiorem viſionis campum complecti.

V.

Acus nouae declinatoriae deſcriptio.

Auct. I. E. Zeihero. pag. 309.

Optimos ſaepe latet acuum magneticarum fabros, vnde fiat, quod nulla opera acubus ſuis eam, quam volunt, virtutem communicare queant. Hoc autem inde fieri docet Cl. Auctor, quoniam acus magneticae vulgares plerumque hoc laborant vitio, quod, ob capitulum ſuſpenſioni inſeruiens, duabus quaſi partibus, a ſe inuicem diſcretis, ſint compoſitae, quarum vtraque vicem acus ſingularis gerat, ſicque, ob interruptam magnetiſmi virtutem, niſus, ſeſe fixam plagam verſus dirigendi, minuatur. Vitium hoc in pluribus acubus, more ſolito fabricatis, per experimenta luculenter comparuit, dum in iis quatuor poli obſeruati ſint, prorſus vti eueniret, ſi binae acus ſimplices ſecundum longitudinem iungerentur, ex quo huiusmodi acus vis inſigniter minuitur. Hinc Cl. Auctor in nouam rationem acus declinatorias ſuſpendendi inquiſiuit, qua continuitas magnetiſmi, per totam eius longitudinem diffuſi, non interrumperetur, hicque ingenioſe excogitatum modum proponit, quo acus ſine vllo capitulo ita ſuſpendi poteſt, vt liberrime ſecundum omnes plagas ſe conuertere,

et

et vim ſe dirigendi ſine vllo impedimento exercere queat. Quod ſi ad curſum nauium dirigendum applicari poteſt remedium, inſignem inde vtilitatem certe expectare licet, cum nauigantes nimis crebro de imbecillitate acuum nauticarum adhuc ſint conqueſti. Poſtquam enim ars eſt inuenta etiam duriſſimum chalybem ſumma vi magnetica imbuendi, nihil amplius ad perfectionem acuum magneticarum, quam idonea ſuſpenſionis ratio, deſiderari videtur.

PHYSICA.

I.

Nitraria planta obſcura explicata.

Auct. Carolo Linnaeo. pag. 315.

Plantam hanc Ruſſiae indigenam in vicinia officinae nitrariae Aſtrachanenſis primus obſeruauit breuiterque deſcripſit *Gottlob Schoberus*, M. D. cuius *Memorabilia Ruſſico-Aſiatica*, ineditum adhuc opus, itineris Aſtrachaniam verſus et ad fluuium Terek vſque inſtituti fructum, beneficio Viri doctiſſimi *Io. Iac. Lerche*, M. D. Conſiliarii aulici et in curia medica Adſeſſoris, ex autographo b. Auctoris quondam transſcriptum, nuper ad manus noſtras peruenit, ideoque deſcriptionem authenticam huius plantae, ſine qua hiſtoria eiusdem manca foret, in gratiam Botanophilorum inde decerpere poſſumus.

„Inter exſpatiandum, ita *Schoberus*, in hac „Nitraria (officina) ſub menſis Iulii initio ob ſolum „aridum et ſalinum pauca quidem vidi vegetabilia et „vix graminum culmos: habet tamen hiſce in terris „Kali ſuam patriam. Vidi enim Kali maius frutico„ſum, Kali lignoſum linariae foliis, Kali incanum bre„vibus foliis, Kali foliis longioribus et anguſtioribus. „Prae hiſce Kali ſpeciebus iucundam me rapuit in ad„mirationem planta nondum viſa, nec ab aliis Bota-

„nicis,

„ nicis, prout recordor, deſcripta. Eſt autem fruti-
„ coſa, vaius vlnae brabanticae longa; radix nihil ſin-
„ gulare habet; caulis lignoſis conſtat fibris, albiſſimo-
„ que cortice eſt obductus; folia habet anguſta, in
„ ſummitate rotundiora, ad formam folii Gnaphalii, ſi-
„ ve Elychryſi; flores ſunt regulares pentapetali, albi
„ coloris, fructus eſt cylindraceus et conicus, in ſum-
„ mitate anguſtius et acutus, rubicundiſſimus, bina vt
„ plurimum ſemina, ſubrotunda duraque continens;
„ ſapor eſt fere nullus, ſed quodammodo farinaceus.
„ Reducere ad ſuum genus allaboraui quidem, ſed nul-
„ lum inuenire potui; fructus quidem analogiam quan-
„ dam *Berberum* praebet, ſed flores harum non con-
„ ueniunt cum noſtris, quatenus illi hexapetali ſunt re-
„ gulares, hi vero pentapetali, vti dictum eſt. Ad
„ *Orobum*, germ. *Forlitzen*, quem Botanici inter
„ Sorbi ſpecies recenſent, noſtra planta ex parte ratione
„ fructus accedere videtur, ſed melius eſt, genus pro-
„ prium formare, et in defectu nominis commodioris
„ ad memoriam ſuae patriae *Nitrariam* adpellare.

Poſt *Schoberum* ſimilem plantam in Sibiria ad lacum ſalſum Iamyſcham repertam, ſub *Caſiae fructu nigro* nomine, deſcripſit *Gmelinus*, quam deſcriptionem, in Stirp. p. 178 edidit *Ammanus*. Denique *Stellerus* referente *Gmelino* Flor Sib. II. p. 237. eandem ſuam Caſiam ad lacum ſalſum deſerti *Vrunſcinenſis* (forte *Orongoenſis*, ab Orongoi amne Selengam ſubeuntis cognominati,) obſeruauit, et ſub generico *Elaeagni* nomine recenſuit. Hinc occaſionem nactus eſt *Gmelinus* de

d 3

de hac planta vberius diſſerendi Flor. Sib. l. c. eam- que praeeunte Ill. *Linnaeo* Oſiridis nomine ſalutauit. Aſt inauſpicato accidit, vt *Gmelinus* aeque ac *Stellerus*, plantam viderint floribus iam orbam; cumque *Gmeli- nus* rogauerit *Lerchium*, Aſtrachaniae tunc commoran- tem, vt *Nitrariae Schoberi* exempla ad ſe mitteret, inter chartas ſiccata, ipſamque plantam viridem deſcri- beret, neque hic, quod ad flores attinet, voto factus eſt compos. Tandem Ill. *Linnaeus* ſemina ex Ruſſia accepta in horto Vpſalienſi ita colere inſtituit, vt quae- ſitos diu flores obtineret; vnde iam notitiam huius plantae ad plenariae perfectionis gradum perductam eſſe gaudemus. Errores operarum, quibus non ſemel pro *lacu* falſo, *locus* falſus legitur, facile Lector excuſabit.

II.

Polypi marini, Ruſſis *Karakatiza* dicti, deſcriptio.

Auct. Ioſ. Theoph. Koelreuter. p. 321.

Merito conqueritur Cl. Auctor de paucitate ſcripto- rum, qui hiſtoriam animalium marinorum data opera illuſtrarunt. Cauſae in promptu ſunt: multitudo namque et diuerſitas animalium; dein difficultas illa adipiſcendi, quae interdum tanta eſt, vt non niſi for- tuito caſui tribuendum ſit, ſi tale animal inciderit in manus viri docti, amatoris inueſtigationis naturae, hanc Hiſtoriae naturalis partem ſuo ſtudio amplificare cupien-

cupientis. Pleraſque de rebus exoticis notitias peregrinatoribus deberi conſtat, hominibus vt plurimum minus eruditis, qui, ad quae potiſſimum attendere debuiſſent, ignorarunt. Scriptores ſyſtematici, *Geſnerus*, *Aldrouandus*, *Ionſtonus*, omnia vndecumque corraſerunt, minus ſolliciti de veritate, aut veri ſpecie, eorum, quae dicerent, quam ne quid ab aliis dictum praetermitterent. Hinc tot in Hiſtoria animalium, inprimis marinorum, errores, tot defectus, quos haud facile, niſi erudita opera virorum intelligentium, qui ipſi per terrarum mariumque anfractus longinqua itinera huic vſui inſtituere non graue duxerint, eliminari, aut ſuppleri, poſſe patet. At quam difficilis et ſumtuum incommodis praepedita haec res eſt? Cl. *Koelreutero* minori conſtitit, curioſitatem ſuam explere, cum viri rerum naturalium ſtudioſi ſua ſponte occaſionem ipſi ſubminiſtrarunt, hanc, quam deſcripſit, Polypi ſpeciem in pluribus exemplaribus accurate examinandi. Vt enim Polypi, *Karakatiza* dicti, Graecis hominibus, Aegaei Adriaticique maris accolis, in eſcam cedunt, imo a veteribus, quod pluribus exemplis *Ionſtonus* docet, in deliciis habiti ſunt; ita ob eandem cauſam haec animalia, exenterata, ſicca, in Ruſſiam quoque importari ſolent, gratum palato praebituri edulium, tempore ieiunii, inprimis ſi brachia, ſiue tentacula, ſpectes, quae elixa et aſſa guſtu vix a carnibus ſuillis diſcernuntur. Exempla Polyporum, in ſpiritu vini ſolius curioſitatis gratia adſeruata, effecerunt, vt deſcriptioni ſuae hunc, quem videmus, perfectionis gradum conciliare Auctor potuerit. Denique obſeruamus, vo-

vocabulum *Karakatiza* ex Tatarica lingua in Ruſſicam inuectum eſſe: *Kara* enim Tataris et Turcis *nigrum* ſonat; hunc autem colorem cutis externum, in ſupina inprimis facie, Polypis competere, Auctoris noſtri teſtimonio confirmatur.

III.

Zoophyti marini, e Coralliorum genere, Hiſtoria.

Auctore I. T. Koelreuter. p. 344.

IV.

Deſcriptio Tubiporae maris Albi accolae.

Auctore eodem. p. 374.

V.

Continuatio Hiſtoriae Zoophyti marini e corallorum genere.

Auctore eodem. p. 377.

Aliud rerum marinarum genus hoc loco tractandum ſibi ſumſit Cl. Auctor, ſterilem itidem ac cultura indigentem calcando campum, vnde apud hiſtoriae naturalis ſcriptores vix nuda rerum nomina decerpſeris,

ris, tantum abeſt, vt, quod de rebus ipſis ad plenam illarum cognitionem faciat, haurire poſſis. *Zoophyta* ſunt, vt inſcriptio docet, vnum e *Coralliorum* genere, alterum *Tubiporae* ſpecies, ab Auctore deſcripta. De primo disiunctis opellis agit, quoniam duo corpora conſiderat, eiusdem omnino ſpeciei, an patriae eiusdem? non liquet. Alterum Archangelopoli miſſum, ex Gazophylacio Imperatorio alterum depromptum eſt. Vtinam omnes theſauri, tam naturales, quam nummarii, aliique, in locupletiſſimo hoc Gazophylacio latentes, eodem ſtudio atque doctrina in apricum producerentur! *Tubiporae* ſpecies huc vsque ignota etiam Archangelopoli ad Cl. Auctorem perlata eſt, vnde perſpicitur, inexhauſtas vbiuis maris eſſe opes, coelumque frigidum inhibere quidem poſſe perquiſitionem circa illas inſtituendam, naturae autem facultati in producendis infinitis operibus limites non ponere. Non eſt, vt ad ſpecialia deſcendamus. Obſeruamus generatim, tam exteriorem, quam interiorem conditionem atque texturam deſcribi, deinde, cum non conueniat inter hiſtoricos naturales, vtrum Zoophyta animali regno, an vegetabili, ſint adnumeranda? experimenta chemica addi, ex quibus clarum fit, ab vtroque participare. Hoc nempe gradu a vegetabilibus ad animantia tranſit natura, quam nihil facere *per ſaltum*, vetus dicterium eſt.

VI.

Obſeruationes meteorologicae factae Petropoli annis 1755 et 1756 cum conſectariis.

Auctore I. A. Braun. pag. 388.

De obſeruationibus ipſis, eadem omnino methodo, ac praecedentes, in Tomo V. Comment. expoſitae, quarum continuationem ſuppeditant, inſtitutis ac digeſtis, dicere nihil attinet. Singulare eſt, quod hic ex comparatione inſtituta colligitur, primis Februarii diebus anni 1755 frigus in Germania circa Goettingam magis intenſum regnaſſe, quam quidem hic Petropoli. Deinde inter tonitrua, propter hiſtoriam noſtrae Petropoleos, iſtud memorabile eſt, quo turris templi St. Petri in Caſtello die 30 Aprilis anni 1756 fulmine percuſſa conflagrauit. Caeterum Cl. Auctor in gratiam eorum, qui thermometro Petropolitano, ſeu Delisliano, minus adſueti, illud cum Fahrenheitiano, Reaumuriano, aliisue, comparare voluerint, concinnauit tabulam ſcalarum omnium fere vſitatiorum thermometrorum, ita iuxta ſe inuicem poſitarum, vt comparatio vno intuitu fieri poſſit. Haec inter tabulas aeri inciſas XVIII. locum obtinet.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

I.

De Refractionibus in oris ſeptentrionalibus.

Auctore G. Heinſio. p. 411.

Notum eſt Solis omniumque ſiderum radios, dum puriſſima coeli ſpatia emenſi in noſtram atmoſphaeram intrant, a tramite ſuo rectilineo aliquantillum deflecti, idque eo magis, quo propius ad horizontem adueniunt. Hinc omnia ſidera altius ſupra horizontem eleuata nobis apparent, quam ſi eorum radii recta ad nos peruenirent, atque ob hanc cauſam Sol citius nobis oriri, tardiusque occidere videtur, quam ſine hac radiorum inflexione eſſet euenturum. Differentia iſta, qua altitudo ſiderum ob atmoſphaeram augetur, refractio aſtronomica appellari ſolet, in qua inveſtiganda Aſtronomi ab omni tempore maxime fuerunt occupati, atque tabulas condiderunt, quibus pro quauis altitudine ſideris obſeruata haec refractio aſtronomica deſignatur. Cum autem atmoſphaera noſtra maximis mutationibus ſit obnoxia, facile intelligitur, etiam refractiones haud leuiter pro locorum tempeſtatumque diverſitate variare debere. Hieme certe vbique maiores deprehenduntur, quam aeſtate, quia frigore aer condenſatur, ideoque radios magis refringit, et cum in altiſſimos montes aſcendimus, vbi aer leuior eſt et

tenuior, ibi quoque minores refractiones experimur. Deinde etiam ſub aequatore Aſtronomi Galli, graduum terreſtrium dimetiendorum cauſa eo profecti, refractiones minores deprehenderunt, quam Pariſiis, quod ſine dubio aeri ob inſignem calorem multo tenuiori eſt tribuendum. Hinc viciſſim concludi debere videtur, in regionibus borealibus, ob frigus intenſiſſimum, refractiones haud mediocriter augeri debere, quam coniecturam relatio Hollandorum, qui Anno 1597 in Noua Semla hybernare coacti, ſolis ortum multo ante, quam expectare poterant, ſunt experti, mirifice confirmare videtur. Cum autem Cel. *de Maupertuis* in Lapponia refractionem ſiderum omni cura explorasſet, eam praeter expectationem haud maiorem inuenit, quam Pariſiis, quod merito tanquam inſigne Paradoxum eſt ſpectandum. Clariſſ. igitur huius diſſertationis Auctor hanc inueſtigationem ſumma, qua pollet, vi ingenii vlterius proſequitur, et poſtquam *Ludouici De l'Isle De la Croyere*, ad vltimos fines Sibiriae ablegati, obſeruationes, ad oſtium fluuii *Olenek* habitas, omni ſtudio ac ſollertia examinaſſet, in hac quoque tam boreali regione, cuius latitudo 73 gradus ſuperat, refractiones Pariſinis non maiores fuiſſe demonſtrat, ac frequenter adeo minores ipſi ſunt viſae, quod inexſpectatum Phaenomenon in Aſtronomia certe maximi eſt momenti.

II.

II.

Relatio Obſeruationum circa longitudinem Penduli ſimplicis inſtitutarum.

Auctore A. N. Griſchow. pag. 445.

Poſtquam ſolertiſſimus Obſeruator *Griſchovius*, praematura morte nobis ereptus, rationem Obſeruationum ſuarum in Inſula *Oſilia* ad Lunae parallaxin accuratius definiendam inſtitutarum, quem in finem potiſſimum hoc iter ſuſceperat, in praecedenti volumine reddidiſſet, nunc obſeruationes quoque, quas ad grauitatis determinationem ſummo ſtudio et cura in eodem hoc itinere inſtituerat, exponit, ex quibus Theoria Telluris maxima incrementa adeptura videtur. Cum enim ſatis ſuperque fuiſſet exploratum, tam ob motum diurnum telluris, quam ob eius figuram ſphaeroidicam, vim grauitatis ſub aequatore diminui, prope polos autem augeri oportere, ex obſeruationibus adhuc inſtitutis regula eſt ſtabilita, cuius ope ad quamuis latitudinem vera grauitatis quantitas definiri queat. Concluditur autem ea ex numero oſcillationum, quas pendulum datae longitudinis dato temporis interuallo abſoluit. Namque ex principiis mechanicis euictum eſt, quo maior fuerit grauitas, ſeu niſus deorſum, eo frequentiores reddi eiusdem penduli oſcillationes. Quare certiſſima methodus, vim grauitatis explorandi, in hoc

 conſiſtit,

conſiſtit, vt oſcillationes, a pendulo datae longitudinis certo tempore peractae, accurate numerentur, id quod Cl. Auctor *Reualiae*, *Pernauiae* et in *Oſilia* Inſula omni adhibita induſtria et circumſpectione praeſtitit. Saepius autem repetitis, ac diuerſimode inſtitutis huiusmodi experimentis, in his locis motum penduli aliquanto tardiorem deprehendit, quam Petropoli, vnde quidem, quod regulae illi egregie eſt conſentaneum, ſequitur, in his locis, vtpote magis aequatorem verſus ſitis, grauitatem eſſe minorem, quam Petropoli: ipſa autem differentia cum multo maior prodiit, quam ea regula patitur, concludendum inde videtur, non ſub omnibus meridianis diminutionem grauitatis aequatorem verſus eandem legem ſequi, neque in omnibus locis, ſub eodem parallelo ſitis, grauitatem eſſe eiusdem magnitudinis; imo etiam fortaſſis non omnes meridianos eadem figura eſſe praeditos, neque totius terrae figuram ita eſſe regularem, vt adhuc eſt creditum, cuius rei aliae quoque obſeruationes Virorum Cl. *Chriſtophori Maire* et *R. I. Boſcovich*, in ditione Pontificia ad dimetiendos gradus duos meridiani inſtitutae, non leuem ſuſpicionem praebent. Hic igitur ſcrutatoribus naturae ampliſſimus campus aperitur, in veram terrae figuram, tam nouis obſeruationibus et experimentis, quam rationibus ex eius interna indole petitis, multo accuratius inquirendi.

SVP-

SVPPLEMENTVM
De Ibice imberbi.

In Volumine V. Nouor. Comm. p. 345. exſtat D. *Gmelini* deſcriptio *Ibicis imberbis*, Ruſſis *Saiga* dicti, vbi inter alia dicitur de dentibus: „eſſe in „maxilla inferiore quatuor inciſores et quatuor caninos, „cum quinque molaribus, quorum ſingulis binae radi„ces ſint; ſuperiorem autem maxillam eodem inciſo„rum et caninorum numero gaudere, et quatuor tan„tum molaribus, triplici radice nixis, praeditam eſſe.„ Haec cum legiſſet Hl. *Linnaeus*, per litteras, Vpſaliä die XIV. Octobris anni 1760. datas, „dubium nobis „mouit de dentibus primoribus in ſuperiore maxilla, „et de caninis in inferiore, tanquam naturae omnium „cognitorum animalium repugnantibus, rogauitque, vt „ſi hoc animal vnquam Petropolin perferretur, aut ſi „cranium eius obtineri poſſit, illud attente inſpiceremus, „ſeque de obſeruatis noſtris certiorem redderemus.„ Iudicium tanti viri mox in eius partes nos deſcendere iuſſit, etiamſi multum mirati ſimus, *Gmelinum* in re tam clara, nullisque in obſeruando difficultatibus obnoxia, deceptum fuiſſe. Fatendum autem eſt, quod tota *Ibicis imberbis* deſcriptio *Gmeliniana* feſtinationem, qua confecta eſt, redolet; procul dubio accuratiorem ſuppeditaſſet, ſi in reditu ex Sibiria, per itineris rationes, regionem, in qua hoc animal commoratur, ipſi denuo peragrare licuiſſet. Tanto igitur magis neceſſarium erat, animal denuo examinare, eiusque talem

dare

dare deſcriptionem, quae, omne dubium auertendo, nihil non complecteretur, quod ad iuſtam eius ideam ſiſtendam facere poſſit. Quod cum exſequendum nobis proponimus, non poſſumus non laudare Virum Excell. *Gregorium Teplow*, Status Conſiliarium actualem et Auguſtiſſimi Imperatoris pro Ducatu Sleſuico-Holſatico Camerarium, nec non Virum Illuſtrem *Baſilium Adodurow*, Status Conſiliarium et Vice-Gubernatorem Orenburgenſem, vtrumque Academiae noſtrae, cui a iuuenili aetate addicti fuerunt, honoris cauſa adſcriptum, eo quod pro indefeſſo ardore ſuo bonas artes promouendi, occaſionem nobis ſubminiſtrarunt, duo cadauera animalis maſcula et vnum foemineum, ex Vcrania et Orenburgo huc allata, cultro anatomico ſubiiciendi. Poſſidemus quoque foemellam viuam, quam itidem beneuolentiae Excell. *Teplouii* debemus. Deſcriptio ſequens V. C. *Alexium Protaſſow*, Profeſſionis anatomicae Adiunctum, auctorem agnoſcit.

Ibex imberbis, quem hic pro exemplo caeterorum eiusdem ſpeciei animalium deſcribendum ſumſimus, erat mas. Quadrupes biſulcum, cornutum, ruminans, et quidem ex genere caprino. Docuit haec inſpectio partium eius tam internarum, quam externarum. Characteres in hoc animali priuos definiunt, vti videtur, forma cornuum, naſi, atque defectus barbae. Caput itaque habet quodammodo ouillum, ſed naſo peramplo, gibbo atque adunco, ſuperne per mediam longitudinem linea tenui, exacte veſtigium ſepti narium indicante, bifariam diſtincto, extremis naribus, vna cum la-

labro ſuperiore prae illo inferiore, multum prominentibus et quaſi propendentibus. Cornua gerit ſatis craſſa et valida, ouato-rotunda, adulto animali plus quam ad pedis altitudinem producta, perpetua, concaua, totaque quanta albida, et contra ſolem pellucida; quae mox ab exortu ſuo extrorſum et aliquantum in priora inſigniter arcuata, atque ab imo ad vsque tres quartas partes longitudinis ſuae crebris orbiculis, ſiue circulis, inaequalia, perque longitudinem ſtriata, reliqua parte laeuia ſunt, multumque ibi arctiora facta, iterum, ſed retrorſum leuiſſime gibba, in extremitates tandem abeunt acutas, verſus ſe inuicem et tantillum in priora conuerſas. Naſus, reſpectu molis totius capitis valde magnus, nihil ferme in ſe continet cartilaginei, multo minus oſſei; excepta parte ſuperiore, qua incipit ab oſſe frontis, quod ibi in cartilaginem deſinit tenuem atque exacutam, minus quam ad quartam partem longitudinis ſepti narium excurrentem, et parte ima eiusdem ſepti, qua id ſurgit a iunctura partium palatinarum oſſium maxillarium et a vomere, vbi quoque aliquid adeſt cartilaginei. Omne vero, quod ſupereſt, naſi, conſtat ex ſubſtantia muſculoſa, denſa, et intermixta pinguedine dura, ſimillima illius linguae, ſed compactiore, firmioreque, diuiſum ſepto tenui, pellucido, in duas ampliſſimas nares, intus ſubtenſas tunica tenuiſſima, mucoſa, laeui quidem, at piloſa, in medio parietum ſuorum ſiue laterum, mediocrem digitum transuerſum craſſas, priora verſus et poſteriora, item qua cum labro ſuperiore confluunt, tenuiores. De-

 ſectus

fectus itaque cartilaginum in eiusmodi naribus facit, vt eae in mortuo animali non ſuſtineant ſe; ſed illico collabantur; inde etiam fit, quod in iisdem collapſis orae earum extremae multum ante ſeptum promineant, hoc vero intra naſum magis retractum appareat.

Maxilla inferior anterius inſtructa eſt dentibus primoribus octo, quorum bini medii eminent corona latiore in aciem tenuem atque leniſſime gibbam terminata; reliqui ad hos adſtantes, quo poſteriores, eo anguſtiore et exacutiore corona ſunt donati. Singuli caeterum defixi ſunt in alueolis ſuis ſingularibus et altiſſimis radicibus. An huic animali id quoque ſingulare prae aliis eſt, quod omnes eius dentes primores minus firmiter ſtent in ſuis alueolis, ſed vel leniſſimo impulſi digito in omnem partem facile vacillent? In tribus ſubiectis diligenter ob id examinati eadem phaenomena conſtanter oſtenderunt. Pone primores, intervallo duorum pollicum disiuncti, ſequuntur vtrimque molares quinque. Primi et ſecundi ſingulari corona; tertii et quarti, latiores prioribus, duplici, biſariamque quaſi diuiſi; vltimi quinti, et illis latiores, triſariam diſtincti, ideoque triplici corona ſunt inſtructi. Superiori maxillae nulli ſunt primores, ſed molares vtrimque ſex; quorum tres priores ſingulari, ſequentes alii tres duplici corona donati, biſariamque ideo diſtincti ſunt. Differunt praeterea ſuperiores molares ab inferioribus, quod illi externum latus habeant concauum, internum conuexum. Contrarium vero obtinet in inferiori-

rioribus. Omnes caeterum ſingulas coronas in ſummo habent ſcrupoſas et aſperas, perque longitudinem media alta fiſſura in duo diſtinctas. Priores tres infixi ſunt alueolis ſuis nunc binis, nunc ternis, quidam etiam quaternis radicibus; ſequentes alii tres binis tantum, eoque craſſioribus et altioribus, quo ſunt vlteriores; exceptis vltimis inferioribus, qui vti triplici corona, ita etiam ternis radicibus ſunt inſtructi.

Reliquo corporis habitu ceruum, ſiue potius hinnulum ceruinum, refert quidem huius ſpeciei animalium foemina, non vero mas, qui hirſutior et pilorum colore ab ea totus diuerſus, magis accedit ad hircum domeſticum, eumque fortiter olet. Pilo tamen veſtitur ceruino, aeque craſſo ac denſo, ſed longiore, mollioreque, qui ei in fronte, lateribus capitis atque colli ex cinereo incanus eſt; in armis, dorſo, lateribus eiusdem atque coxis magis in album, ſed ſordidum colorem vergens. Ad ima vero laterum, ilia atque iugulum promiſſior idem lanam iam refert; praetereaque in pectore, toto abdomine atque in interioribus vtrorumque crurum candidiſſimus et reſplendens. Superne a prima ſpina vertebrarum dorſi per medium tergum protenditur ſtria quaedam fuſci coloris, ſenſim poſteriora verſus lateſcens, donec ſuper os ſacrum in plagam abeat rhomboideae figurae, extremo ſuo longitudinali ad vsque anum pertingentem. Inguina ab omni pilo libera, nudaque ibi cutis vnctuoſo quodam humore madeſcit. Piloſiſſima e contrario prae omnibus aliis pars eſt huic animali circa iugulum, vbi et multi-

tudinem et longitudinem pili adaugent paullum infra orbitas oculorum vtrimque ab genis demiſſi comarum inſtar faſciculi quidam pilorum alborum, quatuor ferme pollices longi, vnum lati, ſub quorum ſingulo vnicum facile conſpicitur linearis diametri apertum oſculum breuis cuiusdam ductus excretorii, qui ducit in folliculum, capacem maioris nucis auellanae, factum ex introuerſus reducta cute, quae ibi arctatur primum in illum ductum, dein expanditur in ipſum folliculum, eodem ferme modo, vti fit in vrethra et veſica vrinaria. In vtroque, quos hactenus diſſecui eius ſpeciei hircos, folliculos illos inueni totos quantos plenos ſpiſſo quodam et craſſo lateritii coloris quaſi vnguine, ſimili ceruminis aurium. Et, cum ipſi folliculi intus vndique cribri inſtar ſint poroſi, preſſa quamuis leniter circum eos externa cutis, cum ſubiecta ei celluloſa pingui tela, eructabat in cauitatem illorum per poros iſtos ſimile et conſiſtentia et colore craſſamentum.

Longitudo animalis ſumta per medium naſum, frontem, collum dorſumque ab ipſo extremo ſepti narium vsque ad illud ani eſt 4 pedum $9\frac{3}{4}$ pollicum; quod vltra propendet, cauda eſt hirſuta, tres circiter pollices longa. Altitudo ſolo inſiſtentis ab ima vngula cruris anterioris ſecundum idem erectum ad ſummum dorſum 2 ped. $6\frac{3}{4}$ poll. Eadem ſimiliter ſecundum crus poſterius ad vsque ſummitatem oſſis ſacri ſumta, eſt 2 ped. $7\frac{1}{8}$ poll. Circumferentia trunci tansuerſim pone ſcapulas ducta eſt 2 ped. et $6\frac{3}{4}$ poll. Eiusdem menſurae

menſurae eſt et illa, quae facta per hypochondria; ſed per ilia capta minor eſt praecedentibus 2½ poll. Hactenus V. Cl. *Protaſſow*.

Foeminas huius animalis excornes eſſe, non ſolum ex duobus exemplis ad nos perlatis, etiamſi iuſtam nondum aetatem attigiſſe viſae ſint, ſuſpicari licet; ſed idem quoque relationes Coſaccorum, campos ad Boryſthenem inhabitantium, confirmant. Meticuloſae ſunt, aſt non, vt mares, feroces. Si impetuntur a lupis, aut canibus, foeminas intra circulum colligunt mares, quas fronte obuerſa fortiter contra hoſtes defendunt. Sunt qui dicunt, cornua decidua eſſe, Coſacci negant. Ipſa quoque ſtructura cornuum valde compacta, et fere oſſea, contrarium oſtendere videtur. Vtrum numerus annulorum in cornibus cum aetate animalis creſcat, nemo certo pronunciare auſus eſt.

Vt clarius figura et corporis habitus animalis noſtri pateſcant, maſculum et foemellam, et hanc quidem ad viuum, illum ad cadauer gelu rigidum et in iuſto ſitu collocatum, delineari et aeri incidi curauimus, quae figurae in Tabula XIX. ſubnectuntur.

Praeterea non praetermittendum eſſe, cenſemus, in raro opere *Nicol. Witſenii* de Orientali et Septentrionali Tataria edit. 2dae pag. 790 confundi hoc animal cum animali Moſchifero, id quod a communi

muni vtrique nomine *Saiga* factum eſſe ſuſpicamus. Loqui autem illum de *Ibice imberbi*, tam ex loco natali, quem viciniam ciuitatis *Vſſae* indicat, quam ex figura cornuum, cui apprime cum noſtris conuenit, adparet.

Denique addemus deſcriptionem huius animalis a b. *Iunkero*, Profeſſore in noſtra quondam Academia et dein Conſiliario redituum aulico, in Vcrania confectam, ex qua adhuc quaedam ad pleniorem animalis cognitionem facientia innoteſcent. En verba eius ex Germanico verſa: „Eſt ſingulare genus „animalis Ruſſis in Vcrania *Saigaki* dictum, cuius ca„ro carni ceruinae (*roth Wildpret*) accenſetur. Cri„nes habet ad inſtar capreae, cauda digitum longa, „caput ouillum naſo adunco, mandibulum ſuperius „prae inferiore ad latitudinem manus prominet, et „eſt flexile, quia ſine oſſe totum ex cartilagine (me„lius dixiſſet: ex muſculoſa quadam ſubſtantia) con„ſtat. Balant, vt oues, greſſu incedunt tolutario, „(*Paſſ*) intermixto, ſi fugantur, ſaltu, ideoque prae „caprea curſu ſunt longe velociores; paſcuntur, non „vt alia animalia, ſed attollendo mandibulum ſuperius „et retrogradiendo Tergoris vſus ob mollitiem et „tractabilitatem, ſi ſubigitur, caprino non inferior, „ad chirothecas, balteos, cingula, lora, aptiſſimus. „Oportet autem, vt occidantur menſe Septembri, „quia alias tergus multitudine vermium intercutum la„borat, et vbicunque exeſum, nullius vſus eſt. Mares „cornua gerunt annulata, absque ramis, quotannis deci-

„dua.

„dua. (Si fides auctori, quem tamen hac in re falſó rumore „deceptum eſſe ſuſpicamur.) Stantes gregatim canes non „timent, pleiumque occiduntur profundo ſomno oppreſſi. „Caro ob pinguedinem ouillae ſimilis, guſtu ad car„nem damarum accedit, inprimis caro capitis in de„liciis habetur. Omnes campi Boryſthenem inter „et Tanain, nec non Zarizina Aſtrachanum vsque, „hoc pecore abundant. Videbis aliquando ſex ad de„cem mille in vno grege collecta etc.„ Haec excerpſimus ex codice manuſcripto, qui elegantem deſcriptionem geographicam totius Vcraniae, ſeu Paruae Ruſſiae, complectitur.

MATHEMATICA.

SPECIMEN ALTERVM
METHODI NOVAE QVANTITATES TRANSCENDENTES INTER SE COMPARANDI.
DE COMPARATIONE ARCVVM ELLIPSIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Primum huius methodi ſpecimen, quod nuper exhibui, in comparatione arcuum circuli et parabolae conicae verſabatur, quae comparatio etſi in ſe ſpectata non eſt noua, cum methodis vulgaribus iam pridem ſit expedita, tamen inde exordiendum eſt viſum, quo nouae huius methodi, quam adumbraui, vis melius perſpiciatur; quod non ſolum ad easdem veritates, quae methodis conſuetis erui ſolent, perducat, ſed etiam viam longe faciliorem et expeditiorem eadem praeſtandi patefaciat. Methodus enim conſueta integrationes ſatis taedioſas requirit, atque ita eſt comparata, vt niſi arcus iſtarum curuarum, qui inter ſe ſunt comparandi, ad quadraturas cognitas circuli ac hyperbolae reuocari potuiſſent, nullo modo in ſubſidium vocari potuiſſet.

 2. Quan-

2. Quantum ergo haec noua methodus praeſtare valeat, vberius ex comparatione arcuum ellipſis et hyperbolae perſpicietur; quarum curuarum rectificatio, cum nullo modo, neque ad circuli quadraturam, neque ad logarithmos reduci queat, methodis conſuetis nullus amplius locus relinquitur, neque per eas modus patet, diuerſas iſtarum curuarum arcus inter ſe conferendi. Quare cum oſtendero, nouae huius methodi beneficio comparationem arcuum ellipticorum et hyperbolicorum pari cum ſucceſſu inſtitui poſſe, atque arcuum parabolicorum, quoniam methodi vulgares ad id plane ſunt ineptae, eo magis ſummus vſus nouae methodi inde elucebit.

3. Inueni autem huius methodi ope arcus tam ellipticos, quam hyperbolicos, pari modo inter ſe comparari poſſe, atque arcus parabolicos, neque id impedimento eſſe, quod harum curuarum rectificatio vires analyſeos penitus transgredi videatur. Quin etiam haec comparatio ſub iisdem conditionibus, atque in parabola inſtitui poteſt, ita vt propoſito ſiue in ellipſi, ſiue in hyperbola arcu quocunque, ab alio quouis eiusdem curuae puncto arcus abſcindi poſſit, qui ab illo differat quantitate geometrice aſſignabili. Simili autem modo a puncto quouis arcus exhiberi poterit, qui ab arcu propoſito, vel bis, vel ter, vel toties ſumto, quoties lubuerit, quantitate geometrica diſcrepet.

4. Porro autem effici poteſt, vt haec differentia plane in nihilum abeat, arcusque inuentus ipſi arcui propoſito eiusue multiplo adeo fiat aequalis, perinde atque in parabola id fieri poſſe notum eſt. Similiter

militer quidem vſu venit, vt bini arcus aequales exhiberi nequeant, qui non ſimul inter ſe ſint ſimiles, verum hoc multo magis notatu erit dignum, quod tam in ellipſi, quam hyperbola, propoſito arcu quocunque, ſemper alius arcus aſſignari queat, qui illius duplo, vel triplo, vel multiplo cuicunque ſit aequalis.

5. Quemadmodum igitur ratione comparationis diuerſorum arcuum, ellipſis et hyperbola indolem parabolae ſequuntur, ita curua lemniſcata ipſi circulo ſimilis deprehenditur. In ea enim curua, aeque ac in circulo, ſi propoſitus fuerit arcus quicunque, a puncto quouis dato arcum abſcindere licet, qui propoſito vel fuerit aequalis, vel duplo maior, vel triplo, vel toties, quoties lubuerit. In hac namque curua, perinde atque in circulo, eiusmodi arcus non dantur, quorum differentia geometrice poſſit aſſignari.

6. Quae autem hic ſum allaturus, multo latius patent, quam ad curuas commemoratas, ellipſin, hyperbolam et lemniſcatam, quippe quae tantum caſus quaſi ſimpliciſſimos conſtituunt formularum, quas haec methodus ſuppeditat. His enim formulis euolutis ſimilem comparationem in infinitis aliis curuarum generibus inſtituere licebit. Quemadmodum autem primum ſpecimen euolutione huius aequationis innitebatur:

$$o = \alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy$$

ita hic aequationem latius patentem fundamenti loco aſſumi oportet; ex qua tamen vtraque variabilis, ope extractionis radicis quadratae, definiri queat. Sit igitur propoſita haec

Aequatio canonica.

$$0 = \alpha + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy$$

7. Quodſi ex hac aequatione tam valorem ipſius x, quam ipſius y, ſeorſim extrahamus, obtinebimus:

$$y = \frac{-\delta x + \surd(\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx))}{\gamma + \zeta xx}$$

$$x = \frac{-\delta y - \surd(\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy))}{\gamma + \zeta yy}$$

vbi ſignis radicalibus diuerſa tribuimus ſigna, quoniam ab arbitrio noſtro pendent: dummodo eorum in ſequentibus debita ratio teneatur.

8. Ponamus, vt breuitati conſulamus, has formulas ſurdas:

$$\surd(\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx(\gamma + \zeta xx)) = X \text{ et}$$

$$\surd(\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy)) = Y$$

vt habeamus:

$$y = \frac{-\delta x + X}{\gamma + \zeta xx} \text{ ſeu } X = \gamma y + \delta x + \zeta xxy$$

$$x = \frac{-\delta y - Y}{\gamma + \zeta yy} \text{ ſeu } -Y = \gamma x + \delta y + \zeta xyy.$$

9. Nunc aequatio canonica etiam differentietur; eritque

$$0 = dx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + dy(\gamma y + \delta x + \zeta xxy)$$

vnde colligimus fore:

$$0 = -Y dx + X dy, \text{ ſiue } \frac{dy}{Y} - \frac{dx}{X} = 0$$

Cum igitur X ſit functio ipſius x, et Y ipſius y, erit integrando:

$$\int \frac{dy}{Y} - \int \frac{dx}{X} = \text{Conſt.}$$

10. Vi-

10. Viciſſim ergo nouimus, ſi huiusmodi aequatio integralis fuerit propoſita:

$$\int \frac{dy}{Y} - \int \frac{dx}{X} = \text{Conſt.}$$

in qua X et Y eiusmodi functiones irrationales ipſarum x et y deſignent, vt ſit:

$$X = \sqrt{(\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx)} \text{ et}$$
$$Y = \sqrt{(\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy))}$$

tum huic aequationi ſatisfacere relationem inter x et y per aequationem canonicam definitam.

11. Quemadmodum autem inuenimus aequationem $\frac{dy}{X} - \frac{dx}{X} = 0$, ita conſideremus nunc aequationem latius patentem

$$\frac{Q\,dy}{Y} - \frac{P\,dx}{X} = dV$$

et inueſtigemus cuiusmodi functiones P et Q eſſe queant ipſarum x et y, vt dV integrationem admittat, ideoque differentia formularum integralium

$$\int \frac{Q\,dy}{Y} - \int \frac{P\,dx}{X} = \text{Conſt.} + V$$

algebraice exhiberi queat.

13. Quo haec inueſtigatio facilius inſtitui queat, ponamus $xy = u$, et ob $x\,dy + y\,dx = du$, habebimus $dy = \frac{du}{x} - \frac{y\,dx}{x}$, qui valor loco dy in aequatione differentiali ſubſtitutus dabit:

$$0 = dx(\gamma x + \delta y + \zeta xyy) + \frac{du}{x}(\gamma y + \delta x + \zeta xxy) - dx\left(\frac{\gamma yy}{x} + \delta y + \zeta xyy\right)$$

ſeu per x multiplicando:

$$0 = dx(\gamma xx - \gamma yy) + du(\gamma y + \delta x + \zeta xxy)$$

ſeu $0 = \gamma\,dx(xx - yy) + X\,du$

14. Erit

14. Erit ergo $\frac{dx}{X} = \frac{du}{\gamma(yy-xx)}$, et cum ſit $\frac{dy}{Y} = \frac{dx}{X}$ erit quoque $\frac{dy}{Y} = \frac{du}{\gamma(yy-xx)}$, vnde habebimus:

$$dV = \frac{(Q-P)du}{\gamma(yy-xx)}.$$

Primo ergo patet, ſi ſit $Q = yy$ et $P = xx$, fore $dV = \frac{du}{\gamma}$ et $V = \frac{u}{\gamma} = \frac{xy}{\gamma}$. Hinc, aſſumta aequatione canonica, erit

$$\int\frac{yydy}{Y} - \int\frac{xxdx}{X} = \text{Conſt.} + \frac{xy}{\gamma}.$$

15. Similis autem integratio quantitatis V, quoque ſuccedit, ſi pro P et Q accipiantur poteſtates quaeuis parium dimenſionum ipſarum x et y. Quod vt appareat, ponamus $xx+yy=t$, et, ob $xy=u$, aequatio canonica abit in hanc formam:

$$0 = \alpha + \gamma t + 2\delta u + \zeta uu$$

vnde fit $t = \frac{-\alpha - 2\delta u - \zeta uu}{\gamma}$.

16. Ponamus iam $P = x^4$ et $Q = y^4$, erit $dV = \frac{du}{\gamma}(xx+yy) = \frac{tdu}{\gamma}$, ideoque $dV = \frac{-du}{\gamma\gamma}(\alpha + 2\delta u + \zeta uu)$; vnde integrando fit:

$$V = \frac{-\alpha u}{\gamma\gamma} - \frac{\delta uu}{\gamma\gamma} - \frac{\zeta u^3}{3\gamma\gamma}, \text{ ſiue}$$

$$V = \frac{-xy}{3\gamma\gamma}(3\alpha + 3\delta xy + \zeta xxyy)$$

Vel ob $\zeta xxyy = -\alpha - \gamma(xx+yy) - 2\delta xy$ habebitur

$$V = \frac{-xy}{3\gamma\gamma}(2\alpha - \gamma(xx+yy) + \delta xy)$$

17. Quare noſtra aequatio canonica etiam ſatisfaciet huic aequationi integrali:

$$\int\frac{y^4dy}{Y} - \int\frac{x^4dx}{X} = \text{Conſt.} - \frac{xy}{3\gamma\gamma}(3\alpha + 3\delta xy + \zeta xxyy)$$

Atque

Atque his tribus caſibus colligendis, aequatio canonica ſatisfaciet huic aequationi differentiali latius patenti:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}yy + \mathfrak{C}y^4)}{\surd(\delta\delta yy - (\alpha + \gamma yy)(\gamma + \zeta yy))} - \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx + \mathfrak{C}x^4)}{\surd(\delta\delta xx - (\alpha + \gamma xx)(\gamma + \zeta xx))}$$

$$= \text{Conſt.} + \frac{\mathfrak{B}xy}{\gamma} - \frac{\mathfrak{C}xy}{3\gamma\gamma}(3\alpha + 3\delta xy + \zeta xxyy).$$

18. Si vlterius progredi velimus, ponamus $P = x^6$ et $Q = y^6$, fietque $dV = \frac{du}{\gamma}(y^4 + xxyy + x^4) = \frac{du}{\gamma}(tt - uu)$ ſubſtituto ergo pro t valore inuento, erit

$$dV = \frac{du}{\gamma^3}(\alpha\alpha + 4\alpha\delta u + (4\delta\delta + 2\alpha\zeta - \gamma\gamma)uu + 4\delta\zeta u^3 + \zeta\zeta u^4)$$

ideoque integrando:

$$V = \frac{u}{\gamma^3}(\alpha\alpha + 2\alpha\delta u + \tfrac{1}{3}(4\delta\delta + 2\alpha\zeta - \gamma\gamma)uu + \delta\zeta u^3 + \tfrac{1}{5}\zeta\zeta u^4)$$

Vnde erit per aequationem canonicam: $\int \frac{y^6 dy}{Y} - \int \frac{x^6 dx}{X}$

$$= \text{Conſt.} + \frac{xy}{15\gamma^3}(15\alpha\alpha + 30\alpha\delta xy + 5(4\delta\delta + 2\alpha\zeta - \gamma\gamma)xxyy$$
$$+ 15\delta\zeta x^3y^3 + 3\zeta\zeta x^4y^4).$$

19. Nunc autem formulis noſtris irrationalibus X et Y eiusmodi formas inducamus, quae facilius ad quosuis caſus accommodari queant: ſitque

$$X = \surd p(A + Cxx + Ex^4) \text{ et } Y = \surd p(A + Cyy + Ey^4)$$

neceſſe ergo eſt ſit:

$$Ap = -\alpha\gamma;\quad Ep = -\gamma\zeta - Cp = \delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta$$

vnde fit:

$$\alpha = \frac{-Ap}{\gamma};\ \zeta = \frac{-Ep}{\gamma} \text{ et } \delta = \surd(\gamma\gamma + Cp + \frac{AEpp}{\gamma\gamma}).$$

20 Sit iam $\gamma\gamma = A$; et $p = kk$; ſumaturque $\gamma = -\surd A$; ac fiet:

$$\alpha = kk\surd A;\ \gamma = -\surd A;\ \zeta = \frac{Ekk}{\surd A} \text{ et } \delta = \surd(A + Ckk + Ek^4)$$

ſicque erit:

$$X = k\surd(A + Cxx + Ex^4) \text{ et } Y = k\surd(A + Cyy + Ey^4)$$

et aequatio canonica prodibit:

$$0 = Akk - A(xx+yy) + 2xy\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + Ekkxxyy.$$

21. Ex hac autem variabiles x et y ita a ſe inuicem pendent, vt ſit:

$$X = -y\sqrt{A} + x\sqrt{(A+Ckk+Ek^4)} + \frac{Ekk}{\sqrt{A}}xxy,$$
$$Y = x\sqrt{A} - y\sqrt{(A+Ckk+Ek^4)} - \frac{Ekk}{\sqrt{A}}xyy$$

vnde fit:

$$y = \frac{x\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} - k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx}$$
$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy}.$$

22. Hi igitur valores ſatisfacient huic aequationi integrali latiſſime patenti ex §. 17 deductae, dum ea per $-k$ multiplicatur:

$$\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}} - \int\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4)}{(\sqrt{A+Cyy+Ey^4})} = \text{Conſt.} + \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}}$$
$$+ \frac{\mathfrak{C}kxy}{3A\sqrt{A}}(3Akk + 3xy\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + Ekkxxyy)$$
$$= \text{Conſt.} + \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy}{6A\sqrt{A}}(3Akk + 3A(xx+yy) - Ekkxxyy).$$

23. Quodſi ergo curua quaepiam ita fuerit comparata, vt abſciſſae x reſpondeat arcus $= \int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$, isque notetur per $\Pi.x$: et arcus alii abſciſſae y reſpondens in eadem curua $\int\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{(A+Cyy+Ey^4)}}$ per $\Pi.y$: inter hos duos arcus iſta relatio locum habebit:

$$\Pi.x - \Pi.y = \text{Conſt.} + \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy}{6A\sqrt{A}}(3Akk + 3A(xx+yy) - Ekkxxyy)$$

ſiquidem abſciſſae x et y ita a ſe inuicem pendeant, vt ſit:

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy} \text{ et}$$
$$y = \frac{x\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} - k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx}.$$

24. Ad

24. Ad iſtam autem conſtantem, quam aequatio integralis continet, determinandam, conſideretur caſu, quo $y = 0$, et quo fit $x = k$; quodſi iam arcus abſciſſae euaneſcenti conueniens quoque euaneſcat, erit pro hoc caſu:

$\Pi . k =$ Conſt. quo valore ſubſtituto habebitur:

$$\Pi . x - \Pi\, y - \Pi . k = \frac{\mathfrak{B} kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C} kxy(kk + xx + yy)}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C} E k^3 x^3 y^3}{6A\sqrt{A}}.$$

Hoc ergo modo terni arcus in iſta curua dantur, quorum vnus ſummam binorum reliquorum ſuperat quantitate geometrice aſſignabili.

25. Hinc iam in genere patet, ſi curua ita fuerit comparata, vt arcus abſciſſae x reſpondens ſit $\Pi . x = \int \frac{\mathfrak{A} dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}}$, ideoque ſit $\mathfrak{B} = 0$, et $\mathfrak{C} = 0$, tum arcuum illorum differentiam in nihilum abire; hocque ergo caſu in hac curua arcuum comparatio perinde inſtitui poterit, atque in circulo. Sin autem in numeratore adſit terminus $\mathfrak{B} xx$, vel $\mathfrak{C} x^4$, vel vterque, tum arcuum illorum ternorum differentia geometrice aſſignabilis, ideoque arcuum comparatio perinde ſuccedet, atque in parabola. Ipſa autem comparatio eodem modo perficietur, quem in ſpecimine priore pro circulo ac parabola expoſui.

26. Quoniam terni arcus in computum veniunt, quorum abſciſſae ſunt x, y et k, patet, quemadmodum y pendet ab x et k, eodem modo k ab x et y pendere, vnde, datis binis, tertia ex his aequationibus determinabitur:

$$x = \frac{y\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} + k\sqrt{A(A + Cyy + Ey^4)}}{A - Ekkyy}$$

$$y = \frac{x\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} - k\sqrt{A(A + Cxx + Ex^4)}}{A - Ekkxx}$$

$$k = \frac{x\sqrt{A(A + Cyy + Ey^4)} - y\sqrt{A(A + Cxx + Ex^4)}}{A - Exxyy}.$$

27. Si hinc aequatio formetur ab irrationalitate omni inmunis, prodibit:

$$EEk^4x^4y^4 = AA(2kkxx + 2kkyy + 2xxyy - k^4 - x^4 - y^4)$$
$$+ 4ACkkxxyy + 2AEkkxxyy(kk + xx + yy).$$

In qua cum ternae abſciſſae k, x, y, pari modo ſint immixtae, conſiderari poterunt earum quadrata kk, xx, yy, tanquam radices huiusmodi aequationis cubicae

$$Z^3 - pZZ + qZ - r = 0$$

et cum ſit $p = kk + xx + yy$

$q = kkxx + kkyy + xxyy$

$r = kkxxyy$

erit $EErr = AA(4q - pp) + 4ACr + 2AEpr$

ſiue $(Ap - Er)^2 = 4AAq + 4ACr.$

28. Hac ergo inter coefficientes p, q, et r relatione conſtituta, ſi pro kk, xx et yy capiantur ternae radices huius aequationis cubicae:

$$Z^3 - pZZ + qZ - r = 0$$

erit pro comparatione arcuum curuae, quam §. 23. ſumus contemplati,

$$\Pi.x - \Pi.y - \Pi.k = \frac{\mathfrak{B}\sqrt{r}}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}p\sqrt{r}}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Er\sqrt{r}}{6A\sqrt{A}}.$$

29. Sint ipſae abſciſſae ſuis ſignis affectae $+x$, $-y$, $-k$ radices huius aequationis cubicae:

$$z^3 + szz + tz - u = 0$$

erit $\sqrt{r} = u$, $q = tt + 2su$ et $p = ss - 2t$

atque $(Ass - 2At - Euu)^2 = 4AAtt + 8AAsu + 4ACuu$, ſiue

$$t = \frac{Ass - Euu}{4A} - \frac{2Asu - Cuu}{Ass - Euu}.$$

Radi-

Radices autem huius aequationis ope triſectionis anguli ita reperientur, vt ſumto $v = \frac{2}{3}\sqrt{(ss-3t)}$, et angulo Φ, cuius ſit coſinus, ſcilicet coſ. $\Phi = \frac{27u + 36st - 8s^3}{8(ss-3t)\sqrt{(ss+3t)}}$; ipſae radices futurae ſint:

$x = v\,\text{coſ.}\,\frac{1}{3}\Phi - \frac{1}{3}s$; $y = v\,\text{coſ.}(60^\circ + \frac{1}{3}\Phi) - \frac{1}{3}s$; $k = v\,\text{coſ.}(60^\circ - \frac{1}{3}\Phi) - \frac{1}{3}s$

30. Sed relictis his, quae ad radices ſpectant, vſum formulae inuentae accuratius perpendamus, ac primo quidem notatu maxime digna occurrit haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}}$$

quippe cui nouimus conuenire hanc aequationem integralem:

$$x = \frac{y\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} + k\sqrt{A(A + Cyy + Ey^4)}}{A - Ekkyy}$$

quae cum conſtantem nouam k inuoluat ab arbitrio noſtro pendentem, erit reuera integralis completa.

31. Si pro hoc caſu ponamus $\int \frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} = \Pi.x$, quia poſito $y = 0$ fit $x = k$, erit $\Pi.x = \Pi.k + \Pi.y$. Hinc ſi fiat $k = y$, vt ſit $x = \frac{2y\sqrt{A(A + Cyy + Ey^4)}}{A - Ey^4}$; erit $\Pi.x = 2\,\Pi.y$; ideoque iſte valor ipſius x ſatisfacit huic aequationi differentiali:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} = \frac{2dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}}$$

quia autem nouam conſtantem non complectitur, erit is tantum integrale incompletum.

32. Interim tamen et huius aequationis differentialis facile integrale completum exhiberi poterit. Ponatur enim

$$\frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}} = \frac{dz}{\sqrt{(A + Czz + Ez^4)}}$$

eritque $y = \frac{z\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)} + k\sqrt{A(A + Czz + Ez^4)}}{A - Ekkzz}$

 qui

qui valor loco y ſubſtituatur in formula $x = \frac{zy\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ey^4}$ ſicque exprimetur x per z et nouam conſtantem arbitrariam k, qui valor erit integrale completum huius aequationis differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}} = \frac{zdz}{\sqrt{(A+Czz+Ez^4)}}$$

33. Statuamus $\Pi.k = n\Pi y$, ac ſumamus valorem ipſius k iam eſſe inuentum, atque ex praecedentibus colligimus, ſi capiatur

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cyy+Ey^4)}}{A-Ekkyy}$$

fore $\Pi.x = (n+1)\Pi.y$. Cum igitur caſu $n=1$ ſit $k=y$, valor hinc pro x inuentus dabit valorem ipſius k pro caſu $n=2$, vnde reperitur x, vt ſit $\Pi.x = 3\Pi.y$. Qui valor porro pro k ſumtus eum praebebit valorem ipſius x, vt fiat $\Pi x = 4\Pi.y$, ſicque, quousque lubuerit, progredi licet.

34. Inuento autem valore ipſius x, vt ſit $\Pi.x = n\Pi.y$, erit is integrale particulare huius aequationis differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}} = \frac{ndy}{\sqrt{(A+Cyy+Ey^4)}}$$

tum vero capiatur

$$z = \frac{x\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)} + k\sqrt{A(A+Cxx+Ex^4)}}{A-Ekkxx}$$

ſicque obtinebitur valor integralis ipſius z completus pro hac aequatione differentiali:

$$\frac{dz}{\sqrt{(A+Czz+Ez^4)}} = \frac{ndy}{\sqrt{(A+Cyy+Ey^4)}}$$

erit enim $\Pi.z = \Pi.k + \Pi x = \Pi k + n\Pi.y$

Tab. I. Fig. 1. 35. Contemplemur nunc etiam in genere formulam latius patentem, eamque ad lineam curuam $akfg$

akfgpqrst transferamus, cuius haec ſit indoles, vt poſita abſciſſa quacunque $AK = x$; arcus ipſi reſpondens ſit $ak = \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx + \mathfrak{C}x^4)}{\surd(A + Cxx + Ex^4)}$ quem hoc ſigno $\Pi.x$ indicemus. Manifeſtum autem eſt, quemadmodum haec relatio inter arcum ak et ſuam abſciſſam AK eſt ſtabilita, eandem quoque inter arcum et applicatam, vel cordam, aliamue rectam, ad quam arcum referre licet, conſtitui potuiſſe. Quare etſi hic x abſciſſam arcui ak reſpondentem deſignat, tamen quoque aliam quamuis rectam ad arcum pertinentem denotare poterit, dummodo ea euaneſcat, ipſo arcu euaneſcente.

36. Conſideremus nunc ternas abſciſſas, quae ſint $AK = k$; $AF = f$, et $AG = g$, quae ita a ſe inuicem pendeant, vt ſit

$$g = \frac{f\surd A(A + Ckk + Ek^4) + k\surd A(A + Cff + Ef^4)}{A - Ekkff}$$

$$f = \frac{g\surd A(A + Ckk + Ek^4) - k\surd A(A + Cgg + Eg^4)}{A - Ekkgg}$$

$$k = \frac{g\surd A(A + Cff + Ef^4) - f\surd A(A + Cgg + Eg^4)}{A - Effgg}$$

atque inter arcus $ak = \Pi.k$; $af = \Pi.f$ et $ag = \Pi.g$ haec relatio locum habebit, vt ſit:

$$\Pi.g - \Pi.f - \Pi.k = \text{Arc.}\,ag - \text{Arc.}\,af - \text{Arc.}\,ak = \text{Arc.}\,fg - \text{Arc.}\,ak$$
$$= \frac{\mathfrak{B}kfg}{\surd A} + \frac{\mathfrak{C}kfg(kk + ff + gg)}{2\surd A} - \frac{\mathfrak{C}Ek^3f^3g^3}{6A\surd A}.$$

37. Dato ergo quocunque arcu ak, a curuae initio a ſumto, a quouis puncto f abſcindi poterit arcus fg, ita vt differentia arcuum fg et ak geometrice aſſignari queat. Ob puncta enim k et f data, dabuntur abſciſſae k et f, ex quibus per formulam primam definitur abſciſſa g. Vel etiam, ſi dentur puncta k et g a puncto g regrediendo abſcindi poterit arcus gf, quia

qui ab arcu ak quantitate geometrica diſcrepet. Vel denique dato arcu quocunque fg, a curuae initio a abſcindi poterit arcus ak, qui ab illo quantitate geometrica diſcrepet.

Tab. I. Fig. 2. 38. Caſus hic euolui meretur, quo $f=k$; ſi igitur abſciſſa $AG=g$ ita accipiatur, vt ſit

$$g=\frac{2k.A(A+Ckk+Ek^4)}{A-Ek^4}$$ exiſtente $AK=k$, erit

$$\text{Arc. } ag-2\,\text{Arc. } ak=\frac{\mathfrak{B}kkg}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kkg(2kk+gg)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^6g^3}{6A\sqrt{A}}$$

Quodſi iam fuerit $Ek^4>A$, valor ipſius g prodibit negatiuus, qui ergo retro ſumtus ſit $AH=b$, ita vt ſit $g=-b$ et $\Pi.g=-\Pi.b$, exiſtente

$$b=\frac{2k\sqrt{A}(A+Ckk+Ek^4)}{Ek^4-A}$$, eritque mutatis ſignis:

$$\text{Arc. } ab+2\,\text{Arc. } ak=\frac{\mathfrak{B}kkb}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kkb(2kk+bb)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^6b^3}{6A\sqrt{A}}.$$

39 Hinc intelligitur abſciſſam k eiusmodi valorem obtinere poſſe, vt fiat $b=k$; quare ſi curua ex puncto a vtrinque per ramos ſimiles et aequales extendatur, fueritque $AH=AK$, erit quoque Arc $ab=$ Arc. ak; vnde ſi ſit $b=k$, ſeu

$$Ek^4-A=2\sqrt{A}(A+Ckk+Ek^4) \text{ vel}$$

$$EEk^8-6AEk^4-4ACkk-3AA=0, \text{ erit}$$

$$3\,\text{Arc. } ak=\frac{\mathfrak{B}k^3}{\sqrt{A}}+\frac{3\mathfrak{C}k^5}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^9}{6A\sqrt{A}}$$

arcus ergo, huic abſciſſae $AK=k$ reſpondens, abſolute erit rectificabilis, cum ſit

$$\text{Arc. } ak=\frac{\mathfrak{B}k^3}{3\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}k^5}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^9}{18A\sqrt{A}}.$$

40. Aequatio autem illa, etſi eſt octaui gradus, commode reſolui poteſt; poſitis enim eius factoribus

$$(k^4+\alpha kk+\beta)(k^4-\alpha kk+\gamma)=0$$

repe-

reperitur $\beta+\gamma=\alpha\alpha-\frac{6A}{E}$; $\beta-\gamma=\frac{4AC}{\alpha EE}$ et $\beta\gamma=-\frac{3AA}{EE}$ vnde oritur $\alpha^4-\frac{12A}{E}\alpha\alpha+\frac{36AA}{EE}-\frac{16AACC}{\alpha\alpha E^4}=-\frac{12AA}{EE}$, hincque $\alpha\alpha=\frac{4A}{E}+\sqrt[3]{\frac{16AACC-64A^3E}{E^4}}$ et ob $\gamma=\frac{\alpha\alpha}{2}-\frac{3A}{E}-\frac{2AC}{\alpha EE}$ erit $kk=\frac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{(\frac{3AC}{\alpha EE}+\frac{3A}{E}-\frac{1}{4}\alpha\alpha)}$, vel etiam,

$$kk=-\frac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{(\frac{-2AC}{\alpha EE}+\frac{3A}{E}-\frac{1}{4}\alpha\alpha)}.$$

41. Verum quod abſciſſae negatiuae idem arcus negatiue ſumtus reſpondeat, hoc in iſtis curuis ſemper locum habet. Nam cum ſit $\Pi.x=\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$, ſi abſciſſa x capiatur negatiua, erit

$$\Pi(-x)=\int\frac{-dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}=-\Pi.x$$

Videtur ergo, quoties abſciſſae k in §. praec. definitae reſpondet arcus realis, tum eiusdem arcus longitudinem geometrice aſſignari poſſe.

42. Affirmare autem non auſim hoc ratiocinium, quo arcum abſolute rectificabilem elicui, ſemper tuto adhiberi poſſe; videntur enim caſus exiſtere, quibus id locum non ſit habiturum. Si enim ſit $\mathfrak{B}=0$ et $\mathfrak{C}=0$, ideoque $\Pi.x=\int\frac{\mathfrak{A}dx}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$ prodiret in §. 39. vtique 3 Arc. $ak=0$, cum tamen ex aequatione octaui gradus ibi exhibita non fiat abſciſſa $k=0$. Verum recordandum eſt, hanc aequationem natam eſſe ex hac, $k=\frac{2k\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}}{Ek^4-A}$, quae cum ſtatim praebeat radicem $k=0$, haec vnica erit, quae hoc caſu quaeſito ſatisfacit, reliquis exiſtentibus omnibus ineptis.

43. Neque tamen his caſibus ratiocinium omnino fallere cenſendum eſt, etiamſi pro k alia quaecunque

radix accipiatur, ſed potius eidem abſciſſae plures arcus reſpondere ſunt putandi, quorum vnus tantum isque negatiuus ſatisfaciat: hocque ergo caſu, tametſi in §. 38. ſtatuatur $b = k$, tamen inde non ſequitur, eſſe Arc $ab =$ Arc. ak, ideoque Arc. $ab +$ 2 Arc. $ak =$ 3 Arc. ak, cum eidem abſciſſae $b = k$ etiam alii arcus praeter Arc. ak conueniant, inter quos vnus ſit, qui reddat Arc. $ab +$ 2 Arc. $ak = 0$.

44. Quod quo clarius perſpiciatur, ponamus $A = 1$; $C = 2$ et $E = 1$; exiſtente $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$; eritque $\Pi.\, x = \mathfrak{A}$ Arc. tang x, et Arc. $ak = \mathfrak{A}$ A tang. k, atque Arc. $ab = \mathfrak{A}$ A tang. b; poſito ergo $b = \frac{2k\surd(1 + 2kk + k^4)}{k^4 - 1} = \frac{2k}{kk - 1}$, erit $\mathfrak{A}$ A tang. $b + 2\,\mathfrak{A}$ A tang. $k = 0$. Quodſi iam ponatur $b = k$, fiet $kk = x$ et $k = \surd 3$, reperieturque $\mathfrak{A}$(A tang. $\surd 3 +$ 2 A tang. $\surd 3) = 0$. Etſi autem eſt A tang. $\surd 3 =$ Arc. $60°$, tamen inde non ſequitur 3 $\mathfrak{A}$ Arc. $60° = 0$, quod vtique eſſet falſum; ſed quoniam tangenti $\surd 3$ conuenit quoque arcus $-120°$, hic valor, priori loco pro A tang. $\surd 3$ ſcriptus, veritatem praebebit, ſcilicet $\mathfrak{A}(-$Arc. $120° +$ 2 Arc. $60°) = 0$.

45. Haec igitur ambiguitas, qua eidem quantitati k, quam hic tanquam abſciſſam aſſumimus, plures valores Arc. ak reſpondere poſſunt, in cauſa eſt, quod etiamſi in §. 38. ponatur $b = k$, non tamen pro Arc. $ab +$ 2 Arc. ak ſcribere liceat 3 Arc. ak. Interim tamen nihilominus erit etiam hoc caſu

$$\text{Arc.}\, ab + 2\, \text{Arc.}\, ak = \frac{\mathfrak{B}k^3}{\surd A} + \frac{3\mathfrak{C}k^5}{2\surd A} - \frac{\mathfrak{C}Ek^9}{6A\surd A}$$

abſciſſae enim b, etſi eſt $= k$, tamen praeter arcum ak alius quoque arcus conueniet, qui loco Arc. ab ſubſti-

ſubſtitutus aequationi ſatisfacit. Hanc ergo ambiguitatem ſedulo diſpici oportet, ne in errorem inducamur.

46. Quoties autem huiusmodi ambiguitas non habet locum, ita vt eidem abſciſſae vnicus arcus reſpondeat, tum ſine haeſitatione poſita abſciſſa $b = k$ etiam pro arc. ab ſcribere licebit arc. ak et 3 Arc. ak pro Arc. $ab +$ 2 Arc. ak, neque hinc vllus error erit extimeſcendus, quaecunque radix aequationis octaui gradus §. 39. inuentae pro k capiatur. Id quod euidens erit in caſu, quo $\mathfrak{A} = A$; $\mathfrak{B} = 2C$ et $\mathfrak{C} = 3E$, quippe quo fit $\Pi.x = x\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}$ ideoque quantitas algebraica, et

$$\Pi.g - \Pi.f - \Pi.k = \frac{2Ckfg}{\sqrt{A}} + \frac{3Ekfg(kk+ff+gg)}{3\sqrt{A}} - \frac{EEk^3f^3g^3}{2A\sqrt{A}}.$$

47. Quodſi iam ponatur $f = k$, erit $g = \frac{2k\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}}{A - Ek^4}$ et $\sqrt{A(A + Cgg + Eg^4)} = \frac{A(gg - 2kk) + Ek^4gg}{2kk}$. Sit nunc $g = -k$, ſeu $Ek^4 - A = 2\sqrt{A(A + Ckk + Ek^4)}$, erit $\sqrt{A(A+Cgg+Eg^4)} = -\frac{-A+Ek^4}{2} = \sqrt{A(A+Ckk-Ek^4)}$; vnde $\Pi g = -\Pi.k$ et $-3\Pi k = \frac{-2Ck^3}{\sqrt{A}} - \frac{9Ek^5}{2\sqrt{A}} + \frac{EEk^9}{2A\sqrt{A}}$, ſeu

$$3.\Pi k = \frac{k(4ACkk + 9AEk^4 - EEk^8)}{2A\sqrt{A}}$$

At eſt $EEk^8 = 6AEk^4 + 4ACkk + 3AA$, vnde fit

$$3.\Pi k = \frac{k(3AEk^4 - 3AA)}{2A\sqrt{A}} = \frac{3k(Ek^4 - A)}{2\sqrt{A}} = 3k\sqrt{(A+Ckk+Ek^4)}$$

quod ob $\Pi k = k\sqrt{(A + Ckk + Ek^4)}$ eſt veritati conſentaneum.

48. Quanquam autem haec curua per ſe eſt rectificabilis, tamen euidenter probat id, quod volumus; ſcilicet contineri in noſtris formulis etiam curuas irrectificabiles, in quibus, modo ante expoſito, arcum abſolute

rectificabilem aſſignari liceat. Inuento autem vno arcu rectificabili velut ak, ex eo ſtatim infiniti alii eiusdem indolis exhiberi poterunt: cum enim a quouis puncto f abſcindi queat arcus fg, cuius ab illo differentia eſt geometrica, etiam hic arcus erit rectificabilis. Praeterea vero ex eodem arcu adhuc alii infiniti pariter rectificabiles reperientur modo ſequente, quem in genere exponere conuenit.

49. Quo noſtras formulas ſimpliciores reddamus, ponamus breuitatis gratia:

$$\sqrt{A(A+Ckk+Ek^4)}=K;\ \sqrt{A(A+Cff+Ef^4)}=F;\ \sqrt{A(A+Cgg+Eg^4)}=G$$

vt ſit per §. 36:

$$g=\frac{fK+kF}{A-Ekkff};\ f=\frac{gK-kG}{A-Ekkgg};\ k=\frac{gF-fG}{A-Effgg}.$$

Quodſi iam fuerit $\Pi.x=\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$ erit

$$\Pi.g-\Pi.f-\Pi.k=\text{Arc}.ag-\text{Arc}.af-\text{Arc}.ak=\text{Arc}.fg-\text{Arc}.ak$$
$$=\frac{\mathfrak{B}kfg}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kfg(kk+ff+gg)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^3f^3g^3}{6A\sqrt{A}}.$$

50. Sumantur ſimili modo praeter abſciſſam $AK=k$ aliae duae abſciſſae $AP=p$; $AQ=q$; poſitoque pariter:

$$\sqrt{A(A+Cpp+Ep^4)}=P \text{ et } \sqrt{A(A+Cqq+Eq^4)}=Q$$

ac relatione hac conſtituta

$$q=\frac{pK+kP}{A-Ekkpp};\ p=\frac{qK-kQ}{A-Ekkqq};\ k=\frac{qP-pQ}{A-Eppqq}$$

erit pro eadem curua:

$$\text{Arc}.pq-\text{Arc}.ak=\frac{\mathfrak{B}kpq}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{C}kpq(kk+pp+qq)}{2\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{C}Ek^3p^3q^3}{6A\sqrt{A}}$$

51. Sub-

51. Subtracta ergo illa aequatione ab hac relinquetur:

$$\text{Arc.}\,pq - \text{Arc.}\,fg = \frac{\mathfrak{B}k(pq-fg)}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kpq(kk+pp+qq)-\mathfrak{C}kfg(kk+ff+gg)}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek^3(p^3q^3-f^3g^3)}{6A\sqrt{A}}$$

vbi abſciſſae f; g; p; et q ita a ſe inuicem pendent, vt ſit

$$k = \frac{gF-fG}{A-Effgg} = \frac{qP-pQ}{A-Eppqq} \text{ vel } \frac{1}{k} = \frac{gF+fG}{A(gg-ff)} = \frac{qP+pQ}{A(qq-pp)}$$

vnde ſimul abſciſſa k eliminari, et relatio inter f, g, p, q definiri poterit.

52. Quo haec eliminatio facilius abſoluatur, notandum eſt, eſſe quoque

$$K = \frac{A(ff+gg-kk)-Ekkffgg}{2fg} = \frac{A(pp+qq-kk)-Ekkppqq}{2pq}$$

vnde ſit

$$kk = \frac{Apq(ff+gg)-Afg(pp+qq)}{(pq-fg)(A-Efgpq)} = \frac{(gF-fG)^2}{(A-Effgg)^2} = \frac{(qP-pQ)^2}{(A-Eppqq)^2}.$$

Erit ergo

$$pq(kk+pp+qq)-fg(kk+ff+gg) = pq(pp+qq)-fg(ff+gg) + \frac{Apq(ff+gg)-Afg(pp+qq)}{A-Efgpq}$$

hincque obtinetur:

$$\text{Arc.}\,pq - \text{Arc.}\,fg = \frac{\mathfrak{B}k(pq-fg)}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}k(pq-fg)(ff+gg+pp+qq)}{2\sqrt{A}} - \frac{\mathfrak{C}Ek(pq-fg)^2(pq(ff+gg)-fg(pp+qq))}{6(A-Efgpq)\sqrt{A}},$$

53. Cum igitur ſit $kk = \frac{A(pq(ff+gg)-fg(pp+qq))}{(pq-fg)(A-Efgpq)}$, et quatuor abſciſſae f, g, p, q; ita a ſe inuicem pendeant, vt ſit:

$$\frac{gF+fG}{gg-ff} = \frac{qP+pQ}{qq-pp}$$

patet propoſito arcu quocunque fg in curua aſſumta, ſemper ab alio dato puncto p abſcindi poſſe arcum pq;

 qui

qui ab illo arcu differat quantitate algebraice aſſignabili.

54. Quodſi porro a puncto q vlterius progrediendo capiatur punctum r, ita vt poſita abſciſſa $AR = r$ ſit

$$\frac{gF + fG}{gg - ff} = \frac{rQ + qR}{rr - qq} \text{ ſeu}$$

$$\frac{pq(ff+gg) - fg(pp+qq)}{(pq - fg)(A - Bfgpq)} = \frac{qr(ff+gg) - fg(qq+rr)}{(qr - fg)(A - Efgqr)} = \frac{qr(pp+qq) - pq(qq+rr)}{(qr - pq)(A - Epqqr)}$$

erit quoque Arc. qr - Arc. fg = quantitati algebraicae, quae differentia, ad priorem addita, dabit:

$$\text{Arc.}\, pr - 2\,\text{Arc.}\, fg = \text{Quant. algebr.}$$

ſicque a dato puncto p abſcindi poteſt arcus pr, qui duplum arcum propoſitum fg ſuperet quantitati algebraica.

55. Simili modo, ſi vlterius abſciſſae $AS = s$; $AT = t$; etc. ita capiantur, vt ſit

$$\frac{gF + fG}{gg - ff} = \frac{sR + rS}{ss - rr} = \frac{tS + sT}{tt - ss} \text{ etc.}$$

arcus ps triplum arcus fg, arcus pt quadruplum arcus fg etc. ſuperabit quantitate geometrice aſſignabili. Viciſſim autem dato, vel arcu pr, vel ps, vel pt etc. reperiri poterit a dato puncto f arcus fg, qui ab illius ſemiſſi, vel triente, vel quadrante deficiat quantitate geometrice aſſignabili.

56. Euenire etiam poſſet, vt licet quantitates $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ non ſint nihilo aequales, tamen differentiae iſtae geometrice aſſignabiles euaneſcant; quin etiam ſemper vna abſciſſarum ita definiri poteſt, vt haec differentia re vera in nihilum abeat. His igitur caſibus in propoſita curua eiusmodi bini arcus aſſignari poterunt,

terunt, qui inter ſe, vel aequales ſint futuri, vel datam rationem numeri ad numerum habituri.

57. Cum haec latiſſime pateant, atque ad omnes curuas accommodari queant, quarum arcus pro abſciſſa, vel alia quacunque recta variabili x ita exprimitur, vt ſit $=\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$, conueniet, iſtas affectiones pro nonnullis curuis determinatis euolui, quo vſus huius methodi clarius perſpiciatur. Primum igitur potiſſimum hanc arcuum comparationem in ellipſi exponere viſum eſt.

De Comparatione Arcuum in Ellipſi.

Sit igitur propoſitus quadrans ellipticus ABa, cuius centrum in A; ponatur alter ſemiaxis, ſuper quo abſciſſae capiuntur $AB=a$, alter vero $Aa=na$. Sumta ergo abſciſſa quacunque $AP=x$, erit applicata $PM=n\sqrt{(aa-xx)}$, eiusque differentiale $=-\frac{nxdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, vnde fit arcus huic abſciſſae reſpondens $aM=\int dx\sqrt{\frac{aa+(nn-1)xx}{aa-xx}}$. Statuatur $1-nn=m$, vt ſit $aM=\int dx\sqrt{\frac{aa-mxx}{aa-xx}}$. Quia perinde eſt, vter ſemiaxium ſit maior, vel minor, ſumamus AB eſſe maiorem, ideoque $n<1$; et m numerus poſitiuus vnitate minor: et cum focus exiſtat in ſemiaxe AB, erit eius a centro A diſtantia $=\sqrt{(aa-mmaa)}$ $=a\sqrt{m}$; vnde valor numeri m facilius intelligitur. Tab. I. Fig. 3.

Quodſi ergo arcus, qui abſciſſae cuicunque $AP=x$ reſpondens, deſignetur $aM=\Pi.x$, erit $\Pi.x=\int dx\sqrt{\frac{aa-mxx}{aa-xx}}$: quae expreſſio ad formam noſtram generalem reducta abibit in hanc:

$$\Pi.x=\int\frac{dx(aa-mxx)}{\sqrt{(a^4-(m+1)aaxx+mx^4)}}$$

Sicque

Sicque pro hoc caſu habebimus iſtos valores:
$A = a^4$; $C = -(m+1)aa$; $E = m$, $\mathfrak{A} = aa$; $\mathfrak{B} = -m$; et $\mathfrak{C} = 0$,
Sumtis ergo tribus abſciſſis k; x; y, quibus reſpondeant arcus $\Pi.k$; $\Pi\, x$; $\Pi.y$, ita vt ſit:

$$x = \frac{aay\sqrt{(a^4-(m+1)aakk+mk^4)}+aak\sqrt{(a^4-(m+1)aayy+my^4)}}{a^4-mkkyy}$$

$$y = \frac{aax\sqrt{(a^4-(m+1)aakk+mk^4)}-aak\sqrt{(a^4-(m+1)aaxx+mx^4)}}{a^4-mkkxx}$$

$$k = \frac{aax\sqrt{(a^4-(m+1)aayy+my^4)}-aay\sqrt{(a^4-(m+1)aaxx-mx^4)}}{a^4-mxxyy}$$

hi tres arcus a ſe inuicem ita pendebunt, vt ſit:

$$\Pi.x - \Pi.y - \Pi.k = -\frac{mkxy}{aa}$$

His igitur praemiſſis ſequentia problemata reſoluamus:

Problema 1.

Propoſito ellipſeos arcu quocunque ak, ab alio quouis puncto f abſcindere arcum fg, ita vt differentia arcuum ak et fg geometrice aſſignari queat.

Solutio.

Ductis ex punctis k, f, g, applicatis kK, fF, gG, vocentur abſciſſae $AK = k$; $AF = f$; $AG = g$, quarum illae dantur, haec vero quaeritur: eruntque arcus:

$$ak = \Pi.k;\ af = \Pi.f;\ ag = \Pi.g$$

Ponatur porro breuitatis gratia ſecundum §. 49.

$$aa\sqrt{(a^4-(m+1)aakk+mk^4)} = K$$

$$aa\sqrt{(a^4-(m+1)aaff+mf^4)} = F$$

$$aa\sqrt{(a^4-(m+1)aagg+mg^4)} = G$$

ac ſtatuatur inter ternas abſciſſas iſta relatio:

$$g = \frac{fK+kF}{a^4-mkkff},\ \text{vel}\ f = \frac{gK-kG}{a^4-mkkgg},\ \text{vel}\ k = \frac{gF-fG}{a^4-mffgg}$$

quo

quo facto habebitur:

$$\Pi.g - \Pi.f - \Pi.k = \text{Arc}.fg - \text{Arc}.ak = -\frac{mkfg}{aa}$$

Puncto g ergo ita ſumto, vt ſit $AG = g = \frac{fK + kF}{a^4 - mkkff}$, differentia arcuum ak et fg geometrice poterit aſſignari. Erit enim

$$\text{Arc}.\ ak - \text{Arc}.fg = \frac{mkfg}{aa}. \qquad \text{Q. E. I.}$$

Coroll. 1.

Eadem ſolutio locum habebit, ſi propoſito arcu ak detur punctum g, a quo regrediendo verſus a abſcindi oporteat arcum gf, cuius ab illo differentia debeat eſſe geometrica, tum enim abſciſſae k et g erunt datae, ex quibus valor tertiae f reperiri poterit.

Coroll. 2.

Dato etiam arcu quocunque in ellipſi fg a vertice a abſcindi poterit arcus ak, ita vt differentia arcuum ak et fg fiat geometrica. Ita cuiusque arcus fg rectificatio pendebit a rectificatione arcus cuiusdam ak in vertice ellipſis a terminato.

Coroll. 3.

Relatio inter ternas abſciſſas k, f, g etiam ita exhiberi poteſt, vt ſit

$$g = \frac{a^4(-kk + ff)}{fK - kF}, \text{ vel } f = \frac{a^4(-kk + gg)}{gK + kG}, \text{ vel } k = \frac{a^4(gg - ff)}{gF + fG}$$

ex quibus cum praecedentibus comparatis elicitur:

$$K = \frac{a^4(ff + gg - kk) - mkkffgg}{2fg} = aa\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}$$

$$F = \frac{a^4(kk + gg - ff) - mkkffgg}{2kg} = aa\sqrt{(aa-ff)(aa-mff)}$$

$$G = -\frac{a^4(kk + ff - gg) + mkkffgg}{2kf} = aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}$$

tum vero etiam habebitur: $fg(gg-ff)K - kg(gg-kk)F - kf(ff-kk)G = 0$.

Coroll. 4.

Si differentia inter arcus ak et fg omnino debeat euaneſcere, patet id fieri non poſſe, niſi ſit, vel $k=0$, vel $f=0$, vel $g=0$. Primo caſu ipſe arcus ak, ideoque et arcus fg, euaneſcit, binis reliquis caſibus autem alteruter terminus arcus fg in punctum a incidit, ſitque arcus fg arcui ak non ſolum aequalis, ſed etiam ſimilis.

Coroll. 5.

Quo iſtae abſciſſarum relatio facilius ad praxin transferri queat, notaſſe iuuabit in genere, ſi ad punctum M ducatur normalis MN, in eamque ex A perpendiculum demittatur AV, quod parallelum erit tangenti MT: atque ponatur $AP = x$; fore

$PM = n\sqrt{(aa-xx)}$; $PN = nnx$; $AN = mx$; $MN = n\sqrt{(aa-mxx)}$

$AV = \frac{mx\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa-mxx)}}$; $NV = \frac{mnxx}{\sqrt{(aa-mxx)}}$; $MV = \frac{naa}{\sqrt{(aa-mxx)}}$

$MT = \frac{x\sqrt{(aa-mxx)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$; $AT = \frac{naa}{\sqrt{(aa-xx)}}$ et $AV.MT = mxx$.

Coroll. 6.

Poſito ergo g pro x iſti valores pro puncto g reperiuntur

$$g = \frac{a^2 b\sqrt{(aa-ff)(aa-mff)} + aaf\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}}{a^4 - mkkff}$$

$$\sqrt{(aa-gg)} = \frac{a^3\sqrt{(aa-kk)(aa-ff)} - akf\sqrt{(aa-mkk)(aa-mff)}}{a^4 - mkkff}$$

$$\sqrt{(aa-mgg)} = \frac{a^3\sqrt{(aa-mkk)(aa-mff)} - makf\sqrt{(aa-kk)(aa-ff)}}{a^4 - mkkff}$$

atque

atque $\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}$

$$= \frac{a^4 kf(2maa(kk+ff)-(m+1)(a^4+mkkff))+aa(a^4+mkkff)\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)(aa-ff)(aa-mff)}}{(a^4-mkkff)^2}$$

vnde porro elicitur:

$$aa\sqrt{(aa-mgg)}+mkf\sqrt{(aa-gg)}=a\sqrt{(aa-mkk)(aa-mff)}$$

$$aa\sqrt{(aa-gg)}+kf\sqrt{(aa-mgg)}=a\sqrt{(aa-kk)(aa-ff)}$$

Caſus I.

Propoſito ellipſeos arcu ak *in altero vertice* a *terminato, ab altero vertice* B *abſcindere arcum* Bf, *ita vt arcuum* ak *et* Bf *differentia ſit geometrica.* Tab I. Fig. 4.

Problema ergo ad hunc caſum transfertur, ſi punctum g in vertice B ſtatuatur, ſeu fiat $g=a$, et quaeri oportet punctum f, ſeu abſciſſam $AF=f$. Verum ob $g=a$ erit $G=0$, ideoque habebitur $f=\frac{aK}{a^4-maakk}$ $=a\sqrt{\frac{aa-kk}{aa-mkk}}$, vel ducta ad punctum k normali kN, capi debet $AF=f=\frac{AB.Kk}{Nk}$. Hoc autem puncto ita ſumto, erit arcuum differentia

$$\text{Arc.}\,ak-\text{Arc.}\,Bf=\frac{mkf}{a}=mk\sqrt{\frac{aa-kk}{aa-mkk}}=\frac{AN.Kk}{Nk}.$$

Corollarium.

Fieri igitur poteſt, vt puncta k et f in vno puncto e coeant, ſicque quadrans aeB in duas partes diſſecetur, quarum differentia ſit geometrica. Ad hoc ſtatuatur $k=f=AE=e$, eritque $e=a\sqrt{\frac{aa-ee}{aa-mee}}$, ſeu $a^4-2aaee+me^4=0$, vnde fit $ee=\frac{aa\pm aa\sqrt{(1-m)}}{m}$ $=\frac{aa(1\pm n)}{m}$ ob $m=1-nn$. Hinc ergo erit $e=\frac{a}{\sqrt{(1\pm n)}}$. Verum quia eſſe debet $e<a$, erit $e=\frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$, ſiue

$AE = \frac{AB^2}{\sqrt{(AB^2 + AB \cdot Aa)}}$ et $Ee = \frac{na\sqrt{n}}{\sqrt{(1+n)}}$; ita vt ſit $AE : Ee = 1 : n\sqrt{n} = AB\sqrt{AB} : Aa\sqrt{Aa}$. Hocque caſu erit:

$$\text{Arc.}\,ae - \text{Arc.}\,Be = a(1-n) = AB - Aa$$

Caſus II.

Tab. I. Fig. 5. *Propoſito arcu* ak *in vertice* a *terminato, ab eius altero termino* k *abſcindere arcum* kg, *ita vt arcuum* ak *et* kg *differentia ſit rectificabilis.*

Hoc ergo caſu punctum f in k incidit, eritque $f = k$, hincque etiam $F = K$; vnde reperitur:

$$AG = g = \frac{2kK}{a^4 - mk^4} = \frac{2aak\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}}{a^4 - mk^4}$$

Sumta ergo abſciſſa AG huius valoris erit:

$$\text{Arc.}\,ak - \text{Arc.}\,kg = \frac{mkkg}{aa} = \frac{2mk^3\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}}{a^4 - mk^4}.$$

Corollarium. 1.

Viciſſim ergo arcus quicunque ag, in vertice a terminatus, ita in k in duas partes ſecari poterit, vt partium differentia $ak - kg$ fiat rectificabilis. Ob cognitam enim abſciſſam $AG = g$, abſciſſa quaeſita $AK = k$ ex hac aequatione definiri debet:

$$gg(a^4 - mk^4)^2 = 4a^4kk(aa-kk)(aa-mkk)$$

quae abit in hanc octaui gradus:

$$mmggk^8 - 4ma^4k^6 - 2ma^4ggk^4 - 4a^8kk + a^8gg = 0$$
$$+ 4(m+1)a^6k^4.$$

Coroll. 2.

At ſi huius aequationis factores ponantur

$$(mgk^4 - Akk + a^4g)(mgk^4 - Bkk + a^4g) = 0$$

repe-

reperitur:

$$A+B=\frac{4a^4}{g} \text{ et } AB=4(m+1)a^6-4ma^4gg$$

vnde $A-B=\frac{4aa}{g}\sqrt{(a^4-(m+1)aagg+mg^4)}$

ita vt ſit:

$$A=\frac{2a^4+2aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}{g} \text{ et}$$

$$B=\frac{2a^4-2aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}{g} \text{ Conſequenter}$$

$$k^4=\frac{2a^4kk\pm 2aakk\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}-a^4gg}{mgg} \text{ et}$$

$$kk=\frac{a^4\pm aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}+a^3\sqrt{(2aa-(m+1)gg\pm 2\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)})}}{mgg}.$$

Coroll. 3.

Quaternae ergo radices ipſius kk ſunt:

I. $kk=\frac{a^4+aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}+a^3\sqrt{(aa-gg)}+a^3\sqrt{(aa-mgg)}}{mgg}$

II. $kk=\frac{a^4+aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}-a^3\sqrt{(aa-gg)}-a^3\sqrt{(aa-mgg)}}{mgg}$

III. $kk=\frac{a^4-aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}+a^3\sqrt{(aa-gg)}-a^3\sqrt{(aa-mgg)}}{mgg}$

IV. $kk=\frac{a^4-aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}-a^3\sqrt{(aa-gg)}+a^3\sqrt{(aa-mgg)}}{mgg}$

quae adhibita ambiguitate hoc modo coniunctim repraeſentari poſſunt:

$$kk=\frac{aa}{mgg}(a\pm\sqrt{(aa-gg)})(a\pm\sqrt{(aa-mgg)}).$$

Coroll. 4.

Ipſi autem valores ipſius k erunt hinc:

$$k=\pm\frac{a}{g\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{a+g}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-g}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}}\right)$$

qui ſunt omnino numero octo, quaterni affirmatiui, totidemque negatiui illisque aequales: manifeſtum autem eſt, affirmatiuos tantum hic locum habere, ex iisque eos, qui praebent $k<g$. Hic autem eſt certo:

 $k=$

$$k=\frac{a}{g\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{a+g}{2}}-\sqrt{\frac{a-g}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}}-\sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}}\right)$$

Nam eſt:

$$\sqrt{\frac{a+g}{2}}+\sqrt{\frac{a-g}{2}}>\sqrt{a};\ \sqrt{\frac{a+g}{2}}-\sqrt{\frac{a+g}{2}}<\sqrt{g}$$

$$\sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}}+\sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}}>\sqrt{a};\ \sqrt{\frac{a+g\sqrt{m}}{2}}-\sqrt{\frac{a-g\sqrt{m}}{2}}<\sqrt{g\sqrt{m}}.$$

Coroll. 5.

Si ponatur $\frac{g}{a}=\text{coſ}\,\eta$ et $\frac{g\sqrt{m}}{a}=\text{coſ}.\theta$, ob $m<1$ erit $\theta>\eta$; er formula noſtra pro radicibus ipſius k inventa, in hanc abibit formam:

$$k=\pm\frac{a}{\text{coſ}.\theta}(\text{coſ}.\tfrac{1}{2}\eta\pm\text{ſin}.\tfrac{1}{2}\eta)(\text{coſ}.\tfrac{1}{2}\theta\pm\text{ſin}.\tfrac{1}{2}\theta)$$

ſeu ob $\text{coſ}.\theta=\text{coſ}.\tfrac{1}{2}\theta^2-\text{ſin}.\tfrac{1}{2}\theta^2$ habebitur:

$$k=\pm a\frac{\text{coſ}.\tfrac{1}{2}\eta\pm\text{ſin}.\tfrac{1}{2}\eta}{\text{coſ}.\tfrac{1}{2}\theta\pm\text{ſin}.\tfrac{1}{2}\theta}.$$ Vel octoni valores erunt:

$$k=\pm a.\frac{\text{coſ}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\eta)}{\text{coſ}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\theta)}$$

$$k=\pm a.\frac{\text{ſin}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\eta)}{\text{coſ}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\theta)}$$

$$k=\pm a.\frac{\text{coſ}\,(45^\circ-\tfrac{1}{2}\eta)}{\text{ſin}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\theta)}$$

$$k=\pm a.\frac{\text{ſin}\,(45^\circ-\tfrac{1}{2}\eta)}{\text{ſin}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\theta)}$$

Coroll. 6.

Ex his valoribus ſecundus ſemper $k=a\frac{\text{ſin}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\eta)}{\text{coſ}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\theta)}$ $=a\frac{\text{ſin}\,(45^\circ-\tfrac{1}{2}\eta)}{\text{ſin}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)}$ ſatisfacit, fit enim, vti manifeſtum eſt,

eſt, non ſolum $k > a$, ſed etiam $k < g$, ſeu $k < a\cos.\eta$:
Ex primo quidem valore $k = a\frac{\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}\eta)}{\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}\theta)}$ ſemper fit $k < a$ ob $\eta < \theta$: verum vt ſit $k < g$, oportet eſſe
$\frac{\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}\eta)}{\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}\theta)} < \cos.\eta = \sin.(90^\circ-\eta) = 2\sin(45^\circ-\frac{1}{2}\eta)$
$\sin(45^\circ+\frac{1}{2}\eta)$, ideoque
$1 < 2\sin(45^\circ-\frac{1}{2}\eta)\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}\theta)$ ſeu $1 < \cos.\frac{1}{2}(\theta+\eta) - \cos.(90^\circ+\frac{1}{2}(\theta-\eta))$ ſeu $1 < \cos.\frac{1}{2}(\theta+\eta)+\sin.\frac{1}{2}(\theta-\eta)$.

Problema 2.

Propoſito ellipſeos arcu quocunque fg, a dato puncto p abſcindere alium arcum pq, ita vt horum arcuum differentia $fg - pq$ fiat geometrica. Tab. I. Fig. 6.

Solutio.

Ductis applicatis fF, gG, pP, qQ ſint abſciſſae: $AF = f$ $AG = g$, $AP = p$, et $AQ = q$, tum a vertice a capiatur arcus ak, qui datum arcum fg quantitate geometrica ſuperet; poſitaque abſciſſa $AK = k$, ac breuitatis gratia $K = aa\sqrt{(aa-kk)(aa-mkk)}$; $F = aa\sqrt{(aa-ff)(aa-mff)}$; $G = aa\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}$; $P = aa\sqrt{(aa-pp)(aa-mpp)}$ et $Q = aa\sqrt{(aa-qq)(aa-mqq)}$: erit primo:

$k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{a^4(gg-ff)}{gF+fG}$; vnde reperitur k; ita vt ſit:

$$\text{Arc.}\,ak - \text{Arc.}\,fg = \frac{mkfg}{aa}$$

Tum vero abſciſſa q per problema praec. ita determinetur, vt ſit:

$q = \frac{pK + kP}{a^4 - mkkpp} = \frac{a^4(pp-kk)}{pK-kP}$, eritque

Arc.

$$\text{Arc.}\, ak - \text{Arc.}\, pq = \frac{mkpq}{aa}$$

a qua aequatione illa ſubtrahatur, relinquetur:

$$\text{Arc.}\, fg - pq = \frac{mk}{aa}(pq - fg). \quad \text{Q. E. I.}$$

Coroll. 1.

Cum k ab abſciſſis p et q pari modo pendeat atque ab f et g, erit:

$$k = \frac{qP - pQ}{a^4 - mppqq} = \frac{a^4(qq - pp)}{qP + pQ}$$

ideoque abſciſſa q ex datis f, g, et p per hanc aequationem debet definiri:

$$\frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{qP - pQ}{a^4 - mppqq}$$ vel etiam ex hac:

$$\frac{gg - ff}{gF + fG} = \frac{qq - pp}{qP + pQ};$$ atque hinc elicitur:

$$q = \frac{Fgp(pp - gg) + Gfp(pp - ff) - Pfg(gg - ff)}{Ff(pp - gg) + Gg(pp - ff) - Pp(gg - ff)}.$$

Coroll. 2.

Abſciſſae p et q etiam ita ab abſciſſa k pendent, vt ſit:

$$aa\sqrt{(aa - mqq)} + mkp\sqrt{(aa - qq)} = a\sqrt{(aa - mkk)(aa - mpp)}$$
$$aa\sqrt{(aa - qq)} + kp\sqrt{(aa - mqq)} = a\sqrt{(aa - kk)(aa - pp)}$$
$$aa\sqrt{(aa - mpp)} - mkq\sqrt{(aa - pp)} = a\sqrt{(aa - mkk)(aa - mqq)}$$
$$aa\sqrt{(aa - pp)} - kq\sqrt{(aa - mpp)} = a\sqrt{(aa - kk)(aa - qq)}$$
$$aa\sqrt{(aa - mkk)} - mpq\sqrt{(aa - kk)} = a\sqrt{(aa - mpp)(aa - mqq)}$$
$$aa\sqrt{(aa - kk)} - pq\sqrt{(aa - mkk)} = a\sqrt{(aa - pp)(aa - qq)}$$

Coroll. 3.

Si arcuum fg et pq differentia debeat euaneſcere, neceſſe eſt, vt ſit, vel $k = 0$, vel $pq = fg$. At ſi $k = 0$, ob

ob $k = \frac{a^4(gg-ff)}{gF+fG} = \frac{a^4(qq-pp)}{qP+pQ}$, tam arcus fg, quam pq, euaneſcit. Sin autem ſit $pq = fg$, ob

$$aa\sqrt{(aa-mkk)} - mpq\sqrt{(aa-kk)} = a\sqrt{(aa-mpp)(aa-mqq)}$$
$$aa\sqrt{(aa-mkk)} - mfg\sqrt{(aa-kk)} = a\sqrt{(aa-mff)(aa-mgg)}$$

erit $(an-mpp)(aa-mqq) = (aa-mff)(aa-mgg)$ et ob

$$aa\sqrt{(aa-kk)} - pq\sqrt{(aa-mkk)} = a\sqrt{(aa-pp)(aa-qq)}$$
$$aa\sqrt{(aa-kk)} - fg\sqrt{(aa-mkk)} = a\sqrt{(aa-ff)(aa-gg)}$$

erit $(aa-pp)(aa-qq) = (aa-ff)(aa-gg)$

vnde patet eſſe, vel $q = g$ et $p = f$, vel $q = f$ et $p = g$; vtroque autem caſu fit arcus pq non ſolum aequalis, ſed etiam ſimilis, arcui fg.

Coroll. 4.

Si fieri poſſet, vt arcus pq euaneſceret, manente arcu fg finito, hic arcus foret rectificabilis. At euaneſcente arcu pq, ob $q = p$, oritur $k = 0$, ideoque etiam $f = g$; vnde quoque arcus fg euaneſcit.

Coroll. 5.

Si arcus pq in altero vertice B debeat eſſe terminatus, vt ſit $q = a$, habebimus hanc aequationem:

$$a^2\sqrt{(1-m)} = \sqrt{(aa-mkk)(aa-mpp)}; \text{ ſiue}$$
$$a^4 - aakk - aapp + mkkpp = 0 \text{ et } kk = \frac{aa(aa-pp)}{aa-mpp}$$

Qui valor ſubſtitutus in hac aequatione

$$aa\sqrt{(aa-kk)} - fg\sqrt{(aa-mkk)} = a\sqrt{(aa-ff)(aa-gg)}$$

praebet:

$$0 = a^6 + 2(1-m)a^3fgp - a^4(ff+gg+pp) + maa(ffgg+ffpp+ggpp) - mffggpp;$$

 vnde

vnde oritur:

$$p = \frac{(1-m)a^3fg \pm a^2\sqrt{(aa-ff)(aa-gg)(aa-mff)(aa-mgg)}}{a^4 - maaff - maagg + mffgg}$$

qui caſus ad caſum problematis primi redit, ſi modo vertices a et B inter ſe permutentur, et loco abſciſſarum applicatae introducantur.

Coroll. 6.

Notari quoque meretur caſus, quo punctum p in ipſo puncto g aſſumitur, ita vt arcus pq arcui fg fiat contiguus, ſitque Arc. fg − Arc. $gq = \frac{mkg}{aa}(q-f)$ ob $p=g$. Cum igitur ſit quoque $P = G$, erit $\frac{gF+fG}{gg-ff} = \frac{qG+gQ}{qq-gg}$, vnde abſciſſa q determinatur. Vel ſumta $k = \frac{gF-fG}{a^4-mffgg} = \frac{a^4(gg-ff)}{gF+fG}$, erit

$q = \frac{gK+kG}{a^4-mkkgg} = \frac{a^4(gg-kk)}{gK-kG}$. Hinc autem reperitur:

$$q = \frac{gg}{f} - \frac{a^4(gg-ff)^2(a^4-mg^4)}{f\cdot(2FGfg + a^4(a^4(ff+gg) - 2(m+1)aaffgg - mg^4(gg-3ff)))} \text{ vel}$$

$$q = \frac{2FGg(a^4-mg^4) - a^4f((a^4+mg^4)^2 - 2(m+1)aagg(a^4+mg^4) + 4ma^4g^4)}{a^4((a^4-mg^4)^2 - 4mffgg(aa-gg)(aa-mgg))} \text{ vel}$$

$$q = \frac{2FGg(a^4-mg^4) - a^4f(mg^4-2aagg+a^4)(mg^4-2maagg+a^4)}{a^4(a^4-mg^4)^2 - 4ma^4ffgg(aa-gg)(aa-mgg)}$$

Problema 3.

Propoſito ellipſis arcu quocunque fg, a dato puncto p abſcindere arcum pqr, qui a duplo illius arcus fg differat quantitate geometrice aſſignabili

Solutio.

Ex punctorum f et g abſciſſis $AF = f$; $AG = g$, earumque quantitatibus deriuatiuis F et G, quaeratur primum abſciſſa $AK = k = \frac{gF-fG}{a^4-mffgg} = \frac{a^4(gg-ff)}{gF+fG}$; vt habeatur

Arc. ak − Arc. $fg = \frac{mkfg}{aa}$.

Deinde

Deinde ad puncti p abſciſſam $AP = p$, quaeratur abſciſſa $AQ = q$, vt ſit $q = \frac{pK + kP}{a^4 - mkkpp} = \frac{a^4(pp - kk)}{pK - kP}$; denotantibus litteris maiusculis K et P ſemper eiusmodi functiones minuscularum k et p, vt ſi minuſcula fuerit x, valor maiusculae reſpondentis futurus ſit $X = aa \sqrt{(aa - xx)(aa - mxx)}$; eritque

$$\text{Arc. } ak - \text{Arc. } pq = \frac{mkpq}{aa}$$

vnde obtinemus:

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } pq = \frac{mk}{aa}(pq - fg)$$

Simili modo, ſi punctum q nunc tanquam datum ſpectetur, ex eoque quaeratur punctum r, vt ſit eius abſciſſa

$$AR = r = \frac{qK + kQ}{a^4 - mkkqq} = \frac{a^4(qq - kk)}{qK - kQ}$$

habebimus:

$$\text{Arc. } fg - \text{Arc. } qr = \frac{mk}{aa}(qr - fg)$$

Quare his formulis addendis eliciemus:

$$2 \text{ Arc } fg - \text{Arc. } pqr = \frac{mk}{aa}(pq + qr - 2fg)$$

ſicque a dato puncto p abſcidimus arcum pr, qui a duplo arcus fg diſcrepat quantitate algebraica. Q. E. I.

Coroll. 1.

Cum ſit $k = \frac{a^4(gg - ff)}{gF + fG}$, et $k = \frac{a^4(qq - pp)}{qP + pQ}$, ſimilique modo $k = \frac{a^4(rr - qq)}{rQ + qR}$; habebimus has aequationes:

$$\frac{gF + fG}{gg - ff} = \frac{qP + pQ}{qq - pp} = \frac{rQ + qR}{rr - qq}$$

vnde ex datis abſciſſis f, g et p, reliquae duae abſciſſae q et r definiuntur.

Coroll. 2.

Si arcus fg in ipſo vertice a incipiat, vt ſit $f=0$, erit $k=g$, vnde $q=\frac{pC+gP}{a^4-mggpp}=\frac{a^4(pp-gg)}{pG-gP}$ et $r=\frac{qG+gQ}{a^4-mggqq}=\frac{a^4(qq-gg)}{qG-gQ}$. Ac ſi praeterea punctum p in altero vertice A detur, vt ſit $p=a$, et $P=0$; erit $q=\frac{G}{a^3-magg}=\frac{a\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}{aa-mgg}$; hinc $aa-qq$ $=\frac{aagg(1-m)(aa-mgg)}{(aa-mgg)^2}=\frac{(1-m)aagg}{aa-mgg}$ et $aa-mqq=\frac{a^4(1-m)(aa-mgg)}{(aa-mgg)^2}$ $=\frac{(1-m)a^4}{aa-mgg}$, vnde $Q=\frac{-(1-m)a^5g}{aa-mgg}$ quia applicata in partem inferiorem cadere debet: eritque $r=\frac{a(a^4-2aagg+mg^4)}{a^4-2maagg+mg^4}$.

Coroll. 3.

Tab. I. Fig. 7. Hoc ergo caſu ſumto r in ſuperiore quadrante, vt poſita abſciſſa $AG=g$, ſit $AR=r=\frac{a(a^4-2aagg+mg^4)}{a^4-2maagg+mg^4}$ ſeu $BR=a-r=\frac{2(1-m)a^3gg}{a^4-2maagg+mg^4}$, erit 2 Arc. ag − Arc. Br = quant. algebr. $=\frac{mg}{aa}(aq+rq)=\frac{mgq}{aa}(a+r)$, ideoque 2 Arc. ag − Arc. $Br=\frac{2mg(aa-gg)\sqrt{(aa-gg)(aa-mgg)}}{a^4-2maagg+mg^4}$.

Coroll. 4.

Si puncta g et r in vnum debeant coaleſcere, vt ſit $r=g$, valor abſciſſae communis $AG=AR=g$, ex hac aequatione quinti gradus debet determinari

$$mg^5-mag^4-2maag^3+2a^3gg+a^4g-a^5=0$$

Ita ſi ſit $m=\frac{1}{2}$, et $a=1$, habebitur:

$$g^5-g^4-2g^3+4gg+2g-2=0$$

Si

Si eſſet $m = \frac{4}{34\sqrt{2}}$, prodiret $g = \frac{a}{\sqrt{2}}$; foretque

$$2\,\text{Arc.}\,ag - \text{Arc.}\,Bg = a\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}}.$$

Problema 4.

Propoſito arcu ellipſeos quocunque fg, inuenire arcum pqr, qui ſit praeciſe duplo maior. Tab. I. Fig. 6.

Solutio.

In ſolutione ergo praecedentis problematis efficiendum eſt, vt ſit $pq + qr - 2fg = 0$: eritque tum 2 Arc. $fg =$ Arc. pqr. Hic autem, ob arcum fg datum, in ellipſi, praeter ſemiaxes $AB = a$ et $Aa = a\sqrt{(1-m)}$, dantur abſciſſae $AF = f$ et $AG = g$, cum valoribus deriuatis F et G: vnde quaeratur $k = \frac{a^4(gg-ff)}{gF+fG}$; ſimulque erit eius valor deriuatus $K = \frac{a^4(ff+gg-kk)-mkkffgg}{2fg}$ (per coroll. 3. probl. 1). Simili autem modo abſciſſae p et q ab k pendent, vt ſit:

$$K = \frac{a^4(pp+qq-kk)-mkkppqq}{2pq}$$

itemque ex abſciſſis q et r erit:

$$K = \frac{a^4(qq+rr-kk)-mkkqqrr}{2qr}$$

At ex aequatione $pq + qr = 2fg$ eſt $q = \frac{2fg}{p+r}$; vnde obtinebimus has duas aequationes:

$$K = \frac{a^4(pp-kk)(p+r)^2+4a^4ffgg-4mffggkkpp}{4fgp(p+r)}$$

$$K = \frac{a^4(rr-kk)(p+r)^2+4a^4ffgg-4mffggkkrr}{4fgr(p+r)}$$

ex quibus ambae abſciſſae p et r, arcum quaeſitum pr determinantes, definiri poterunt. Hinc ergo primum elicimus, eliminando K, ac per $p-r$ diuidendo:

$$a^4pr(p+r)^2 + a^4kk(p+r)^2 - 4a^4ffgg - 4mffggkkpr = 0.$$

 Deinde

Deinde addendo illas aequationes habebimus:

$$2K = \frac{a^4pr(p+r)^3 - a^4kk(p+r)^3 + 4a^4ffgg(p+r) - 4mffggkkpr(p+r)}{4fgpr(p+r)}$$

Ex illa autem eſt:

$$a^4(p+r)^2 = \frac{4ffgg(a^4+mkkpr)}{pr+kk}$$

qui valor in hac ſubſtitutus praebet:

$$8Kfgpr = \frac{4ffgg(pr-kk)(a^4+mkkpr)}{pr+kk} + 4a^4ffgg - 4mffggkkpr$$

ſiue: $\frac{2Kpr(pr+kk)}{fg} = 2a^4pr + 2mk^4pr$; vnde elicitur

$$pr = \frac{(a^4-mk^4)fg - Kkk}{K} = \frac{ffgg(2a^4-mk^4) - a^4kk(ff+gg-kk)}{a^4(ff+gg-kk) - mffggkk}.$$

et $(p+r)^2 = \frac{4fg}{a^4}(K+mfgkk) = \frac{2a^4(ff+gg-kk)+2mffggkk}{a^4}$

Ergo: $p+r = \frac{\sqrt{2(a^4(ff+gg-kk)+mffggkk)}}{aa}$

Porro $r-p = \frac{\sqrt{2(a^8(gg-ff)^2 - a^8k^4 + 2ma^4ffggk^4 - mmf^4g^4k^4)}}{aa\sqrt{(a^4(ff+gg-kk)-mffggkk)}}$

ſeu $r-p = \frac{\sqrt{2(a^8(gg-ff)^2 - k^4(a^4-mffgg)^2)}}{aa\sqrt{(a^4(ff+gg-kk)-mffggkk)}}$

Cum autem ſit $a^4(gg-ff) = k(gF+fG)$; et $a^4-mffgg = \frac{gF-fG}{k}$, erit $r-p = \frac{2k}{aa}\sqrt{\frac{FG}{K}}$, vnde ob

$$r+p = \frac{\sqrt{2(a^4(ff+gg-kk)+mffggkk)}}{aa} = \frac{2}{aa}\sqrt{fg(K+mfgkk)}$$

vtraque abſciſſa p et r innoteſcit. Q. E. I.

Coroll. I.

Cum ſit $k = \frac{gF-fG}{a^4-mffgg}$, et

$$K = \frac{(a^4+mffgg)FG - a^4fg(2maa(ff+gg)-(m+1)(a^4+mffgg))}{(a^4-mffgg)^2}$$

erit

$$r+p = \frac{2}{aa}\sqrt{\frac{fgFG - ma^4ffgg(ff+gg) + (m+1)a^8ffgg}{a^4-mffgg}}$$

$$r-p = \frac{2(gF-fG)}{aa}\sqrt{\frac{FG}{(a^4+mffgg)(FG+(m+1)a^8fg) - 2ma^8fg(ff+gg)}}$$

Coroll.

Coroll. 2.

Si arcus datus fg in vertice a terminetur, vt ſit $f = o$ et $F = a^4$, prodit $p + r = o$, et $r - p = 2g$; vnde $p = -g$ et $r = g$: arcus ergo duplus vtrinque circa a aequaliter extenditur, vtrumque ſemiſſem arcui fg, ſeu ag ſimilem habens et aequalem. Idem euenit, ſi arcus datus in altero vertice B terminetur, vt ſit $g = a$ et $G = o$, tum enim fit $r - p = o$ et $r + p = 2f$, ideoque $r = p = f$.

Coroll. 3.

Quemadmodum his caſibus, vbi arcus propoſitus fg in altero vertice terminatur, eius arcus duplus per ſe eſt manifeſtus, ita, ſi arcus propoſitus in neutro vertice terminatur, aſſignatio arcus dupli maxime eſt difficilis; quippe qui arcus geometrice ne biſecari quidem poteſt.

Coroll. 4.

Hinc etiam patet, ſi detur viciſſim arcus pr, inueniri poſſe arcum fg, qui eius exacte futurus ſit ſemiſſis: ſed hoc non niſi moleſtiſſimis calculis praeſtari poterit. At ſi arcus duplus pqr quadranti elliptico ſit aequalis, ſeu $p = o$ et $r = a$, non difficulter arcus aſſignabitur, eius ſemiſſi aequalis. Primo enim erit $q = k$; et $k = aV\frac{1 - V(1 - m)}{m}$, ſicque innoteſcit tam k quam $K = a^4 V\frac{(1 - m)}{m}(1 - V(1 - m))$. Porro eſt $2fg = ak$ et $ff + gg = \frac{Kk}{a^2} + kk + \frac{mk^4}{4aa}$. At eſt $m = \frac{2aakk - a^4}{k^4}$; ideoque $ff + gg = \frac{2kk + 3aa}{4}$; vnde

$g + f$

$$g+f=\tfrac{1}{2}\sqrt{(2kk+3aa+4ak)} \text{ et}$$
$$g-f=\tfrac{1}{2}\sqrt{(2kk+3aa-4ak)} : \text{ ideoque}$$
$$f=\tfrac{1}{4}\sqrt{(3aa+4ak+2kk)}-\tfrac{1}{4}\sqrt{(3aa-4ak+2kk)}$$
$$g=\tfrac{1}{4}\sqrt{(3aa+4ak+2kk)}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(3aa-4ak+2kk)}$$

Coroll. 5.

Si ponatur alter ſemiaxis $Aa=b$, exiſtente altero $AB=a$, vt ſit $m=\frac{aa-bb}{aa}$, erit pro hoc caſu $k=a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, quo valore ſubſtituto habebitur

$$g\pm f=\tfrac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{5a+3b}{a+b}\pm 4\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)} ; \text{ vnde fit}$$
$$f=\tfrac{a}{2}\sqrt{\frac{5a+3b-\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}}{2(a+b)}}$$
$$g=\tfrac{a}{2}\sqrt{\frac{5a+3b+\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}}{2(a+b)}}$$

ſicque abſciſſae pro vtroque termino arcus fg reperiuntur, qui eſt ſemiſſis totius arcus quadrantis.

Coroll. 6.

Hoc ergo caſu erit

$$ff+gg=\frac{aa(5a+3b)}{4(a+b)}=aa+\frac{aa(a-b)}{4(a+b)}$$
$$\text{et } fg=\tfrac{aa}{2}\sqrt{\frac{a}{a+b}} \text{ et } 2fg=aa\sqrt{\frac{a}{a+b}}$$

ſi exempli gratia ſit $a=25$ et $b=119$, reperietur $f=\frac{25}{3\sqrt{2}}$ et $9=\frac{125}{4\sqrt{2}}$.

Scholion.

Hinc ergo ſolutionem nacti ſumus iſtius non inelegantis problematis;

Tab. I. Fig. 8. *Propoſito ellipſis quadrante* BAa *geometrice in eo abſcindere arcum* fg, *qui praeciſe aequalis ſit ſemiſſi totius arcus quadrantis* afgB.

Poſitis

Poſitis enim ſemiaxibus $AB = a$ et $Aa = b$; pro punctis quaeſitis f et g erunt abſciſſae:

$$AF = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{5a + 3b - \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)}}{2(a+b)}}$$

$$AG = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{5a + 3b + \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)}}{2(a+b)}}$$

vnde pro iisdem punctis eliciuntur applicatae:

$$Ff = \frac{b}{3}\sqrt{\frac{3a + 5b + \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)}}{2(a+b)}}$$

$$Gg = \frac{b}{3}\sqrt{\frac{3a + 5b - \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)}}{2(a+b)}}$$

Problema 5.

Datum ellipſeos arcum pr in duas partes ſecare pq et qr, ita vt differentia harum partium $pq - qr$ ſit geometrice aſſignabilis. Tab. I. Fig. 6.

Solutio.

Poſitis, vt in problemate praecedente, $AP = p$, $AQ = q$, et $AR = r$; exiſtentibus ſemiaxibus $AB = a$ et $Aa = a\sqrt{(1-m)}$; quaeratur a vertice a arcus ak, vt poſita eius abſciſſa $AK = k$, ſit

$$k = \frac{qP - pQ}{a^4 - mppqq} = \frac{a^4(qq - pp)}{qP + pQ}$$

eritque Arc. ak — Arc. $pq = \frac{mkpq}{aa}$

Tum vero ſit etiam

$$k = \frac{rQ - qR}{a^4 - mqqrr} = \frac{a^4(rr - qq)}{rQ + qR}$$

erit quoque Arc. ak — Arc. $qr = \frac{mkqr}{aa}$, ideoque

$$\text{Arc. } pq - \text{Arc. } qr = \frac{mkq}{aa}(r - p)$$

Cum igitur dentur abſciſſae p et r cum ſuis deriuatiuis P et R, abſciſſa puncti quaeſiti q ex hac aequatione definiri debebit:

$$\frac{qP+pQ}{qq-pp}=\frac{rQ+qR}{rr-qq}; \text{ ſeu}$$

$$Pq(rr-qq)-Rq(qq-pp)=Q(p+r)(qq-pr)$$

quae aequatio quadrata ac tum per $(qq-pp)(rr-qq)$ diuiſa dat:

$$a^4((p+r)^2-2qq)-2(m+1)aaprqq+mqq(qq(p+r)^2-2pprr)$$
$$=2qqPR:a^4 \text{ ſiue}$$

$$q^4=\frac{2qq(\frac{PR}{a^4}+mpprr+(m+1)aapr+a^4)-a^4(p+r)^2}{m(p+r)^2}$$

ex qua aequatione valor abſciſſae q definiri poterit. Q. E. I.

Coroll. 1.

Si totus quadrans in duas partes, quarum differentia ſit geometrica, diuidi debeat, poni debet $p=0$ et $r=a$; vnde fit $P=a^4$ et $R=0$: indeque

$$q^4=\frac{2aaqq-a^4}{m} \text{ et } qq=\frac{aa(1-\sqrt{(1-m)})}{m}, \text{ et } q=a\sqrt{\frac{(1-\sqrt{(1-m)})}{m}}$$

quae eſt eadem determinatio, quam ſupra iam in Coroll. Caſus I. Probl. 1. inuenimus.

Coroll. 2.

Si abſciſſarum p et r altera ſit negatiua, alterique aequalis, ſeu $p+r=0$, habebitur ſtatim

vel $q=0$, vel $Prr-Pqq-Rqq+Rpp=0$;

ſeu $qq=\frac{Prr+Rpp}{P+R}$, ideoque $P+R=0$. Manifeſtum autem eſt, ſi vtraque applicata Pp et Rr fuerit affirmatiua, fore $R=P$, atque tum locum habere $q=0$.

Pro-

Problema 6.

Si ellipſis ADBFA per diametrum quamcunque ECF fuerit biſecta, ſemicircumferentiam EBF ita ſecare in puncto M, vt partium EM et FM differentia ſit geometrice aſſignabilis. Tab. I. Fig. 9.

Solutio.

Etſi hoc problema in praecedente continetur, tamen ſolutio inde deduci nequit, propterea quod tam $p+r=0$, quam $P+R=0$; peculiari ergo modo ſolutio debet inueſtigari. Poſitis ergo ſemiaxibus $CA=a$; $CD=b=a\surd(1-m)$ ſit pro altero termino E arcus propoſiti abſciſſa $CP=p$; erit applicata $PE=\frac{b}{a}\surd(aa-pp)$: quae coordinatae negatiue ſumtae ad alterum terminum F pertinebunt, quae autem ſint r et $\frac{b}{a}\surd(aa-rr)$, ita vt ſit $r=-p$ et $\surd(aa-rr)=-\surd(aa-pp)$. Cum nunc ſumta quadam noua abſciſſa k, poſitaque quaeſita $CQ=q$, ſit ex Coroll. 2. Probl. II.

$$aa\surd(aa-kk)-pq\surd(aa-mkk)=a\surd(aa-pp)(aa-qq)$$
$$aa\surd(aa-kk)-qr\surd(aa-mkk)=a\surd(aa-qq)(aa-rr)$$

haec vltima aequatio ob $r=-p$ et $\surd(aa-rr)=-\surd(aa-pp)$ abit in hanc:

$$aa\surd(aa-kk)+pq\surd(aa-mkk)=-a\surd(aa-pp)(aa-qq)$$

quae ad primam addita dat:

$$2aa\surd(aa-kk)=0 \text{ ideoque } k=a:$$

qui valor in altera ſubſtitutus dat:

$$-pq\surd(1-m)=\surd(aa-pp)(aa-qq)$$

ideoque $\frac{-q}{\sqrt{(aa-qq)}} = \frac{\sqrt{(aa-pp)}}{p\sqrt{(1-m)}}$, conſequenter

$$q = -\frac{a\sqrt{(aa-pp)}}{\sqrt{(aa-mpp)}}$$

Vbi ſignum negatiuum indicat, q in parte abſciſſarum negatiua capi oportere. Ducatur ad E normalis in curvam EN, erit $\frac{PE}{EN} = \frac{\sqrt{(aa-pp)}}{\sqrt{(aa-mpp)}}$. Ergo $CQ = \frac{a.PE}{EN}$. Sit porro GH diameter coniugata, cui normalis EN in V occurrat, erit $\frac{PE}{EN} = \frac{CV}{CN} = \frac{CQ}{CI}$ producta CG ad concurſum cum applicata QM in I. Quare ob $CQ = \frac{a\,CQ}{CI}$ prodit $CI = a = CA$. Vnde haec ſequitur conſtructio facilis: Diameter coniugata GH vltra G in I continuetur, vt fiat $CI = CA$, ex I in axem AB demittatur perpendiculum IQ, quod ellipſin in puncto quaeſito M ſecabit. At ob $K = a$ erit Arc. EM-Arc. $FM = \frac{2mpq}{a} = \frac{2mp.PE}{EN} = \frac{2CN.CV}{CN} = 2CV$ ob $CN = mp$.

Corollarium I.

Si ex iisdem aequationibus binis, eliminando k, problema praecedens generaliter ſoluatur, ſequens obtinebitur aequatio:

$$mp^4(r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)})^2-2aaqq(aa+mpr)(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})+a^6(\sqrt{(aa-pp)}-\sqrt{(aa-rr)})^2=0$$

vnde per reſolutionem adipiſcimur;

$$qq = \frac{aa(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(aa+mpr\pm\sqrt{(aa-mpp)(aa-mrr)})}{m(r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)})^2}$$

$$q = \frac{a\left(\sqrt{\frac{(a+r)(a-p)}{2}}-\sqrt{\frac{(a-r)(a+p)}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{(a+p\sqrt{m})(a+r\sqrt{m})}{2m}}-\sqrt{\frac{(a-p\sqrt{m})(a-r\sqrt{m})}{2m}}\right)}{r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)}}$$

Coroll.

Coroll. 2.

Quanquam haec ſolutio re a ſolutione problematis praecedentis non diſcrepat, tamen ſtatim ſolutionem praeſentis ſuppeditat. Si enim ponamus $r = -p$ et $\sqrt{(aa-rr)} = -\sqrt{(aa-pp)}$, aequatio prima coroll. praec. tranſit in hanc formam.

$$-2aaqq(aa-mpp)\cdot 2aa + a^6(2\sqrt{(aa-pp)})^2 = 0$$

ſeu $qq = \frac{aa(2a-pp)}{aa-mpp}$.

Coroll. 3.

Si ex duabus primis aequationibus eliminemus q, obtinebimus:

$$q = \frac{aa(\sqrt{(aa-pp)}-\sqrt{(aa-rr)})\sqrt{(aa-kk)}}{(r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)})\sqrt{(aa-mkk)}} \text{ et}$$

$\sqrt{(aa-qq)} = \frac{a(r-p)\sqrt{(aa-kk)}}{r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)}}$; vnde fit

$$a^4(aa-kk)(\sqrt{aa-pp}-\sqrt{(aa-rr)})^2 + a^2(aa-kk)(aa-mkk)(r-p)^2$$
$$= aa(aa-mkk)(r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)})^2$$

ſiue:

$$mk^4(r-p)^2 = 2kk(aa-mpr)(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)}) - aa(aa-pr$$
$$-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})^2$$

vnde fit:

$$kk = \frac{(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(aa-mpr-\sqrt{(aa-mpp)(aa-mrr)})}{m(r-p)^2}$$

hincque colligitur:

$$k = \frac{\left(\sqrt{\frac{(a+r)(a-p)}{2}}-\sqrt{\frac{(a-r)(a+p)}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{(a+r\sqrt{m})(a-p\sqrt{m})}{2m}}-\sqrt{\frac{(a-r\sqrt{m})(a+p\sqrt{m})}{2m}}\right)}{r-p}$$

Coroll. 4.

Hinc erit:

$$kq = \frac{aa(aa-pr-\sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(\sqrt{(aa-mpp)}-\sqrt{(aa-mrr)})}{m(r-p)(r\sqrt{(aa-pp)}-p\sqrt{(aa-rr)})}$$

Quare cum arcuum pq et qr differentia ſit $= \frac{mkq}{aa}(r-p)$, habebimus generaliter:

$$\text{Arc.}\, pq - \text{Arc.}\, qr = \frac{(aa - pr - \sqrt{(aa-pp)(aa-rr)})(\sqrt{(aa-mpp)} - \sqrt{(aa-mrr)})}{r\sqrt{(aa-pp)} + p\sqrt{(aa-rr)}}$$

ſiquidem punctum q ex Coroll. 1. definiatur. Erit ergo

$$\text{Arc.}\, pq - \text{Arc.}\, qr = \frac{(\sqrt{(aa-pp)} - \sqrt{(aa-rr)})(\sqrt{(aa-mpp)} - \sqrt{(aa-mrr)})}{r+p} \text{ et}$$

$$q = \frac{\left(\sqrt{\frac{(a+r)(a+p)}{2}} - \sqrt{\frac{(a-r)(a-p)}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{(a+p\sqrt{m})(a+r\sqrt{m})}{2m}} - \sqrt{\frac{(a-p\sqrt{m})(a-r\sqrt{m})}{2m}}\right)}{p+r}$$

Problema. 7.

Tab. I. Fig. 6. Propoſito ellipſis arcu quocunque fg, a dato puncto p abſcindere arcum $pqrs$, qui ab illius arcus fg triplo, differat quantitate geometrice aſſignabili.

Solutio.

Sint, vt hactenus, punctorum datorum f, g et p abſciſſae $AF = f$, $AG = g$, $AP = p$, ac quaeratur primo arcus Ak, cuius abſciſſa ſit $AK = k = \frac{gF - fG}{a^4 - mffgg} = \frac{a^4(gg-ff)}{gF + fG}$ vt ſit $\text{Arc.}\, ak - \text{Arc.}\, fg = \frac{mkfg}{aa}$. Tum quaeratur punctum q, vt ſit $AQ = q = \frac{pK + kP}{a^4 - mkkpp} = \frac{a^4(pp-kk)}{pK - kP}$; indeque

$$Q = \frac{a^4(qq-pp) - kk(a^4 - mppqq)}{2kp} = \frac{pq(qq-pp)K - kq(qq-kk)P}{kp(pp-kk)}$$

eritque $\text{Arc.}\, fg - \text{Arc.}\, pq = \frac{mk}{aa}(pq - fg)$. Simili modo porro quaeratur punctum r, vt ſit:

$$AR = r = \frac{qK + kQ}{aa - mkkqq} = \frac{a^4(qq-kk)}{qK - kQ} \text{ et}$$

$$R = \frac{a^4(rr-qq) - kk(a^4 - mqqrr)}{2kq} = \frac{qr(rr-qq)K - kr(rr-kk)Q}{kq(qq-kk)}$$

et

et cum ſit Arc. $fg -$ Arc. $qr = \frac{mk}{aa}(qr - fg)$, erit

$$2\,\text{Arc.}\,fg - \text{Arc.}\,pqr = \frac{mk}{aa}(pq + qr - 2fg)$$

Hinc pari modo definiamus punctum s, vt ſit Abſciſſa $AS = s = \frac{rK + kR}{a^4 - mkkrr} = \frac{a^4(rr - kk)}{rK - kR}$ et

$$S = \frac{a^4(ss - rr) - kk(a^4 - mrrss)}{2kr} = \frac{rs(ss - rr)K - ks(ss - kk)R}{kr(rr - kk)}$$

et quia erit Arc. $fg -$ Arc. $rs = \frac{mk}{aa}(rs - fg)$, habebitur

$3\,\text{Arc.}\,fg - \text{Arc.}\,pqrs = \frac{mk}{aa}(pq + qr + rs - 3fg)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

Simili modo progrediendo, manifeſtum eſt, definiri a dato puncto p poſſe arcum pt, qui a quadruplo arcus dati fg deficiat quantitate algebraica: atque hoc modo operationem continuari poſſe quousque lubuerit.

Coroll. 2.

Si arcus datus fg toti quadranti aequetur, vt ſit $f = 0$ et $g = a$, ideoque $F = a^4$ et $G = 0$, erit $k = a$ et $K = 0$; Hinc reperitur $q = \frac{P}{a(aa - mpp)} = a\sqrt{\frac{aa - pp}{aa - mpp}}$; et $Q = \frac{-q(qq - aa)}{p(pp - aa)}P = \frac{-(aa - qq)PP}{ap(aa - mpp)(aa - pp)} = -\frac{a^3(aa - qq)}{p}$; at eſt $aa - qq = \frac{a(1 - m)pp}{aa - mpp}$ vnde $Q = \frac{-(1 - m)a^5 p}{aa - mpp}$. Porro $r = \frac{Q}{a(aa - mqq)} = -p$; et $R = -aa\sqrt{(aa - pp)(aa - mpp)} = -P$. Denique erit $s = \frac{-P}{a(aa - mpp)} = -a\sqrt{\frac{aa - pp}{aa - mpp}} = -q$ et $S = -Q = \frac{(1 - m)a^5 p}{aa - mpp}$: fietque $3\,\text{Arc.}\,fg - \text{Arc.}\,pqrs = \frac{m}{a}pq = mp\sqrt{\frac{a - pp}{aa - mpp}}$.

Coroll. 3.

Punctum p quoque ita definiri poterit, vt fiat:

$$pq + qr + rs = 3fg$$

quo caſu arcus $pqrs$ exacte aequabitur triplo arcus dati fg. Atque ita porro arcus inueniri poterit, qui ad arcum datum fg aliam quamuis rationem multiplicem teneat.

Scho-

Scholion.

Omnia haec problemata, quae hic pro ellipſi tractaui, ſimili modo pro hyperbola reſolui poterunt; ita etiam, dato quocunque hyperbolae arcu, a propoſito quouis eiusdem hyperbolae puncto arcus abſcindi poterit, qui diſcrepet, vel ab illo ipſo arcu, vel ab eius duplo, vel triplo, vel ab alio quouis multiplo quantitate geometrice aſſignabili. Deinde etiam hoc punctum ita aſſumere licebit, vt differentia plane in nihilum abeat, quo caſu dato quocunque hyperbolae arcu alius arcus aſſignari poterit, qui vel eius duplo, vel triplo, vel alii quouis multiplo exacte ſit aequalis. Vnde perſpicuum eſt, ſi propoſito arcu inuentus ſit alius arcus, qui ad illum teneat rationem μ ad 1, ſimilique modo alius quaeratur arcus, qui ad eundem teneat rationem $\nu : 1$; tum hoc pacto duos haberi arcus hyperbolicos, qui inter ſe teneant rationem μ ad ν, ſicque infinitis modis bini arcus exhiberi poterunt, qui ſint in ratione quacunque numeri ad numerum. Neque vero huiusmodi problemata tantum pro hyperbola reſolui poterunt, ſed omnino pro aliis curuis quibuscunque, quae ita ſint comparata, vt arcus abſciſſae, vel alii cuicunque lineae rectae variabili x reſpondens, contineatur in hac formula $\int \frac{d\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$, quae etiam per regulas initio datas ita latius extendi poteſt, vt ad hanc formam reuocetur:

$$\int \frac{dx\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4+\mathfrak{D}x^6+\mathfrak{E}x^8+\text{ etc.})}{\sqrt{(A+Cxx+Ex^4)}}$$

ſed in praeſentiarum neque hyperbolae, neque aliis huius generis curuis, diutius immorandum eſſe arbitror.

THEO-

THEOREMATA
CIRCA RESIDVA EX DIVISIONE POTESTATVM RELICTA.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema. I.

1.

Si p ſit numerus primus, et a primus ad p, nullus terminus huius progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3$; a^4, a^5, a^6, etc. per numerum p diuiſibilis exiſtit.

Demonſtratio.

Patet ex Euclidis Libro VII. Prop. 26. vbi demonſtratur, ſi ſint duo numeri a et b primi ad p, fore quoque productum ab primum ad p; ideoque cum a ſit primus ad p, erit poſito $b=a$; quadratum a^2 primus ad p; hincque porro a^3 poſito $b=a^2$; item a^4 poſito $b=a^3$; etc. Sic igitur nulla poteſtas ipſius a diuiſibilis erit per numerum primum p.

Coroll. 1.

2. Si igitur ſinguli termini progreſſionis geometricae

$1; a; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; a^7; a^8$; etc.

 per

per numerum primum p diuidantur, diuiſio nunquam ſine reſiduo ſuccedet, ſed ex ſingulis terminis orientur reſidua.

Scholion.

3. Reſidua haec, quae ex diuiſione ſingulorum terminorum progreſſionis propoſitae geometricae per numerum primum p emergunt, hic diligentius perpendere conſtitui. Ac primo quidem ſingula haec reſidua, vti ex natura diuiſionis apparet, minora erunt numero p; nullum autem reſiduum erit $= 0$, quia nullus terminus per p eſt diuiſibilis. Quodſi forte prodeant reſidua ipſo numero p maiora, ex arithmetica conſtat, quemadmodum ea ad minora reduci oporteat. Sic reſiduum $p + r$ aequiualet reſiduo r, et in genere reſiduum $np + r$ redit ad reſiduum r; ac ſi r ſit maius quam p, hoc reſiduum reuocatur ad $r - p$, vel $r - 2p$, vel $r - 3p$, etc. donec ad numerum ipſo p minorem perueniatur. Itaque omnia haec reſidua $r \pm np$ pro eodem reſiduo r reputantur. Proprie autem loquendo omnia reſidua ſunt numeri poſitiui ipſo diuiſore p minores. Verum tamen etiam ſaepenumero conuenit et reſidua negatiua contemplari: veluti ſi r ſit reſiduum ex diuiſione cuiuspiam numeri per p relictum, ita vt ſit $r < p$, reſiduum quoque erit $r - p$, numerus ſcilicet negatiuus; ita vt reſiduum poſitiuum r aequiualeat reſiduo negatiuo $r - p$. Hoc modo reſidua ita exhiberi poterunt, vt nunquam ſemiſſem diuiſoris p excedant: nam ſi reſiduum affirmatiuum r maius fuerit quam $\frac{1}{2}p$, eius loco capiatur reſiduum negatiuum $r - p$, quod minus erit, quam ſemiſſis ipſius p.

Coroll.

Coroll. 2.

4. Quoniam omnia reſidua ſunt numeri integri, iique minores quam p; ſequitur plura diuerſa reſidua oriri non poſſe quam $p-1$. Quare cum ſeries geometrica 1; a; a^2; a^3; a^4; a^5; etc. ex terminis numero infinitis conſtet, neceſſe eſt, vt plures termini eadem exhibeant reſidua.

Coroll. 3.

5. Sint a^μ et a^ν duo eiusmodi termini, qui idem praebeant reſiduum r; ita vt ſit $a^\mu = mp + r$ et $a^\nu = np + r$ erit $a^\mu - a^\nu = (m-n)p$, ideoque differentia horum terminorum $a^\mu - a^\nu$ per p erit diuiſibilis. Innumeris ergo modis differentia inter binos terminos progreſſionis geometricae propoſitae per numerum p erit diuiſibilis.

Coroll. 4.

6. Si poteſtas a^μ det reſiduum r, poteſtas vero a^ν reſiduum s, fueritque $r + s = p$, quo caſu dicimus reſiduorum r et s alterum alterius eſſe complementum, hoc caſu ſumma poteſtatum $a^\mu + a^\nu$ per numerum p erit diuiſibilis. Cum enim ſit $a^\mu = mp + r$ et $a^\nu = np + s$, erit $a^\mu + a^\nu = (m+n)p + r + s = (m+n+1)p$, ideoque factorem habet p.

Theorema 2.

7. Si poteſtas a^μ per p diuiſa praebeat reſiduum r, et poteſtas a^ν reſiduum s, poteſtas $a^{\mu+\nu}$ reſiduum praebebit rs.

Demonſtratio.

Sit enim $a^{\mu} = mp + r$ et $a^{\nu} = np + s$, erit $a^{\mu+\nu} = mnpp + mps + npr + rs$; ideoque ſi $a^{\mu+\nu}$ per p diuidatur, reſiduum erit rs; quod ſi maius fuerit quam p, ſubtrahendo p, quoties fieri poteſt, id ad reſiduum ipſo diuiſore p reducetur. Q. E. D.

Coroll. 1.

8. Cum ipſius radicis a per p diuiſae reſiduum exponi queat per a; (ſi enim ſit $a < p$, erit a reſiduum proprie ſic dictum, ſin autem $a > p$, nihilominus reſiduum per a exprimere licet, quia ſimul $a - p$, vel $a - np$ ſubintelligitur), ſi poteſtatis a^{μ} per p diuiſae reſiduum ſit r, poteſtatis $a^{\mu+1}$ reſiduum erit ar, ſimili modo poteſtatis $a^{\mu+2}$ reſiduum erit $a^2 r$

- - - - $a^{\mu+3}$ - - - $a^3 r$

etc.

Coroll. 2.

9. Hinc etiam ſequitur, ſi poteſtatis a^{μ} per p diuiſae reſiduum ſit $= r$, fore poteſtatis $a^{2\mu}$ reſiduum $= rr$, poteſtatis $a^{3\mu}$ reſiduum $= r^3$; etc. Ita ſi poteſtatis a^{μ} reſiduum ſit $= 1$, erit omnium harum poteſtatum $a^{2\mu}$; $a^{3\mu}$; $a^{4\mu}$; $a^{5\mu}$; etc. idem quoque reſiduum 1.

Coroll. 3.

10. Quodſi poteſtatis a^{μ} per p diuiſae reſiduum ſit $= p - 1$, quod, vt vidimus, per -1 exponi poteſt: tum poteſtatis $a^{2\mu}$ reſiduum erit $= +1$, poteſtatis $a^{3\mu}$ reſiduum

reſiduum $= -1$, at poteſtatis $a^{2\mu}$ iterum $= +1$. Atque in genere poteſtatis $a^{n\mu}$ reſiduum erit, vel $+1$, ſi n ſit numerus par, vel -1, ſi n ſit numerus impar.

Scholion.

11. Hinc colligitur modus, ſatis expedite reſidua inueniendi, quae ex diuiſione cuiuscunque poteſtatis per numerum quemcunque relinquuntur. Veluti ſi reſiduum inueſtigare velimus, quod ex diuiſione huius poteſtatis 7^{160} per numerum 641 oritur

poteſt.	reſidua
7^1	7
7^2	49
7^3	343
7^4	478
7^8	288
7^{16}	255
7^{32}	284
7^{64}	-110
7^{128}	-79
7^{160}	-1

nempe cum poteſtas prima 7 relinquat 7, poteſtas vero $7^2, 7^3, 7^4$ relinquant 49, 343 et 478, ſeu -163; huius quadratum 7^8 relinquet 163^2 ſeu 288, et quadratum huius 7^{16} relinquet 288^2 ſeu 255. Simili modo poteſtas 7^{32} relinquet 255^2 ſeu 284, et poteſtatis 7^{64} reſiduum erit -110, et ex 7^{128} oritur 110^2 ſeu -79, quod reſiduum per 284 multiplicatum, dabit reſiduum poteſtatis $7^{128+32} = 7^{160}$, quod erit 640 ſeu -1.

Nouimus ergo, ſi poteſtas 7^{160} per 641 diuidatur, reſiduum fore 640, ſeu -1, vnde concludimus poteſtatis 7^{320} reſiduum fore $+1$. Ergo in genere poteſtatis 7^{160n} per 641 diuiſae reſiduum erit, vel $+1$, ſi n ſit numerus par, vel -1, ſi n ſit numerus impar.

Theorema 3.

12. Si numerus a ſit primus ad p, formeturque haec progreſſio geometrica $1; a; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; a^7$; etc.

innumeri in ea occurrent termini, qui per p diuiſi relinquunt pro reſiduo 1, et exponentes horum terminorum progreſſionem arithmeticam conſtituent.

Demonſtratio.

Quia numerus terminorum eſt infinitus, plura autem diuerſa reſidua oriri nequeunt, quam $p-1$, neceſſe eſt vt plures, immo infiniti, termini idem producant reſiduum r. Sint a^μ et a^ν duo huiusmodi termini, idem reſiduum r relinquentes, eritque $a^\mu - a^\nu$ per p diuiſibile. At $a^\mu - a^\nu = a^\nu(a^{\mu-\nu}-1)$, et cum hoc productum ſit diuiſibile per p, alter autem factor a^ν ad p ſit primus, neceſſe eſt, alter factor $a^{\mu-\nu}-1$ per p ſit diuiſibilis; vnde poteſtas $a^{\mu-\nu}$ per p diuiſa reſiduum habebit $=1$. Sit $\mu-\nu=\lambda$, vt poteſtatis a^λ reſiduum ſit $=1$, eritque omnium quoque harum poteſtatum $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$, $a^{5\lambda}$ etc. idem reſiduum $=1$ Itaque vnitas erit reſiduum omnium harum poteſtatum:

$$1;\ a^\lambda,\ a^{2\lambda};\ a^{3\lambda};\ a^{4\lambda};\ a^{5\lambda};\ a^{6\lambda};\ \text{etc.}$$

quarum exponentes in progreſſione arithmetica progrediuntur.

Coroll. 1.

13. Inuenta ergo vnica poteſtate a^λ, quae per p diuiſa reſiduum praebet $=1$, infinitae inde aliae poteſtates exhiberi poſſunt, quae per p diuiſae quoque vnitatem relinquant. Ac infima quidem huius generis poteſtas eſt $a^0=1$.

Coroll.

Coroll. 2.

14. Etiamſi autem praeter vnitatem nulla conſtet poteſtas ipſius a, quae per p diuiſa vnitatem pro reſiduo relinquat, tamen nouimus infinitas huiusmodi re vera dari poteſtates.

Coroll. 3.

15. Ex demonſtratione porro patet, dari adeo poteſtatem a^{λ} reſiduum $=1$ praebentem, cuius exponens λ ſit minor quam p. Si enim progreſſio geometrica tantum vsque ad terminum a^{p-1} continuetur, quia terminorum numerus eſt $=p$; neceſſe eſt, vt ſaltem duo termini, qui ſint a^{μ} et a^{ν} idem habeant reſiduum; vnde cum poteſtas $a^{\mu-\nu}$ habitura ſit reſiduum $=1$, ob $\mu < p$ et $\nu < p$, certe erit $\mu-\nu < p$.

Theorema 4.

16. Si poteſtas a^{μ} per p diuiſa, reſiduum relinquat $=r$, et poteſtatis altioris $a^{\mu+\nu}$ reſiduum ſit $=rs$; erit poteſtatis a^{ν}, qua haec illam ſuperat, reſiduum $=s$.

Demonſtratio.

Praebeat enim poteſtas a^{ν} aliud reſiduum, puta $=t$, et cum poteſtatis a^{μ} reſiduum ſit $=r$, erit poteſtatis $a^{\mu+\nu}$ reſiduum $=rt$, quod ipſi rs aequiualere deberet. Foret ergo $rt=rs+np$, ſiquidem ponamus reſidua r, t, eſſe ipſo diuiſore p minora. Eſſet ergo $t=s+\frac{np}{r}$: at cum a et p ſint numeri inter ſe primi, omnia reſidua, quae ex poteſtatibus ipſius a per

per p diuiſis oriuntur, pariter erunt ad p prima, niſi forte ſint $=1$, ideoque vt $\frac{np}{r}$ fiat numerus integer, neceſſe eſt, vt $\frac{n}{r}$ ſit numerus integer, puta $=m$, foretque $t=s+mp$, ideoque $t=s$. Quare ſi poteſtatis a^{μ} reſiduum ſit $=r$, et poteſtatis $a^{\mu+\nu}$ reſiduum $=rs$, hinc ſequitur poteſtatis a^{ν} reſiduum fore $=s$.

Coroll. 1.

17. Si ergo $s=1$, ſeu ſi duae poteſtates a^{μ} et $a^{\mu+\nu}$ idem habeant reſiduum r, ſequitur, ſi maior per minorem diuidatur, quoto a^{ν} reſpondere reſiduum $=1$, quo ipſo demonſtratio praecedentis theorematis innititur.

Coroll. 2.

18. Si $r=1$ et $s=1$, ſeu ſi duae poteſtates a^{μ} et $a^{\mu+\nu}$ idem habeant reſiduum $=1$, tum etiam poteſtas a^{ν}, cuius exponens eſt differentia illorum exponentum, pariter reſiduum $=1$ habebit.

Scholion.

19. Demonſtratio huius theorematis etiam hoc modo confici poteſt. Cum a^{μ} per p diuiſum relinquat r, erit $a^{\mu}=mp+r$, ſimilique modo $a^{\mu+\nu}=np+rs$; hinc erit $a^{\mu+\nu}-a^{\mu}s=np-mps=(n-ms)p$; ideoque numerus $a^{\mu+\nu}-a^{\mu}s=a^{\mu}(a^{\nu}-s)$ erit per p diuiſibilis: at alter factor a^{μ} per p non eſt diuiſibilis. Ergo alter $a^{\nu}-s$ erit per p diuiſibilis, conſequenter poteſtas a^{ν} per p diuiſa reſiduum dabit $=s$.

Theo-

Theorema 5.

20. Si poſt vnitatem a^{λ} ſit minima poteſtas, quae per p diuiſa vnitatem relinquit, tum nullae aliae poteſtates idem reſiduum $=1$ relinquent, niſi quae in hac progreſſione geometrica occurrunt.

$$1;\ a^{\lambda},\ a^{2\lambda};\ a^{3\lambda};\ a^{4\lambda},\ a^{5\lambda};\ \text{etc.}$$

Demonſtratio.

Ponamus enim, aliam quampiam poteſtatem a^{μ}, ſi per p diuidatur, reſiduum quoque dare $=1$, et cum ſit $\mu > \lambda$, neque tamen multiplo cuipiam ipſius λ aequetur, hic exponens μ ita exhiberi poteſt, vt ſit $\mu = n\lambda + \delta$, vti ſit $\delta < \lambda$: neque erit $\delta = 0$. Cum igitur tam poteſtas $a^{n\lambda}$, quam $a^{\mu} = a^{n\lambda + \delta}$, per p diuiſa vnitatem relinquat, per §. 18, haec quoque poteſtas a^{δ} vnitatem pro reſiduo habebit, foretque ergo a^{λ} non minima poteſtas huius indolis contra hypotheſin. Quare ſi a^{λ} ſit minima poteſtas reſiduum $=1$ praebens, nullae aliae poteſtates eadem proprietate erunt praeditae, niſi quarum exponentes ſunt multipla ipſius λ.

Coroll. 1.

21. Si ergo progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3, a^4$, etc. iam ſecundus terminus a per p diuiſus relinquat 1, quod ſit, ſi $a = np + 1$, tum omnes termini idem praebebunt reſiduum $=1$: neque ergo in reſiduis vlli alii numeri praeter 1 occurrent.

Coroll. 2.

22. Si reſiduum tertii termini a^2 ſit $=1$, quod ſit, ſi $a^2 = np + 1$, tum alterni termini $1, a^2, a^4, a^6$, etc.

quorum exponentes ſunt pares, omnes reſiduum habebunt idem $= 1$, reliqui vero termini, niſi a^1 quoque reſiduum habeat $= 1$, omnes alia praebebunt reſidua.

Coroll. 3.

23. Fieri ergo poteſt, vt in reſiduis multo pauciores numeri occurrant, quam numerus $p - 1$ continet vnitates: plures autem, quam $p - 1$ diuerſi numeri occurrere non poſſunt.

Theorema 6.

24. Si poteſtas a^{2n}, cuius exponens eſt numerus par, per numerum primum p diuiſa, reſiduum $= 1$ relinquit, tum poteſtas a^n per eundem numerum p diuiſa, dabit reſiduum $= + 1$, vel $= - 1$.

Demonſtratio.

Ponamus enim r eſſe reſiduum, quod in diuiſione poteſtatis a^n per numerum primum p relinquitur, eritque poteſtatis a^{2n} reſiduum $= rr$, quod per hypotheſin $= 1$. Quare erit $rr = 1 + mp$, et $rr - 1 = mp$; vnde cum $rr - 1 = (r + 1)(r - 1)$ ſit diuiſibile per p, alterutrum factorem $r + 1$ vel $r - 1$ per p diuiſibilem eſſe oportet. Priori caſu erit $r + 1 = \alpha p$, et $r = \alpha p - 1$, hincque $r = - 1$. Poſteriori caſu erit $r - 1 = \alpha p$ et $r = \alpha p + 1$, hincque $r = + 1$. Ergo ſi poteſtas a^{2n} reſiduum praebeat $= + 1$, poteſtas a^n habebit vel reſiduum $= + 1$, vel $= - 1$, ſiquidem p ſit numerus primus.

Coroll. 1.

25. Si igitur a^{2n} fuerit minima poteſtas, quae per numerum primum p diuiſa reſiduum relinquit

$= + 1$,

$=+1$, tum poteſtas a^n reſiduum dabit $=-1$. Ergo ſi minimae poteſtatis a^λ reſiduum $=1$ praebentis exponens λ ſit numerus par, tum inter reſidua terminorum progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3, a^4$, etc. etiam occurret numerus -1.

Coroll. 2.

26. Sin autem minimae poteſtatis a^λ reſiduum 1 praebentis exponens λ ſit numerus impar, tum nulla omnino poteſtas reſiduum relinquet $=-1$. Si enim quaepiam poteſtas, vti a^μ, daret reſiduum $=-1$, tum poteſtas $a^{2\mu}$ daret reſiduum $=+1$, foretque idcirco $2\mu=n\lambda$, et quia λ eſt numerus impar, foret $2\mu=2m\lambda$, ideoque $\mu=m\lambda$. At poteſtas $a^{m\lambda}$ relinquit reſiduum $=+1$, neque ergo reſiduum -1 vsquam occurrere poteſt.

Theorema 7.

27. Si a^λ fuerit minima poteſtas ipſius a, quae per numerum p diuiſa, reſiduum praebet $=1$; tum omnia reſidua, quae ex terminis progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3 \ldots a^{\lambda-1}$, vsque ad illam poteſtatem a^λ continuatae, reſultant, erunt inter ſe inaequalia.

Demonſtratio.

Si enim duae poteſtates, veluti a^μ et a^ν, quarum exponentes μ et ν ſint minores, quam λ, idem darent reſiduum, tum earum differentia $a^\mu - a^\nu$ foret per p diuiſibilis, ideoque poteſtas $a^{\mu-\nu}$ per p diuiſa reſiduum relinqueret $=+1$, eſſetque idcirco $\mu-\nu<\lambda$, contra

 hypo-

hypotheſin; vnde patet, omnes poteſtates, quarum exponentes ſint minores, quam λ, diuerſa praebere reſidua.

Theorema. 8.

28. Si a^λ fuerit quaedam poteſtas ipſius a, quae per numerum p diuiſa reſiduum producat $=1$, atque progreſſio geometrica in membra diſcerpatur, ſecundum poteſtates a^λ, $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$ etc. hoc modo:

$$1, a, a^2 \ldots a^{\lambda-1} | a^\lambda \ldots a^{2\lambda-1} | a^{2\lambda} \ldots a^{3\lambda-1} | a^{3\lambda} \ldots a^{4\lambda-1} | \text{etc.}$$

ita vt quoduis membrum λ terminos contineat, tum in quolibet membro reſidua prodibunt eadem, atque eodem ordine recurrent.

Demonſtratio.

Omnium enim membrorum termini primi 1, a^λ, $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$ etc. idem praebent reſiduum $=1$ Termini deinde ſecundi omnium membrorum a, $a^{\lambda+1}$; $a^{2\lambda+1}$; $a^{3\lambda+1}$; etc. idem pariter dabunt reſiduum; ſit enim r reſiduum ex termino a^1 ortum, quia $a^{\lambda+1} = a^\lambda\, a^1$ erit reſiduum ex hoc termino ortum $= 1.\, r = r$; ſimilique modo patet, terminorum $a^{2\lambda+1}$, $a^{3\lambda+1}$ etc. reſidua fore $= r$. Ac ſi in genere ſit a^μ terminus quotuscunque primi membri, atque reſiduum ex eo ortum $= r$, erit quoque termini $a^{n\lambda+\mu}$ reſiduum $= r$, quia termini $a^{n\lambda}$ reſiduum eſt $= 1$: hincque omnium membrorum termini analogi $a^{\lambda+\mu}$; $a^{2\lambda+\mu}$; $a^{3\lambda+\mu}$ etc. idem habebunt reſiduum.

Coroll.

Coroll. 1.

29. Quodſi ergo tantum terminorum in primo membro contentorum reſidua fuerint cognita; tum omnium quoque terminorum, qui reliqua membra conſtituunt, reſidua erunt cognita.

Coroll. 2.

30. Si enim proponatur terminus a^x, cuius exponens x ſit numerus quantumuis magnus, eius reſiduum facile reperietur. Iſte enim exponens x ad hanc formam $n\lambda + \mu$ reduci poteſt, vt ſit $\mu < \lambda$, atque reſiduum termini a^x idem erit, quod termini a^μ.

Coroll. 3.

31. Hic autem numerus μ minor quam λ invenitur, ſi numerus x per λ diuidatur, tum enim reſiduum, quod in hac diuiſione remanet, erit hic ipſe numerus μ, qui quaeritur.

Coroll. 4.

32. Semper autem datur poteſtas a^λ, quae per p diuiſa vnitatem relinquit, cuius exponens λ minor ſit quam numerus propoſitus p, ſicque ad reſidua omnium terminorum progreſſionis geometricae inuenienda, non opus eſt operationem vltra terminum a^p continuare.

Coroll. 5.

32. Si autem poteſtas a^λ ſit minima earum, quae per numerum p diuiſae vnitatem relinquunt; tunc

quia ſinguli termini minores quam a^λ diuerſa praebent reſidua, in reſiduis omnibus, neque plures, neque pauciores diuerſi numeri occurrent quam λ. Igitur ſi λ ſit minus quam $p-1$, non omnes numeri in reſiduis occurrent: ſed quidam numeri plane nunquam in diviſione terminorum progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3$ etc. remanere poterunt.

Coroll. 6.

34. Si igitur diuerſitas reſiduorum ſpectetur, fieri poteſt, vt ex omnibus poteſtatibus ipſius a vnicum tantum reſiduum, vel duo tantum reſidua diuerſa, vel tria etc. prodeant, plura tamen nunquam quam $p-1$ locum habere poſſunt. Quotquot autem prodierint reſidua, inter ea ſemper vnitas reperitur.

Theorema 9.

35. Si p ſit numerus primus, et a primus ad p, atque omnes numeri ipſo p minores reperiantur inter reſidua, quae ex diuiſione omnium poteſtatum ipſius a per numerum primum p oriuntur, tum a^{p-1} erit minima poteſtas, quae per p diuiſa vnitatem relinquit.

Demonſtratio.

Sit a^λ minima poteſtas, quae per p diuiſa relinquat vnitatem, atque ex praecedentibus patet, eſſe $\lambda < p$ (15). Iam cum numerus omnium reſiduorum diuerſorum ſit $=\lambda$, et omnium numerorum ipſo p minorum $=p-1$, patet, ſi eſſet $\lambda < p-1$, non omnes nume-

numeros minores quam p in reſiduis occurrere; non igitur erit $\lambda < p-1$, neque vero eſt $\lambda > p-1$, quia alioquin non foret $\lambda < p$. Vnde relinquitur eſſe $\lambda = p-1$. Quocirca ſi omnes numeri ipſo p minores in reſiduis occurrant, poteſtas a^{p-1} erit minima, quae per p diviſa vnitatem relinquit.

Scholion.

36. Natura huius theorematis poſtulat, vt p ſit numerus primus; niſi enim eſſet talis, fieri non poſſet, vt omnes numeri ipſo p minores in reſiduis occurrerent. Quod quo clarius perſpiciatur, perpendendum eſt, ſi p eſt numerus compoſitus, ad quem tamen a ſit primus, nullam partem aliquotam ipſius p in reſiduis locum habere: nam ſi poteſtas quaepiam a^{μ} daret reſiduum r, quod eſſet pars aliquota ipſius p, ob $a^{\mu} = mp + r$, etiam ipſa poteſtas a^{μ} diuiſorem haberet r, ideoque nec ea, neque radix a eſſet numerus ad p primus, quod hypotheſi aduerſatur.

Theorema 10.

37. Si numerus diuerſorum reſiduorum, quae ex diuiſione poteſtatum $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5$, etc. per numerum primum p naſcuntur, minor ſit quam $p-1$, tum ad minimum totidem erunt numeri, qui non ſunt reſidua, quot ſunt reſidua.

Demonſtratio.

Sit a^{λ} poteſtas minima, quae per p diuiſa vnitatem relinquat, ac ſit $\lambda < p-1$, erit numerus omnium reſi-

reſiduorum diuerſorum $=\lambda$, ideoque minor quam $p-1$. Cum ergo numerus omnium numerorum ipſo p minorum, ſit $=p-1$, patet dari numeros in caſu propoſito, qui in reſiduis non locum obtineant. Dico autem huiusmodi numerorum numerum ad minimum eſſe $=\lambda$. Quod vt oſtendatur, exponamus reſidua per ipſos terminos, ex quibus oriuntur, eruntque

haec reſidua $1, a, a^2, a^3, a^4 \ldots\ldots a^{\lambda-1}$

quorum numerus $=\lambda$, atque haec reſidua, ſi ad formam conſuetam reducantur, omnia erunt minora quam p et inter ſe diuerſa. Cum igitur ſit $\lambda < p-1$ per hypotheſin, dabitur certe numerus, qui in his reſiduis non reperitur. Sit talis numerus k; iam dico ſi k non ſit reſiduum, neque ak, neque a^2k, neque a^3k, etc. neque $a^{\lambda-1}k$ in reſiduis occurrere. Fac enim $a^\mu k$ eſſe reſiduum ex poteſtate a^α oriundum, foret $a^\alpha = np + a^\mu k$, ſeu $a^\alpha - a^\mu k = np$, ideoque $a^\alpha - a^\mu k = a^\mu (a^{\alpha-\mu} - k)$ per p diuiſibile. At a^μ per p non eſt diuiſibile, eſſet ergo $a^{\alpha-\mu} - k$ per p diuiſibile, ſeu poteſtas $a^{\alpha-\mu}$ per p diuiſa, reſiduum relinqueret k, quod hypotheſi repugnat. Ex quo patet, omnes hos numeros: $k, ak; a^2k; a^3k$, etc. $\ldots\ldots a^{\lambda-1}k$, ſeu numeros inde deriuatos, non eſſe reſidua. At hi numeri, quorum multitudo $=\lambda$. omnes ſunt diuerſi inter ſe; ſi enim duo, veluti $a^\mu k$ et $a^\nu k$, conuenirent, ad idemque reſiduum r reducerentur, foret $a^\mu k = mp + r$ et $a^\nu k = np + r$, ideoque $a^\mu k - a^\nu k = (m-n)p$, ſeu $(a^\mu - a^\nu)k = (m-n)p$ eſſet per p diuiſibile. Neque vero k per p eſt diuiſibile, ſiquidem ponimus p numerum primum et $k < p$; eſſet $a^\mu - a^\nu$ per p diuiſibilis, ſeu $a^{\mu-\nu}$ per p diuiſum, vnitatem relinqueret, cum tamen

ob

ob $\mu < \lambda - 1$ et $\nu < \lambda - 1$, eſſet $\mu - \nu < \lambda$, quod eſſet abſurdum. Ergo omnes illi numeri k, ak, a^2k, a^3k .... $a^{\lambda-1}k$, ſi reducantur, erunt inter ſe diuerſi, eorumque multitudo eſt $= \lambda$. Ad minimum ergo dantur λ numeri, qui in reſiduis locum non inueniunt, ſiquidem ſit $\lambda < p - 1$.

Coroll. 1.

38. Cum igitur habeantur λ diuerſi numeri, qui ſunt reſidua, totidemque diuerſi numeri, qui non ſunt reſidua, omnesque ſint minores quam p, illorum iunctim ſumtorum numerus 2λ maior eſſe nequit, quam $p - 1$: quia non plures dantur numeri ipſo p minores, quam $p - 1$.

Coroll. 2.

39. Si ergo a^λ ſit minima poteſtas, quae per numerum primum p diuiſa relinquit vnitatem, fueritque $\lambda < p - 1$, tum certum eſt, non eſſe $\lambda > \frac{p-1}{2}$: erit ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{2}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{2}$.

Coroll. 3.

40. Ante vidimus exponentem iſtius poteſtatis minimae λ eſſe neceſſario minorem quam p; Erit ergo vel $\lambda = p - 1$, vel $\lambda < p - 1$; hocque caſu ſi $\lambda < p - 1$, ſimul nouimus, iam eſſe vel $\lambda = \frac{p-1}{2}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{2}$. Atque adeo intra limites $p - 1$ et $\frac{p-1}{2}$ nullus continetur numerus, qui vnquam eſſe poſſit valor ipſius λ.

Theorema 2.

41 Si p ſit numerus primus, atque a^{λ} minima poteſtas ipſius a, quae per p diuiſa vnitatem relinquit, fueritque $\lambda < \frac{p-1}{2}$; tum fieri nequit, vt iſte exponens λ ſit maior quam $\frac{p-1}{2}$: eritque ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{2}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{2}$.

Demonſtratio.

Cum a^{λ} ſit minima poteſtas, quae per numerum primum p diuiſa, vnitatem relinquit, plures in reſiduis non occurrunt numeri diuerſi, quam λ, qui relinquuntur ex his terminis

$$1;\ a;\ a^2;\ a^3;\ a^4;\ \ldots\ldots\ a^{\lambda-1}$$

ſi ſinguli per p diuidantur; quare cum ſit $\lambda < p-1$ habebuntur $p-1-\lambda$ numeri, qui non ſunt reſidua, quorum ſi vnus aliquis ſit $= r$, vidimus hos omnes numeros

$$r;\ ar;\ a^2r;\ a^3r;\ a^4r\ \ldots\ldots\ a^{\lambda-1}r$$

ſiquidem diuidendo per p ad numeros ipſo p minores reducantur, in reſiduis non contineri. Hinc autem tantum λ numeri ex reſiduis excluduntur; quare cum ſit $\lambda < \frac{p-1}{2}$, erit $\lambda < p-1-\lambda$, ideoque praeter hos numeros alii inſuper dantur, qui in reſiduis non continentur. Sit s huiusmodi numerus, qui neque ſit reſiduum, neque in praecedente ſerie non-reſiduorum contineatur; atque etiam hi omnes numeri

$$s;\ as;\ a^2s;\ a^3s;\ a^4s;\ \ldots\ldots\ a^{\lambda-1}s$$

non erunt reſidua: hique numeri, vti in praecedente demonſtratione oſtendimus, omnes inter ſe erunt diverſi.

verſi. Neque vero vllus etiam horum numerorum, veluti $a^\mu s$, iam in praecedente ſerie non-reſiduorum continetur, ſeu non eſt $a^\mu s = a^\nu s$. Nam ſi eſſet $a^\nu r = a^\mu s$, foret $s = a^{\nu-\mu} r$, vel $s = a^{\lambda+\nu-\mu} r$, ſiquidem eſſet $\mu > \nu$, vnde s iam in priori ſerie contineretur contra hypotheſin. Quocirca ſi $\lambda < \frac{p-1}{2}$, dantur ad minimum adhuc λ numeri, qui non ſunt reſidua, ſicque cum λ habeamus reſidua, et 2λ non-reſidua, hique numeri omnes ſint ipſo p minores, fieri nequit, vt ſit eorum ſumma 3λ maior quam $p-1$, ſeu non erit $\lambda > \frac{p-1}{3}$. Erit ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{3}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{3}$; ſiquidem ſit $\lambda < \frac{p-1}{2}$: et p numerus primus.

Coroll. 1.

42. Si ergo non ſit $\lambda < \frac{p-1}{3}$, tum certe erit $\lambda = \frac{p-1}{3}$, ſiquidem ſit $\lambda < \frac{p-1}{2}$. At remota hac conditione, ſi nouerimus, non eſſe $\lambda < \frac{p-1}{3}$, tum neceſſario ſequitur, eſſe vel $\lambda = \frac{p-1}{3}$, vel $\lambda = \frac{p-1}{2}$, vel $\lambda = p-1$.

Coroll. 2.

43. Siue autem ſit $\lambda = \frac{p-1}{3}$, ſiue $\lambda = \frac{p-1}{2}$, poteſtas a^{p-1} per p diuiſa, relinquit vnitatem. Si enim a^λ vnitatem relinquat, etiam $a^{2\lambda}$ et $a^{3\lambda}$ vnitatem pro reſiduo dabunt.

Theorema 12.

44. Si a^λ ſit minima poteſtas ipſius a, quae per numerum primum p diuiſa vnitatem relinquit, fueritque

 $\lambda > \frac{p-1}{3}$,

$\lambda < \frac{p-1}{4}$, tum certe non erit $a > \frac{p-1}{4}$, eritque ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{4}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{4}$.

Demonſtratio.

Quia numerus omnium reſiduorum diuerſorum, quae ex diuiſione omnium poteſtatum ipſius a per numerum primum p proueniunt, eſt $=\lambda$, atque ex his terminis naſcuntur: 1; a; a^2; a^3; a^4 . . . . $a^{\lambda-1}$: ob $\lambda < \frac{p-1}{2}$ habebuntur ſtatim bis tot numeri, qui non ſint reſidua, qui ex his duabus progreſſionibus oriuntur

$$r;\ ar;\ a^2r;\ a^3r;\ a^4r\ \ldots\ldots\ a^{\lambda-1}r$$
et
$$s;\ as;\ a^2s;\ a^3s;\ a^4s\ \ldots\ldots\ a^{\lambda-1}s$$

horum numerorum, tam reſiduorum, quam non-reſiduorum numerus, eſt $=3\lambda$, ideoque minor quam $p-1$, ſupererunt ergo adhuc numeri, qui non erunt reſidua. Sit t talis numerus, atque vt ante oſtendimus, etiam hi omnes numeri

$$t;\ at;\ a^2t;\ a^3t;\ a^4t\ \ldots\ldots\ a^{\lambda-1}t$$

non erunt reſidua, quorum numerus eſt $=\lambda$. At hi numeri non ſolum inter ſe erunt diuerſi, cum p ſit numerus primus, ſed etiam a praecedentibus diſcrepant, ſicque omnium horum numerorum, ſiue reſiduorum, ſiue non-reſiduorum multitudo eſt $=4\lambda$, et cum ſinguli hi numeri ſint minores quam p; impoſſibile eſt, vt ſit $4\lambda > p-1$; eritque ergo vel $\lambda = \frac{p-1}{4}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{4}$: ſiquidem ſit, vt aſſumſimus, $\lambda < \frac{p-1}{2}$ et p numerus primus.

Coroll.

Coroll. 1.

45. Simili modo demonſtrabitur, ſi ſit $\lambda < \frac{p-1}{4}$, tum impoſſibile eſſe, vt ſit $\lambda > \frac{p-1}{5}$, foreque idcirco vel $\lambda = \frac{p-1}{5}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{5}$.

Coroll. 2.

46. In genere etiam ſi conſtet eſſe $\lambda < \frac{p-1}{n}$, eodem modo demonſtrabitur, fieri non poſſe, vt eſſet $\lambda > \frac{p-1}{n+1}$, eritque propterea vel $\lambda = \frac{p-1}{n+1}$, vel $\lambda < \frac{p-1}{n+1}$.

Coroll. 3.

47. Hinc patet omnium numerorum, qui reſidua eſſe nequeant, numerum eſſe vel $= 0$, vel $= \lambda$, vel $= 2\lambda$, vel alii cuicunque multiplo ipſius λ: ſi enim plures fuerint iſtiusmodi numeri quam $n\lambda$, tum ob vnicum ſtatim λ noui inſuper accedunt, vt eorum omnium numerus fiat $= (n+1)\lambda$; at ſi hic nondum omnes numeri non-reſidua contineantur, denuo ſubito λ noui accedent.

Theorema 13.

48. Si p ſit numerus primus, et a^λ minima poteſtas ipſius a, quae per p diuiſa vnitatem relinquit, erit exponens λ diuiſor numeri $p-1$.

Demonſtratio.

Numerus ergo omnium reſiduorum diuerſorum eſt $= \lambda$, vnde numerus reliquorum numerorum ipſo p

minorum, qui reſidua eſſe nequeunt, erit $= p - 1 - \lambda$, at hic numerus (47) eſt multiplum ipſius λ, puta $n\lambda$, ita vt ſit $p - 1 - \lambda = n\lambda$, vnde ſit $\lambda = \frac{p-1}{n+1}$. Perſpicuum ergo eſt, exponentem λ eſſe diuiſorem numeri $p - 1$, vnde ſi non ſit $\lambda = p - 1$, certe parti cuidam aliquotae numeri $p - 1$ exponens λ aequalis erit.

Theorema 14.

49. Si p ſit numerus primus, et a primus ad p, tum poteſtas a^{p-1} per p diuiſa vnitatem relinquet.

Demonſtratio.

Sit a^{λ} minima poteſtas ipſius a, quae per p diuiſa vnitatem relinquit, erit, vt vidimus, $\lambda < p$, atque inſuper demonſtrauimus, eſſe vel $\lambda = p - 1$, vel λ eſſe partem aliquotam numeri $p - 1$. Priori caſu conſtat propoſitum, atque poteſtas a^{p-1} per p diuiſa vnitatem relinquet. Poſteriori caſu, quo λ eſt pars aliquota numeri $p - 1$, erit $p - 1 = n\lambda$, at cum poteſtas a^{λ} per p diuiſa vnitatem relinquat, etiam omnes hae poteſtates $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$ etc. ideoque et $a^{n\lambda}$, ſeu a^{p-1}, per p diuiſae vnitatem relinquent. Semper ergo poteſtas a^{p-1} per p diuiſa vnitatem relinquit.

Coroll. 1.

50. Quia poteſtas a^{p-1} per numerum primum p diuiſa vnitatem relinquit, formula $a^{p-1} - 1$ per numerum primum p erit diuiſibilis, ſiquidem a ſit numerus ad p primus, ſeu ſi a non ſit diuiſibilis per p.

Coroll.

Coroll. 2.

51. Si ergo p ſit numerus primus, omnes poteſtates exponentis $p-1$, veluti n^{p-1} per p diuiſae, vel vnitatem relinquent, vel nihil. Illud ſcilicet eueniet, ſi n ſit numerus ad p primus, hoc vero ſi ipſe numerus n per p fuerit diuiſibilis.

Coroll. 3.

52. Si p ſit numerus primus, atque numeri a et b primi ad p, erit differentia poteſtatum $a^{p-1}-b^{p-1}$ per numerum p diuiſibilis. Cum enim tam $a^{p-1}-1$, quam $b^{p-1}-1$, per p ſit diuiſibilis, etiam differentia harum formularum, id eſt $a^{p-1}-b^{p-1}$, per p erit diuiſibilis.

Scholion.

53. En ergo nouam demonſtrationem theorematis eximii, a Fermatio quondam prolati, quae maxime diſcrepat ab ea, quam in Comment. Acad. Petropol. Tomo VIII. dedi. Ibi enim euolutionem binomii $(a+b)^n$ in ſeriem modo *Newtoniano* in ſubſidium vocaui, quae conſideratio a propoſito non mediocriter abhorrere videtur; hic vero idem theorema ex ſolis poteſtatum proprietatibus demonſtraui, vnde haec demonſtratio magis naturalis videtur, cum praeterea nobis alias inſignes proprietates circa reſidua poteſtatum, quando per numeros primos diuiduntur, manifeſtet. Patet etiam, ſi p ſit numerus primus, non ſolum formulam $a^{p-1}-1$ per p eſſe diuiſibilem, ſed etiam interdum fieri poſſe, vt etiam forma ſimplicior $a^{\lambda}-1$ per

per p ſit diuiſibilis, tumque exponentem λ eſſe partem aliquotam exponentis $p-1$.

Theorema 15.

54. Si q ſit numerus primus, atque poteſtas a^q per numerum primum p diuiſa vnitatem relinquat, tum a^q erit minima poteſtas ipſius a, quae per p diuiſa vnitatem relinquit, niſi forte ipſe numerus a per p diviſus vnitatem relinquat.

Demonſtratio.

Sit enim a^λ minima poteſtas ipſius a, quae per numerum primum p diuiſa vnitatem relinquat, atque nullae aliae poteſtates hac proprietate erunt praeditae, niſi $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$, etc. Verum nulli harum poteſtas a^q poteſt eſſe aequalis, niſi ſit $\lambda=1$, cum q ſit numerus primus, ideoque neceſſe eſt, vt ſit $q=\lambda$, ideoque a^q minima poteſtas, quae per p diuiſa vnitatem relinquit. Excipitur autem caſus, quo $\lambda=1$, ſeu quo ipſe numerus a per p diuiſus vnitatem relinquit: hoc enim caſu omnis poteſtas a^n, ſiue eius exponens n ſit numerus primus, ſiue compoſitus, in diuiſione per p facienda vnitatem relinquet.

Coroll. 1.

55. Si ergo poteſtas a^q, cuius exponens eſt numerus primus, per numerum primum p diuiſa vnitatem relinquat, tum q erit pars aliquota numeri $p-1$, hocque caſu formula a^q-1 per numerum primum p erit diuiſibilis.

Coroll.

Coroll. 2.

56. Cum q ſit pars aliquota numeri $p-1$, erit $p-1=nq$, et $p=nq+1$. Quodſi ergo formula a^q-1, in qua q eſt numerus primus, diuiſibilis ſit per quempiam numerum primum p, habebit hic diuiſor ſemper huiusmodi formam $p=nq+1$, niſi ſit $p=a-1$: nam $a-1$ ſemper eſt diuiſor formulae a^q-1.

Coroll. 3.

57. Formula ergo a^q-1, exiſtente q numero primo, praeter diuiſorem $a-1$ alios diuiſores primos non admittit, niſi qui in hac forma $nq+1$ contineantur; et cum q ſit numerus primus, ideoque impar, niſi ſit $q=2$, pro n nonniſi numeri pares capi poſſunt, eruntque ergo omnes diuiſores, ſi quos habet, in forma $2nq+1$ contenti.

Coroll. 4.

58. Quia igitur formulae a^q-1 diuiſor eſt

$$a^{q-1}+a^{q-2}+a^{q-3}+a^{q-4}+\ldots\ldots+a^2+a+1$$

haec forma in $2nq+1$ continebitur, eritque ergo haec expreſſio: $a^{q-1}+a^{q-2}+a^{q-3}+\ldots+a^2+a$ per numerum primum q diuiſibilis, quicunque numerus ſit a, at ſi $a=q$, vel $a=mq$, hoc eſt manifeſtum per ſe.

Scholion 1

59. Hoc etiam manifeſtum eſt, ſi a non ſit vel q vel mq; tum enim formula inuenta abit in

$$a(a^{q-2}+a^{q-3}+a^{q-4}\ldots+a+1)$$

cuius factor poſterior, qui tranſit in $\frac{a^{q-1}-1}{a-1}$, per q eſt diuiſibilis: quod quidem per ſe eſt euidens; nam cum q ſit numerus primus, per eum formula $a^{q-1}-1$ eſt diuiſibilis; eademque etiam per $a-1$ diuiſa, manebit per q diuiſibilis, niſi $a-1$ diuiſorem habeat q, qui caſus iam ante eſt exceptus. Notandum enim eſt, formam $a^{q-1}+a^{q-2}+a^{q-3} \ldots\ldots + a^2+a+1$ eatenus tantum in forma $2nq+1$ contineri, quatenus illa eſt vel numerus primus, vel ex numeris primis eiusdem formae $2nq+1$ compoſitus. At ſi illa formula ipſa iam habeat factorem $a-1$, per quem forma a^q-1 eſt diuiſibilis, tum ea cum forma $2nq+1$ non conueniet. Sed ſi $a-1=mq$, vel $a=mq+1$, tum ipſa illa formula per q erit diuiſibilis, quia terminorum numerus $=q$, neque ergo illa in forma $2nq+1$ continebitur.

Scholion 2.

60. Plurimum autem intereſt, noſſe diuiſores formulae a^q-1, quando q eſt numerus primus, quoniam ii alias, excepto diuiſore $a-1$, qui ſponte ſe prodit, difficillime inueſtigantur, fierique adeo poteſt, vt ſaepe huiusmodi formula, poſtquam eſt per $a-1$ diuiſa, fiat numerus primus. At ſi q non eſt numerus primus, ſed ipſe diuiſores habeat m, n, tum manifeſto erunt hae formulae a^m-1 et a^n-1 diuiſores formulae a^q-1. His ergo caſibus inueſtigatio vlteriorum diuiſorum reducitur ad formulas a^m-1 et a^n-1, in quibus exponentes m et n ſunt numeri primi. Nouimus igitur, ſi quis tentando

tando voluerit, diuiſores formulae a^q-1 inueſtigare, tentamen cum nullis aliis numeris primis, niſi qui in forma $2nq+1$ contineantur, inſtituendum eſſe, quo ipſo operatio alias difficillima, non mediocriter contrahitur.

Theorema 16.

61. Si poteſtas a^m, per numerum p diuiſa, reſiduum relinquat $=r$, tum etiam poteſtas $(a\pm\alpha p)^m$, per p diuiſa, idem relinquet reſiduum r.

Demonſtratio.

Si poteſtas $(a\pm\alpha p)^m$ euoluatur, prodibit

$$a^m\pm m\alpha a^{m-1}p+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\alpha^2a^{m-2}p^2\pm \text{ etc.}$$

cuius omnes termini, praeter primum, per p ſunt diuiſibiles: vnde haec quantitas per p diuiſa idem relinquet reſiduum, ac ſi ſolus primus terminus a^m per p diuideretur. Ergo cum poteſtas a^m reſiduum relinquat $=r$, etiam poteſtas $(a\pm\alpha p)^m$ reſiduum relinquet $=r$.

Coroll. 1.

62. Si m ſit numerus par, demonſtratio etiam valet pro formula $(-a+\alpha p)^m$, hoc ergo caſu etiam formula $(\alpha p-a)^m$, per p diuiſa, idem relinquit reſiduum r, quod formula a^m relinquit.

Coroll. 2.

63. At ſi m ſit numerus impar, quia formula $-a^m$ per p diuiſa reſiduum relinquit $=-r$, etiam formula $(\alpha p-a)^m$ reſiduum relinquet $=-r$.

Theorema 17.

64. Si fuerit $a = c^n \pm \alpha p$, tum formula $a^{\frac{p-1}{n}}$, per numerum primum p diuiſa, vnitatem relinquet, ſiquidem ſit n diuiſor numeri $p-1$.

Demonſtratio.

Cum ſit $a = c^n + \alpha p$, poteſtas $a^{\frac{p-1}{n}}$, ſeu $(c^n \pm \alpha p)^{\frac{p-1}{n}}$ per p diuiſa, idem relinquit reſiduum, ac poteſtas $c^{n \cdot \frac{p-1}{n}}$ ſeu c^{p-1}, at ob p numerum primum, poteſtas c^{p-1} per p diuiſa vnitatem relinquit, ergo etiam poteſtas $a^{\frac{p-1}{n}}$ vnitatem relinquet, ſiquidem ſit $a = c^n \pm \alpha p$, neque tamen a vel c diuiſibile fuerit per p.

Coroll. 1.

65. Ex hoc ergo theoremate cognoſcuntur caſus, quibus poteſtates numerorum, quarum exponentes ſunt minores quam $p-1$, ſi per numerum primum p diuidantur, vnitatem relinquunt.

Coroll. 2.

66. Si ergo ſit $a = cc \pm \alpha p$, exiſtente p numero primo, tum poteſtas $a^{\frac{p-1}{2}}$ per p diuiſa vnitatem relinquet, ſeu formula $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ per p erit diuiſibilis. Cum autem p ſit numerus primus, niſi ſit $= 2$, ſemper exponens $\frac{p-1}{2}$ erit numerus integer.

Coroll. 3.

67. Si ſit $a = c^3 \pm \alpha p$, tum poteſtas $a^{\frac{p-1}{3}}$ per p diuiſa vnitatem relinquet, ſeu haec forma $a^{\frac{p-1}{3}} - 1$

per

per p erit diuiſibilis. Hic caſus locum habet, ſi numerus primus p ita ſit comparatus, vt $p-1$ per 3 ſit diuiſibile.

Theorema 18.

68. Si ſit $ab^n = c^n \pm ap$, et p numerus primus, tum poteſtas $a^{\frac{p-1}{n}}$ per p diuiſa vnitatem relinquet, ſiquidem $\frac{p-1}{n}$ fuerit numerus integer.

Demonſtratio.

Poteſtas $(c^n \pm ap)^{\frac{p-1}{n}}$, ſeu $a^{\frac{p-1}{n}} b^{p-1}$, per p diuiſa idem relinquit reſiduum, quod poteſtas $c^{n.\frac{p-1}{n}} = c^{p-1}$, at haec poteſtas vnitatem relinquit, ergo et poteſtas $a^{\frac{p-1}{n}} b^{p-1}$. Huius autem factor b^{p-1} pariter vnitatem relinquit; ergo neceſſe eſt, alterum quoque factorem $a^{\frac{p-1}{n}}$, ſi per p diuidatur, vnitatem relinquere, niſi ſit b vel c diuiſibile per p.

Coroll. 1.

69. Si ergo ſit $ab^n = c^n \pm ap$, ſeu $ab^n - c^n$, ſiue $c^n - ab^n$, per numerum primum p diuiſibile, tum haec quoque formula $a^{\frac{p-1}{n}} - 1$ per p erit diuiſibilis.

Coroll. 2.

70. Cum p ſit numerus primus, ponatur $p = mn + 1$, atque ſi fuerit haec formula $ab^n - c^n$, ſeu $c^n - ab^n$, per p diuiſibilis, tum etiam haec formula $a^m - 1$ per numerum primum p erit diuiſibilis.

Coroll. 3.

71. Dummodo ergo pro b et c eiusmodi numeri dentur, vt ab^n-c^n, ſeu c^n-ab^n diuiſionem per numerum primum $p=mn+1$ admittat, tum certum eſt, hanc formulam a^m-1 per eundem numerum primum $p=mn+1$ eſſe diuiſibilem.

Theorema 19.

72. Si formula a^m-1 fuerit diuiſibilis per numerum primum $p=mn+1$, tum ſemper dantur numeri x et y eiusmodi, vt ax^n-y^n ſit per eundem numerum primum p diuiſibilis.

Demonſtratio.

Cum enim x^{mn} et y^{mn} per p diuiſae vnitatem relinquant, formula $a^m x^{mn}-y^{mn}$ ſemper erit per p diuiſibilis, dummodo neque x, neque y, per p ſit diuiſibile. Cum iam per factores ſit $a^m x^{mn}-y^{mn}=(ax^n-y^n)$ $(a^{m-1}x^{mn-n}+a^{m-2}x^{mn-2n}y^n+a^{m-3}x^{mn-3n}y^{2n}+\ldots+y^{mn-n})$ ſi quis neget factorem primum ax^n-y^n vnquam eſſe per p diuiſibilem, is affirmare cogitur, alterum factorem ſemper eſſe per p diuiſibilem, dummodo pro x et y non capiantur numeri per p diuiſibiles. Retineat x valorem quemcunque, at pro y ponamus ſucceſſiue numeros 1, 2, 3, 4, vsque ad $p-1=mn$, ne vnquam obtineat valorem per p diuiſibilem, ſitque breuitatis gratia

$$A = a^{m-1}x^{mn-n} + a^{m-2}x^{mn-2n} + \quad\quad + 1$$
$$B = a^{m-1}x^{mn-n} + a^{m-2}x^{mn-2n}2^n + \ldots + 2^{mn-n}$$
$$C = a^{m-1}x^{mn-n} + a^{m-2}x^{mn-2n}3^n + \ldots + 3^{mn-n}$$
$$\vdots$$
$$N = a^{m-1}x^{mn-n} + a^{m-2}x^{mn-2n}(mn)^n + \ldots + (mn)^{mn-n}$$

ac forent omnes hae quantitates A, B, C, ... N, quae progreſſionem algebraicam ordinis $mn-n$ conſtituunt, per p diuiſibiles, hincque etiam earum differentiae primae, ſecundae, tertiae et ordinis cuiusuis. At huius ſeriei differentia ordinis $mn-n$, quae tantum per terminos $mn-n+1$ ſeriei definitur, neque adeo terminum $(mn+1)^{mn-n}$, ſeu p^{mn-n} inuoluit, quia p non poteſt eſſe valor ipſius y, eſt vti conſtat:

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \ldots\ldots\ (mn-n)$$

quae aperte non eſt per numerum primum $p = mn+1$ diuiſibilis, quia nullos alios habet diuiſores primos, niſi qui ſint minores quam $mn-n$. Cum igitur haec differentia ordinis $mn-n$ non ſit diuiſibilis per p, ſequitur non omnes terminos ſeriei A, B, C, D, ... N eſſe per p diuiſibiles. Illo igitur caſu, vel illis caſibus ipſius y, quibus termini huius ſeriei non ſunt per p diuiſibiles, neceſſario alter factor $ax^n - y^n$ per p erit diuiſibilis.

Corol-

Corollarium 1.

73. Quicunque ergo numerus pro x ſumatur, modo per p non diuiſibilis, pro y ſemper datur valor $< p$, qui reddit formulam $ax^n - y^n$ per p diuiſibilem. Similique modo, ſi pro y numerus pro lubitu aſſumatur, demonſtrari poteſt, ſemper pro x eiusmodi numerum $< p$ inueniri poſſe, quo eadem formula per p diuiſibilis euadat.

Coroll. 2.

74. Si ergo $a^m - 1$ fuerit diuiſibile per numerum primum $mn + 1 = p$, atque pro x capiatur numerus quicunque b per p non diuiſibilis, ſemper inueniri poteſt numerus y, vt haec forma $ab^n - y^n$, ſeu $y^n - ab^n$, fiat per $p = mn + 1$ diuiſibilis.

Coroll. 3.

75. Simili modo ſi forma $a^m - 1$ fuerit diuiſibilis per numerum primum $p = mn + 1$, atque pro y capiatur numerus quicunque c per p non diuiſibilis, ſemper inueniri poterit nnmerus x, vt haec forma $ax^n - c^n$, ſeu $c^n - ax^n$, fiat per $p = mn + 1$ diuiſibilis.

Theorema 20.

76. Si haec forma $ab^n - c^n$, vel $c^n - ab^n$, fuerit diuiſibilis per numerum primum $p = mn + 1$, tum ſumto numero d pro lubitu, dummodo per p non ſit diui-

diuiſibilis, ſemper inueniri poteſt numerus x, vt vel haec forma ax^n-d^n, vel haec ad^n-x^n, vel d^n-ax^n, vel x^n-ad^n fiat per eundem numerum primum $p=mn+1$ diuiſibilis.

Demonſtratio.

Cum haec forma ab^n-c^n, vel c^n-ab^n ſit per numerum primum $p=mn+1$ diuiſibilis, tum etiam hic numerus a^m-1 per eundem numerum primum $p=mn+1$ erit diuiſibilis. (71) Verum ſi a^m-1 per p eſt diuiſibilis, ſumto numero quocunque d per p non diuiſibili, dabitur numerus x, vt vel haec forma ax^n-d^n, vel etiam haec ad^n-x^n, vel d^n-ax^n, vel x^n-ad^n fiat quoque per numerum primum $p=mn+1$ diuiſibilis.

Corollarium.

77. Poſito ergo $d=1$, ſi formulae ab^n-c^n diuiſor ſit numerus primus $p=mn+1$, tum dabitur numerus x, vt vel haec forma ax^n-1, vel $a-x^n$, vel x^n-a fiat per eundem numerum primum p diuiſibilis.

Scholion.

78. Theorema vndeuiceſimum, quod inuerſum eſt theorematis duodeuiceſimi, iam alibi propoſueram, ſed ſine demonſtratione, et tametſi tum eius demonſtrationem multis modis tentaui, eam tamen inuenire non potui, donec in methodum hic vſitatam incidi: quae

quae igitur eo magis notatu digna videtur, cum dubium ſit nullum, quin eadem ad multa alia numerorum arcana viam ſit patefactura. Haec quoque methodus, quae in conſideratione differentiarum continetur, nuper mihi inſigni vſui fuit, dum eius beneficio tandem pulcherrimi theorematis Fermatiani, quo omnis numerus primus formae $4n+1$ aggregatum duorum quadratorum eſſe affirmatur, demonſtrationem ſum conſecutus; ad quam ante nullo alio modo peruenire potui.

SPECI-

SPECIMEN
NOVAE METHODI
CVRVARVM QVADRATVRAS ET RECTIFICATIONES ALIASQVE QVANTITATES TRANSCENDENTES INTER SE COMPARANDI.

Auctore

L. EVLERO.

Quae nuper occaſione inuentorum Ill. Comitis Fagnani commentatus ſum de comparatione arcuum ellipſis hyperbolae et curuae lemniſcatae, multo latius mihi quidem patere ſtatim ſunt viſa. Cum enim methodis adhuc conſuetis eiusmodi tantum curuarum arcus inter ſe comparari poſſent, quarum rectificatio vel a quadratura circuli, vel a logarithmis penderet, quippe quae quantitates, etſi ſunt tranſcendentes, tamen ita iam in Analyſi prae ceteris ius quoddam ciuitatis ſunt adeptae, vt perinde atque algebraicae tractari queant: maxima certe attentione erat dignum, quod a Fagnano in hyperbola et ellipſi arcus ſint aſſignati, quorum differentia ſit algebraica; in lemniſcata autem eiusmodi arcus, qui adeo inter ſe ſint aequales, vel certam teneant rationem, propterea quod harum curuarum rectificatio neque ad quadraturam circuli, neque ad logarithmos reduci queat. Hinc certe Theoriae quantitatum

tranſcendentium inſigne lumen accenderetur, ſi modo via, qua Fagnanus eſt vſus, certam methodum ſuppeditaret in huiusmodi inueſtigationibus vlterius progrediendi; ſed quia tota ſubſtitutionibus precario factis et quaſi caſu fortuito adhibitis nititur, parum inde vtilitatis in Analyſin redundat. Deinde iam notaui integrationes, quas operatio Fagnaniana complectitur, tantum eſſe particulares, neque idcirco methodum certam, a qua plura expectari liceat, ſuppeditare. Interim tamen ea ampliſſimum campum aperuiſſe eſt viſa, in quo vlterius excolendo Geometrae vires ſuas ſummo cum fructu exerceant, ad inſigne Analyſeos incrementum.

Res autem huc redit, vt propoſitis duabus formulis integralibus $\int X dx$ et $\int Y dy$, non integrabilibus, vbi X ſit functio quaepiam ipſius x, et Y ipſius y, eiusmodi relatio inter variabiles x et y definiatur, vt illae formulae vel inter ſe fiant aequales, vel datam rationem teneant, vel vt differentiam algebraice aſſignabilem obtineant. Quae inueſtigatio cum latiſſime pateat, tum etiam inſignes in ſe continet caſus iam pridem non ſine maximo Analyſeos incremento euolutos; huc enim referenda ſunt, quae de comparatione arcuum circularium, de lunulis quadrabilibus, de zonis cycloidalibus quadrabilibus; tum vero arcubus parabolicis, qui vel datam inter ſe teneant rationem vel differentiam algebraicam habeant, a geometris ſunt tradita: quin etiam haec inueſtigatio a Cel. *Ioh. Bernoulli* ad parabolas cubicales altiorisque ordinis eſt extenſa, ſed quia ratio, qua vſus eſt, nulla certa methodo nitebatur, vlteriori vſu fere penitus caruit. Huc quoque pertinet, quod

quod multo ante iam acutiſſimus Hugenius in Horologio oſcillatorio expoſuerat, vbi propoſito ſphaeroide elliptico compreſſo, ſeu reuolutione circa axem minorem genito, inuenire docuit conoides hyperbolicum, ita vt ſumma vtriusque ſuperficiei circulo exhiberi poſſet; cum tamen neutra ſuperficies ſeorſim cum circulo comparari queat. Quae inuentio iam tum ſummis geometris maxime memorabilis viſa eſt; atque *Bernoullius* in litteris ad *Leibnizium* datis dolet, hanc inuentionem nulla certa methodo inniti, ex qua plura huius generis inuenta deriuare liceat; interim quia ſuperficies tam illius ſphaeroidis elliptici, quam conoidis hyperbolici a logarithmis pendet, reductio vtriusque iunctim ſumtae ad circulum, ſimili modo perfici poteſt, quo in parabola arcus algebraicam habentes differentiam aſſignari ſolent. Inprimis autem hoc loco non eſt praetereundum, *Tſchirnhauſium* quondam methodum a ſe inuentam iactaſſe, cuius beneficio curuarum quarumcunque non rectificabilium arcus ita inter ſe comparare poſſet, vt differentia fiat algebraica, ſed praeter quam quod methodum ſuam nunquam aperuerit, manifeſtum eſt, eum paralogismo quodam fuiſſe deceptum, vt ſaepius alias, cum certum ſit, rem ita generaliter omnino expediri non poſſe: neque ergo *Tſchirnhauſius* putandus eſt quicquam eorum habuiſſe, quae vel tum circa comparationem curuarum ſunt inuenta, vel adhuc forte elicientur.

Specimen igitur quoddam methodi huiusmodi quaeſtiones ſoluendi hic exhibere conſtitui, quod non obſcure maiores progreſſus in hac re promittere videtur;

tur; atque cum non ſolum difficillimum ſit, propoſitis in genere eiusmodi formulis integralibus, quaeſitam inter variabiles relationem eruere, ſed etiam hoc ſaepiſſime omnino ne fieri quidem poſſit; ordine inuerſo rem ita tentaui, vt aſſumta binarum variabilium relatione, inde ipſas formulas integrales inueſtigarem, quae per hanc relationem inter ſe comparari poſſent. Quae methodus, cum facillime procedat, ad multo ſublimiora perducere poſſe videtur, quae aliis methodis plane ſint imperuia: hac enim methodo non ſolum ea, quae habet Fagnanus, facili negotio, ac ſine taedioſo calculo, ſum aſſecutus, ſed etiam multo ampliora atque illuſtriora reddidi, vt quae ille nimis particulariter definiuerat, ego ſatis vniuerſaliter expediuerim: atque calculus, quo ſum vſus, ita comparatus eſt, vt, quoniam operationes prorſus ſingulares complectitur, viam ad multo ſublimiora ſternere videatur.

Tum vero quanquam variabilium mutua relatio per methodos conſuetas definiri poteſt, quoties integratio vtriusque formulae $\int X dx$ et $\int Y dy$, vel a quadratura circuli, vel a logarithmis pendet; tamen et hoc plerumque non ſine moleſto calculo perficitur, dum partes, vel arcus circulares, vel logarithmos, continentes, ſe mutuo deſtruere debent: quemadmodum hoc in comparatione arcuum parabolicorum abunde perſpicitur. Per meam autem methodum hae difficultates cunctae penitus euaneſcunt, ac fere ſine vllo negotio iſtae comparationes, tam in circulo, quam in parabola, abſoluuntur: in quo ſine dubio non exigua vis huius methodi ſita eſſe cenſenda eſt, quod non ſolum multo facilius ea,

quae

quae aliis methodis iam ſunt eruta, praebeat; ſed etiam ad eiusmodi inueſtigationes manuducat, in quibus aliae methodi nihil eſſent praeſtiturae. Quam ob rem hoc quidem loco iſtam methodum tantum ad eos caſus applicabo, qui etiam aliis methodis, ſed multo operoſius, expediri ſolent, quo cum principia, quibus innititur, hac occaſione expoſuero, deinceps facilius eius applicationem ad quaeſtiones ſublimiores ſuſcipere poſſim. Quoniam igitur mihi a relatione inter binas variabiles, quam pro lubitu conſtituo, ordiendum eſt, a ſimplicioribus incipiam, ac primo quidem ab eiusmodi, quae ad ſimiles formulas integrales perducant, ſeu in quibus X et Y ſimiles ſint prodituræ functiones ipſarum x et y. Formulae ergo integrales hinc natae ob ſimilitudinem quantitates tranſcendentes exhibebunt, ad eandem lineam curuam pertinentes, deinceps autem ad formulas quoque diſſimiles, quae ad diuerſas curuas pertineant, ſum progreſſurus.

RELATIO PRIMA
inter binas variabiles x et y.

$$0 = \alpha + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy.$$

1. Si hinc ſeorſim valores x et y extrahantur, reperietur:

$$y = \frac{-\delta x \pm \sqrt{((\delta\delta - \gamma\gamma)xx - \alpha\gamma)}}{\gamma}$$

$$x = \frac{-\delta \pm \sqrt{((\delta\delta - \gamma\gamma)yy - \alpha\gamma)}}{\gamma}$$

vbi quouis caſu diſpiciendum eſt, vtrum ſignum quantitati radicali ſit praefigendum? Fieri enim poteſt, vt in vtraque formula, vel ſigna paria, vel diſparia, locum habeant,

beant, dum alterutrum arbitrio noſtro plane relinquitur: in quo iudicio inprimis natura variabilium x et y, vtrum affirmatiue, an negatiue accipiantur, ſpectari debet.

2. Ponantur breuitatis gratia membra irrationalia:

$$\pm\sqrt{((\delta\delta-\gamma\gamma)xx-\alpha\gamma)}=P, \text{ et } \pm\sqrt{((\delta\delta-\gamma\gamma)yy-\alpha\gamma)}=Q$$

vt ſit:

$$y=\frac{-\delta x+P}{\gamma}, \text{ et } x=\frac{-\delta y+Q}{\gamma}.$$

ſicque erit:

$$P=\gamma y+\delta x, \text{ et } Q=\gamma x+\delta y$$

vnde quouis caſu facile colligere licet, vtrum quantitates P et Q habiturae ſint valores affirmatiuos, an negatiuos.

3. Differentietur iam aequatio aſſumta, eritque:

$$dx(\gamma x+\delta y)+dy(\gamma y+\delta x)=0$$

atque ob $\gamma x+\delta y=Q$, et $\gamma y+\delta x=P$, habebitur haec aequatio:

$$Qdx+Pdy=0, \text{ ſiue } \frac{dx}{P}+\frac{dy}{Q}=0.$$

Reſtitutis ergo pro P et Q valoribus, huic aequationi integrali:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{((\delta\delta-\gamma\gamma)xx-\alpha\gamma)}}+\int\frac{dy}{\sqrt{((\delta\delta-\gamma\gamma)yy-\alpha\gamma)}}=\text{Conſt.}$$

ſatisfacit relatio inter variabiles x et y aſſumta.

4. Euoluamus haec accuratius, et quo facilius applicatio fieri queat, ponamus:

$$-\alpha\gamma=Ap \quad \text{et } \delta\delta-\gamma\gamma=Cp$$

vt ſit:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(A+Cxx)}}+\int\frac{dy}{\sqrt{(A+Cyy)}}=\text{Conſt.}$$

eritque

eritque $\alpha = -\frac{Ap}{\gamma}$ et $\delta = \surd(Cp + \gamma\gamma)$;
ſicque quantitates p et γ arbitrio noſtro relinquuntur.

5. Statuatur ergo $\gamma = A$, et $p = Akk$, ita vt k ſit noua quantitas conſtans, a noſtro arbitrio pendens; eritque

$$\alpha = -Akk, \gamma = A, \text{ et } \delta = \surd A(A + Ckk)$$

et aequatio canonica, noſtrae aequationi integrali ſatisfaciens, erit:

$$0 = -Akk + A(xx + yy) + 2xy\surd A(A + Ckk)$$

ſeu $y = \frac{-x\surd(A + Ckk) + k\surd(A + Cxx)}{\surd A}$

et $x = \frac{-y\surd(A + Ckk) + k\surd(A + Cyy)}{\surd A}$.

6. Si $\surd(A + Cyy)$ negatiue capiatur, itemque $\surd A$, tum huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\surd(A + Cxx)} = \frac{dy}{\surd(A + Cyy)}$$

integralis erit:

$$0 = -Akk + A(xx + yy) - 2xy\surd A(A + Ckk),$$

ideoque

vel $y = \frac{x\surd(A + Ckk) - k\surd(A + Cxx)}{\surd A}$

vel $x = \frac{y\surd(A + Ckk) + k\surd(A + Cyy)}{\surd A}$.

7. Quia ergo aequatio integralis conſtantem in ſe complectitur k, quae in differentiali non ineſt, indicio hoc eſt, integralem eſſe completam; ſicque differentiali nulla alia ſatisfacit integralis, niſi quae in forma inuenta comprehendatur. Atque haec eſt integratio principalis, ad quam relatio inter x et y aſſumta perducit.

 8. Hinc

8. Hinc autem deriuari poſſunt innumerabiles aliae integrationes. Si enim ſint X et Y eiusmodi functiones ipſarum x et y, vt vi relationis aſſumtae ſit $X = Y$, eadem relatio ſatisfaciet quoque huic aequationi differentiali:

$$\frac{X\,dx}{\sqrt{(A+Cxx)}} = \frac{Y\,dy}{\sqrt{(A+Cyy)}}$$

Infinitis autem modis huiusmodi functiones aequales exhiberi poſſunt ex formulis pro x et y inuentis.

9. Quo autem haec inueſtigatio latius pateat, et X et Y ſint functiones ſimiles, eas non aſſumo inter ſe aequales, eiusmodi autem pro iis valores indago, vt ſit:

$$\frac{X\,dx}{\sqrt{(A+Cxx)}} - \frac{Y\,dy}{\sqrt{(A+Cyy)}} = dV$$

atque quantitas V prodeat algebraica, ſi ſcilicet relatio §. 6. tradita locum habeat.

10. Cum igitur ſit $\frac{dy}{\sqrt{(A+Cyy)}} = \frac{dx}{\sqrt{(A+Cxx)}}$, erit

$$\frac{(X-Y)\,dx}{\sqrt{(A+Cxx)}} = dV$$

et ob $P = k\sqrt{A(A+Cxx)} = \gamma y + \delta x = Ay + x\sqrt{A(A+Ckk)}$ ſumto per §. 6. $\sqrt{A}$ negatiuo, erit $\sqrt{(A+Cxx)} = \frac{x}{k}\sqrt{(A+Ckk)} - \frac{y}{k}\sqrt{A}$, vnde fiet:

$$\frac{(X-Y)k\,dx}{x\sqrt{(A+Ckk)} - y\sqrt{A}} = dV.$$

11. Cum ſit porro ex aequatione differentiata

$$dx(Ax - y\sqrt{A(A+Ckk)}) = dy(x\sqrt{A(A+Ckk)} - Ay)$$

ponatur $xy = u$, erit $dy = \frac{du}{x} - \frac{y\,dx}{x}$, quo valore ſubſtituto fiet

$$dx\left(Ax - \frac{Ayy}{x}\right) = \frac{du}{x}(x\sqrt{A(A+Cxx)} - Ay)$$

ſeu

ſeu $\frac{dx}{x\surd(A+Cxx)-y\surd A} = \frac{du}{(xx-yy)\surd A}$;

ſicque erit: $dV = \frac{kdu}{\surd A}\cdot\frac{X-Y}{xx-yy}$.

12. Quoties ergo $\frac{X-Y}{xx-yy}$ eiusmodi functio ipſius u, quae ducta in du fiat integrabilis, toties valor quantitatis V algebraice exhiberi poterit: hoc autem euenit, quoties X et Y fuerint poteſtates parium exponentium ipſarum x et y, propterea cum ſit ex aequatione aſſumta

$$xx+yy = kk + \tfrac{2u}{A}\surd A(A+Ckk)$$

13. Ponatur ergo $X = x^n$ et $Y = y^n$; erit poſito $n=2$; $\frac{X-Y}{xx-yy} = 1$; et $dV = \frac{kdu}{\surd A}$

ideoque $V = \frac{ku}{\surd A} + \text{Conſt.} = \frac{kxy}{\surd A} + \text{Conſt.}$

Quam ob rem habebitur:

$$\int\frac{xxdx}{\surd(A+Cxx)} - \int\frac{yydy}{\surd(A+Cyy)} = \text{Conſt.} + \frac{kxy}{\surd A}.$$

14. Sit iam $n=4$; eritque $\frac{X-Y}{xx-yy} = xx+yy$ $= kk + \frac{2u}{A}\surd A(A+Ckk)$

vnde $dV = \frac{kdu}{A}(kk\surd A + 2u\surd(A+Ckk))$

ergo $V = \frac{ku}{A}(kk\surd A + u\surd(A+Ckk))$.

Hoc igitur caſu erit:

$$\int\frac{x^4dx}{\surd(A+Cxx)} - \int\frac{y^4dy}{\surd(A+Cyy)} = \text{Conſt.} + \frac{kxy}{A}(kk\surd A + xy\surd(A+Ckk))$$

ſimilique modo vlterius progredi licet.

15. His igitur coniungendis ſi fuerit

$$xx+yy = kk + 2xy\surd(1+\tfrac{C}{A}kk),\ \text{ſiue}$$

$$y = \frac{x\surd(A+Ckk) - k\surd(A+Cxx)}{\surd A}$$

$$x = \frac{y\surd(A+Ckk) + k\surd(A+Cyy)}{\surd A}$$

 haec

haec relatio inter x et y ſatisfaciet huic aequationi integrali:

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx + \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A + Cxx)}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}yy + \mathfrak{C}y^4)}{\sqrt{(A + Cyy)}} = \text{Conſt.}$$
$$+ \frac{\mathfrak{B}kxy}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{C}kxy}{\sqrt{A}}(kk + xy\sqrt{(1 + \tfrac{C}{A}kk)})$$

ſeu differentia iſtarum formularum integralium algebraice aſſignari poteſt.

RELATIO SECVNDA
inter binas variabiles x et y

$$0 = \alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy$$

16. Quoniam, vti in praecedentibus deprehendimus, ambiguitas ſignorum radicalium ab arbitrio noſtro pendet, dummode eius ratio in concluſionibus finalibus debite habeatur, ſi ad differentiam binarum formularum integralium peruenire velimus, extrahendo radices, habebimus:

$$y = \frac{-\beta - \delta x - \sqrt{(\beta\beta - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)x + (\delta\delta - \gamma\gamma)xx)}}{\gamma}$$
$$x = \frac{-\beta - \delta y + \sqrt{(\beta\beta - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)y + (\delta\delta - \gamma\gamma)yy)}}{\gamma}$$

17. Statuamus breuitatis gratia has formulas irrationales:

$$\sqrt{(\beta\beta - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)x + (\delta\delta - \gamma\gamma)xx)} = P$$
$$\sqrt{(\beta\beta - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)y + (\delta\delta - \gamma\gamma)yy)} = Q$$

eritque

$$-P = \beta + \gamma y + \delta x \text{ et } Q = \beta + \gamma x + \delta y$$

vnde eliciuntur iſtae relationes

$$P + Q = (\gamma - \delta)(x - y)$$
$$\gamma P + \delta Q = \beta(\delta - \gamma) + (\delta\delta - \gamma\gamma)y$$
$$\delta P + \gamma Q = \beta(\gamma - \delta) - (\delta\delta - \gamma\gamma)x.$$

18. Ae-

18. Aequatio autem propoſita differentiata dat:

$$dx(\beta+\gamma x+\delta y)+dy(\beta+\gamma y+\delta x)=0$$

ſiue $Qdx-Pdy=0$

vnde oritur:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q} \text{ ſeu } \int\frac{dx}{P}-\int\frac{dy}{Q}=\text{Conſt.}$$

cui ergo aequationi integrali ſatisfacit relatio propoſita, indeque valores pro x et y extracti.

19. Vt hinc ſimili modo alias integrationes obtineamus, ſint iterum X et Y functiones ſimiles ipſarum x et y; ac poſito:

$$\frac{X\,dy}{P}-\frac{Y\,dy}{Q}=dV$$

definiantur hae functiones ita, vt V prodeat quantitas algebraica; ſicque habeatur

$$\int\frac{X\,dx}{P}-\int\frac{Y\,dy}{Q}=V+\text{Conſt.}$$

20. Cum igitur ſit $\frac{dy}{Q}=\frac{dx}{P}$, erit $dV=\frac{(X-Y)dx}{P}$, ſeu $dV=\frac{-dx(X-Y)}{\beta+\gamma y+\delta x}$. Sit iterum $xy=u$, ideoque $dy=\frac{du}{x}-\frac{y\,dx}{x}$, erit pro aequatione differentiali

$$dx(\beta+\gamma x+\delta y)+\frac{du}{x}(\beta+\gamma y+\delta x)-\frac{y\,dx}{x}(\beta+\gamma y+\delta x)=0$$

ſeu $dx(\beta x-\beta y+\gamma xx-\gamma yy)+du(\beta+\gamma y+\delta x)=0.$

21. Valore hinc pro dx ſubſtituto habebitur:

$$dV=\frac{du(X-Y)}{(x-y)(\beta+\gamma(x+y))}$$

Ponatur autem vlterius $x+y=t$; erit $xx+yy=tt-2u$ et quia aequatio aſſumta in hanc formam abibit:

$$0=\alpha+2\beta t+\gamma tt+2(\delta-\gamma)u$$

ex qua differentiando fit $dt(\beta+\gamma t)=(\gamma-\delta)du$, ſeu $\frac{du}{\beta+\gamma t}=\frac{dt}{\gamma-\delta}$.

22. Hinc igitur ſimpliciori modo obtinetur

$$dV = \frac{dt(X - Y)}{(\gamma - \delta)(x - y)}$$

vnde patet, ſi X et Y fuerint poteſtates ipſarum x et y, tum fractionem $\frac{X-Y}{x-y}$ per t et u, ideoque et per ſolum t, ob $u = \frac{+\alpha + 2\beta t + \gamma tt}{2(\gamma - \delta)}$, commode exprimi poſſe.

23. Sit ergo $X = x^n$, et $Y = y^n$; ac ponatur primo $n = 1$, erit $\frac{X-Y}{x-y} = 1$, et $dV = \frac{dt}{\gamma - \delta}$; vnde fit $V = \frac{t}{\gamma - \delta}$. Quocirca pro hoc caſu erit

$$\int \frac{x\,dx}{P} - \int \frac{y\,dy}{Q} = \text{Conſt.} + \frac{(x+y)}{\gamma - \delta}.$$

cui ergo aequationi integrali ſatisfit per relationem inter x et y aſſumtam.

24. Sit $n = 2$; eritque $\frac{X-Y}{x-y} = x + y = t$; vnde fit

$$dV = \frac{t\,dt}{\gamma - \delta} \text{ et } V = \frac{tt}{2(\gamma - \delta)} = \frac{(x+y)^2}{2(\gamma - \delta)}$$

Hoc ergo caſu habebitur:

$$\int \frac{xx\,dx}{P} - \int \frac{yy\,dy}{Q} = \text{Conſt.} + \frac{(x+y)^2}{2(\gamma - \delta)}.$$

25. Si vlterius progredi lubeat, ponatur $n = 3$, eritque:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = xx + xy + yy = tt - u = \frac{(\gamma - 2\delta)tt - 2\beta t - \alpha}{2(\gamma - \delta)}$$

et $V = \frac{\frac{1}{3}(\gamma - 2\delta)t^3 - \beta tt - \alpha t}{2(\gamma - \delta)^2}$; ſicque erit

$$\int \frac{x^3\,dx}{P} - \int \frac{y^3\,dy}{Q} = \text{Conſt.} + \frac{(\gamma - 2\delta)(x+y)^3 - 3\beta(x+y)^2 - 3\alpha(x+y)}{6(\gamma - \delta)^2}$$

26. His igitur formulis coniungendis, ſequenti aequationi integrali

$\int \frac{dx}{}$

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}xx+\mathfrak{D}x^3)}{\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta\delta-\gamma\gamma)xx)}}-\int \frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}yy+\mathfrak{D}y^3)}{\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta\delta-\gamma\gamma)yy)}}$$

$$=\text{Conſt.}+\frac{\mathfrak{B}(x+y)}{\gamma-\delta}+\frac{\mathfrak{B}(x+y)^2}{2(\gamma-\delta)}+\frac{\mathfrak{D}((\gamma-2\delta)(x+y)^3-3\beta(x+y)^2-3\alpha(x+y))}{6(\gamma-\delta)^2}$$

ſatisfacit relatio aſſumta

$$0=\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy$$

indeque valores pro x et y initio eruti.

27. Quo applicatio ad caſus particulares facilius fieri poſſit, ponamus $\beta\beta-\alpha\gamma=Ap$; $\beta(\delta-\gamma)=Bp$; et $\delta\delta-\gamma\gamma=Cp$; vt ſit $P=\sqrt{p(A+2Bx+Cxx)}$ et $Q=\sqrt{p(A+2By+Cyy)}$

fiatque:

$$\gamma=A+Bk, \text{ et } \delta=\sqrt{A(A+2Bk+Ckk)}$$

erit $p=\frac{(AC-BB)kk}{C}$, et $\beta=\frac{B}{C}(\delta+\gamma)$

atque $\alpha=\frac{2BB}{CC}(\gamma+\delta)-\frac{(AC-BB)^2kk}{CC(A+Bk)}$.

RELATIO TERTIA

inter binas variabiles x et y

$$0=\alpha+mxx+nyy+2\delta xy$$

28. Extrahendo vtramque radicem habebitur

$$y=\frac{-\delta x+\sqrt{((\delta\delta-mn)xx-\alpha n)}}{n}$$

$$x=\frac{-\delta y-\sqrt{((\delta\delta-mn)yy-\alpha m)}}{m}$$

hinc poſito:

$$P=\sqrt{(\delta\delta-mn)xx-\alpha n)} \text{ et } Q=\sqrt{((\delta\delta-mn)yy-\alpha m)}$$

erit $P=\delta x+ny$ et $-Q=\delta y+mx$.

29. Per differentiationem vero obtinemus:

$$dx(mx+\delta y)+dy(ny+\delta x)=0$$

ſeu $-Q\,dx+P\,dy=0$, ideoque $\frac{dy}{Q}=\frac{dx}{P}$

vnde

vnde aequatio aſſumta huic aequationi integrali

$$\int\frac{dy}{Q}=\int\frac{dx}{P}$$ ſatisfacit.

30. Sint iam X et Y functiones ipſarum x et y ſingulatim, ac ponatur

$$\int\frac{X\,dx}{P}-\int\frac{Y\,dy}{Q}=V$$

ita vt fiat V quantitas algebraica: eritque

$$\frac{(X-Y)\,dx}{P}=d\,V+\frac{(X-Y)\,dx}{\delta x+ny}.$$

31. Poſito $xy=u$, vt ſit $dy=\frac{du}{x}-\frac{y\,dx}{x}$, erit

$$dx(mxx-nyy)+du(ny+\delta x)=0$$

vnde, cum ſiat $\frac{dx}{\delta x+ny}=\frac{-du}{mxx-nyy}$, erit

$$d\,V=\frac{-du(X-Y)}{mxx-nyy},$$

hincque non difficulter caſus integrabiles eliciuntur.

32. Sit enim primo $X=mxx$, et $Y=nyy$, erit

$$dV=-du, \text{ et } V=-u=-xy$$

Hinc relatio inter x et y aſſumta ſatisfacit huic aequationi integrali:

$$\int\frac{mxx\,dx}{P}-\int\frac{nyy\,dy}{Q}=\text{Conſt.}-xy.$$

33. Sit ſecundo $X=mmx^4$, et $Y=nny^4$, erit

$$dV=-du(mxx+nyy)=+du(\alpha+2\delta u)$$

vnde fit $V=u(\alpha+\delta u)=xy(\alpha+\delta xy)$

Ergo huic aequationi integrali

$$\int\frac{mmx^4\,dx}{P}-\int\frac{nny^4\,dy}{Q}=\text{Conſt.}+xy(\alpha+\delta xy)$$

ſatisfacit relatio aſſumta inter x et y.

34. His

34. His igitur colligendis relatio inter x et y aſſumta ſatisfaciet huic aequationi integrali:

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} m x x + \mathfrak{C} m^2 x^4)}{\sqrt{((\delta\delta - mn) x x - \alpha n)}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} m y y + \mathfrak{C} m^2 y^4)}{\sqrt{((\delta\delta - mn) y y - \alpha m)}}$$

$$= \text{Conſt.} - \mathfrak{B} x y + \mathfrak{C} x y (\alpha + \delta x y).$$

35. Ponamus ad faciliorem applicationem:

$$\delta\delta - mn = Cp;\quad \alpha n = -Ap \text{ et } \alpha m = -Bp,$$

vt ſit $P = \sqrt{p(A + Cxx)}$, et $Q = \sqrt{p(B + Cyy)}$, erit $\frac{m}{n} = \frac{B}{A}$. Sit ergo $m = B$, et $n = A$, erit $\alpha = -p$, et $\delta = \sqrt{(AB + Cp)}$. Sit ergo $p = Ckk$, vt ſit $\alpha = -Ckk$, et aequatio relationem inter x et y definiens erit:

$$o = -Ckk + Bxx + Ayy + 2xy\sqrt{(AB + CCkk)}$$

36. Quam ob rem valores ipſius x et y hinc erunt:

$$y = \frac{-x\sqrt{(AB + CCkk)} + k\sqrt{C(A + Cxx)}}{A}$$

$$x = \frac{-y\sqrt{(AB + CCkk)} - k\sqrt{C(B + Cyy)}}{B}$$

exiſtente:

$$P = k\sqrt{C(A + Cxx)} \text{ et } Q = k\sqrt{C(B + Cyy)}.$$

37. Hi igitur valores conueniunt huic aequationi integrali:

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} B x x + \mathfrak{C} B^2 x^4)}{\sqrt{(A + Cxx)}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} A y y + \mathfrak{C} A^2 y^4)}{\sqrt{(B + Cyy)}}$$

$$= \text{Conſt.} - \mathfrak{B} k x y \sqrt{C} + \mathfrak{C} k x y(-Ckk + xy\sqrt{(AB + C^2 kk)})\sqrt{C}.$$

38. Ponatur $B = \frac{CE}{F}$, quae aequatio latius patere videatur, atque, conſtantibus mutatis, prodibit iſta aequatio integralis:

$$\int \frac{dx(\mathfrak{A} + \frac{C}{A}\mathfrak{B} x x + \frac{CC}{AA}\mathfrak{C} x^4)\sqrt{C}}{\sqrt{(A + Cxx)}} - \int \frac{dy(\mathfrak{A} + \frac{F}{E}\mathfrak{B} y y + \frac{FF}{EE}\mathfrak{C} y^4)\sqrt{F}}{\sqrt{(E + Fyy)}}$$

$$= \text{Conſt.} - \frac{CF}{AE}\mathfrak{B} k x y - \frac{CCFF}{AAEE}\mathfrak{C} k^3 x y + \frac{CCFF}{AAEE}\mathfrak{C} k x x y y \sqrt{(\frac{AE}{CF} + kk)}$$

 cui

cui ſatisfaciunt iſti valores:

$$\frac{Ay}{C} = k\sqrt{\left(\frac{A}{C}+xx\right)} - x\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}+kk\right)}$$

$$\frac{Ex}{F} = -k\sqrt{\left(\frac{E}{F}+yy\right)} - y\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}+kk\right)}$$

qui oriuntur ex hac aequatione:

$$kk = \frac{E}{F}xx + \frac{A}{C}yy + 2xy\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}+kk\right)}.$$

39. Hae formulae ratione ſignorum vtcunque transmutari poſſunt. Primo enim in formulis integralibus nihil mutando, tam k, quam $\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}+kk\right)}$ pro lubitu vel affirmatiue, vel negatiue, accipi poſſunt, dummodo eadem ſigni ratio vbique obſeruetur. Deinde etiam tam $\sqrt{C}$, quam $\sqrt{F}$, negatiue ſumi poteſt; illo autem caſu quoque $\sqrt{\left(\frac{A}{C}+xx\right)}$, quippe $\frac{\sqrt{(A+Cxx)}}{\sqrt{C}}$, hoc vero $\sqrt{\left(\frac{E}{F}+yy\right)}$ negatiue eſt accipiendum.

40. Denique patet, ſi C ſit quantitas poſitiua, tum quoque F quantitatem poſitiuam eſſe oportere, quia alioquin altera formula integralis fieret imaginaria. Sin autem C ſit quantitas negatiua, tum etiam F talis ſit neceſſe eſt; et quo hoc caſu imaginaria ſe deſtruant, pro kk quantitas negatiua accipienda erit; quo k et k^3 fiant quoque imaginariae.

41. Hoc ergo caſu ſequens habebitur aequatio integralis:

$$\int \frac{dx\left(\mathfrak{A}+\frac{C}{A}\mathfrak{B}xx+\frac{CC}{AA}\mathfrak{C}x^4\right)\sqrt{C}}{\sqrt{(A-Cxx)}} - \int \frac{dy\left(\mathfrak{A}+\frac{F}{E}\mathfrak{B}yy+\frac{FF}{EE}\mathfrak{C}y^4\right)\sqrt{F}}{\sqrt{(E-Fyy)}}$$

$$= \text{Conſt.} + \frac{CF}{AE}\mathfrak{B}kxy + \frac{CCFF}{AAEE}\mathfrak{C}k^3xy + \frac{CCFF}{AAEE}\mathfrak{C}kxxyy\sqrt{\left(\frac{AE}{CF}-kk\right)}$$

cui

cui ſatisfaciunt iſti valores:

$$\frac{Ay}{C} = x\sqrt{\left(\frac{AE}{CF} - kk\right)} - k\sqrt{\left(\frac{A}{C} - xx\right)}$$

$$\frac{Ex}{F} = y\sqrt{\left(\frac{AE}{CF} - kk\right)} + k\sqrt{\left(\frac{E}{F} - yy\right)}$$

ex hac aequatione oriundi:

$$kk = \frac{E}{F}xx + \frac{A}{C}yy - 2xy\sqrt{\left(\frac{AE}{CF} - kk\right)}.$$

42. Hae formulae etiam eas, quae ex hypotheſi prima ſunt erutae, in ſe complectuntur, ponendo ſcilicet $E = A$, et $F = C$, quin etiam formulae ſecundae hypotheſis his non latius patent Si enim in relatione ſecundo loco aſſumta pro $x + \frac{\beta}{\gamma + \delta}$ et $y + \frac{\beta}{\gamma + \delta}$ ſcribatur x et y, aequatio omnino primae formae oritur, ſimilique modo ſi hanc relationem conſtituere velimus:

$$0 = a + 2bx + 2\beta y + \gamma xx + cyy + 2\delta xy$$

ea facile ad relationem tertiam reduceretur, vnde eius euolutionem praetermitto.

43. Perſpicuum nunc eſt, ex his formulis infinitas comparationes inſtitui poſſe circa quantitates tranſcendentes, tam ratione ſpatiorum, quam arcuum, qui quidem vel a quadratura circuli pendent, vel a logarithmis. Etſi autem hae comparationes etiam vulgari calculo inſtitui poſſunt, tamen non inutile erit oſtendere, quemadmodum eaedem multo facilius ex his formulis deriuari queant; quod eo maius notatu dignum videtur, cum hic neque naturae circuli, neque logarithmorum, ratio peculiaris habeatur. Ex quo facilius intelligetur, quemadmodum haec methodus etiam pari

ſucceſſu ad eiusmodi formulas integrales ſe extendat, quae neque ad circuli, neque hyperbolae quadraturam reuocari poſſunt.

I.

De comparatione arcuum circularium.

44. Sit radius circuli, ſeu ſinus totus $= 1$, ac poſito ſinu quocunque $= z$, ſit arcus ei reſpondens $= \Pi . z$, ſumto Π pro nota eius functionis, qua pendentia arcus a ſuo ſinu denotatur. Erit ergo, vti conſtat, $\Pi . z = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$; atque vt formulas integrales §. 41. erutas huc transferamus, poni oportet: $A = E = C = F = 1$; $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{B} = 0$, et $\mathfrak{C} = 0$.

45. Ex his autem valoribus emerget haec aequatio integralia complectens:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}} - \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}} = \text{Conſt.}$$

cui ſatisfacere inuentae ſunt hae formulae:

$$y = x\sqrt{(1 - kk)} - k\sqrt{(1 - xx)}$$

$$x = y\sqrt{(1 - kk)} + k\sqrt{(1 - yy)}$$

quae oriuntur ex hac aequatione:

$$kk = xx + yy - 2xy\sqrt{(1 - kk)}.$$

46. Per has igitur determinationes ſatisfit huic aequationi:

$$\Pi\, x - \Pi . y = \text{Conſt.}$$

in qua conſtans ita determinabitur: ponatur $y = 0$ eritque $x = k$; ex quo caſu prodit $\Pi . k - \Pi . 0 = \text{Conſt.}$ ſeu

ſeu ob $\Pi.0 = 0$ erit Conſt. $= \Pi\, k$, ſeu arcui cuius ſinus $= k$. Hinc generatim habebimus:

$\Pi.x - \Pi.y = \Pi.k.$

47. Hinc ergo ſtatim arcuum tam additio, quam ſubtractio colligitur. Si enim duo habeantur arcus $\Pi.k$ et $\Pi.y$, quarum ſinus ſint k et y, et ſummae arcuum ſinus ponatur $= x$, vt ſit $\Pi\, x = \Pi.k + \Pi\, y$, erit $x = y\sqrt{(1 - kk)} + k\sqrt{(1 - yy)}$. Porro ſi maioris arcus ſinus ſit $= x$, minoris $= k$, ſinusque differentiae ponatur $= y$, vt ſit $\Pi.y = \Pi.x - \Pi.k$, erit:

$y = x\sqrt{(1 - kk)} - k\sqrt{(1 - xx)};$

vti ex elementis eſt manifeſtum.

48. Perſpicuum etiam eſt, quemadmodum hinc arcuum multiplicationem deduci oporteat. Poſito enim $y = k$, vt ſit $x = 2k\sqrt{(1 - kk)}$, erit $\Pi\, x = 2\,\Pi\, k$. Ac ſi valor hic pro x inuentus loco y ſubſtituatur, in formula $x = y\sqrt{(1 - kk)} + k\sqrt{(1 - yy)}$, ob $\Pi.y = 2\,\Pi.k$, prodibit $\Pi.x = 3\,\Pi.k$.

49 In genere autem, ſi ſit y ſinus arcus nk, ſeu $\Pi.y = n\Pi.k$, et $\sqrt{(1 - yy)}$ ſit coſinus arcus nk, vti $\sqrt{(1 - kk)}$ denotat coſinum arcus k, atque ponatur

$x = y\sqrt{(1 - kk)} + k\sqrt{(1 - yy)}$ erit $\Pi.x = (n+1)\Pi.k.$

Ex ſinu ergo cuiusuis multipli arcus k reperietur ſinus multipli vnitate altioris.

50. Quo autem haec facilius expediri queant, valorem quoque ipſius coſinus $\sqrt{(1 - xx)}$ noſſe conueniet; quem in finem cum ex formula prima ſit:

$k\sqrt{(1 - xx)} = x\sqrt{(1 - kk)} - y$

 ſubſti-

ſubſtituatur hic valor ipſius x ex altera formula erit $k\sqrt{(1-xx)}=y(1-kk)+k\sqrt{(1-kk)(1-yy)})-y$, ideoque

$$\sqrt{(1-xx)}=\sqrt{(1-kk)(1-yy)}-ky$$

ſimilique modo erit:

$$\sqrt{(1-yy)}=\sqrt{(1-kk)(1-xx)}+kx.$$

51. Inuentis ergo valoribus, tam pro x, quam pro $\sqrt{(1-xx)}$, multiplicetur ille per λ et productum ad hunc addatur, eritque

$$\sqrt{(1-xx)}+\lambda x=\sqrt{(1-kk)(1-yy)}-ky+\lambda y\sqrt{(1-kk)}+\lambda k\sqrt{(1-yy)}$$

ſeu $\sqrt{(1-xx)}+\lambda x=(\sqrt{(1-kk)}+\lambda k)\sqrt{(1-yy)}+y(\lambda\sqrt{(1-kk)}-k)$

Quo igitur hi factores ſimiles reddantur, neceſſe eſt, vt ſit $\lambda=\sqrt{-1}$, eritque:

$$\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1}=(\sqrt{(1-kk)}+k\sqrt{-1})(\sqrt{(1-yy)}+y\sqrt{-1}).$$

52. Hanc ergo formulam loco ſuperioris adhibendo, ſtatim patet, vt ſit $\Pi.x=2\,\Pi.k$, ob $y=k$, eſſe oportere

$$\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1}=(\sqrt{(1-kk)}+k\sqrt{-1})^2$$

Ac ſi hic valor pro x inuentus loco y ſubſtituatur, vt ſit

$\Pi.y=2\,\Pi.k$, prodibit:

$$\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1}=(\sqrt{(1-kk)}+k\sqrt{-1})^3 \text{ pro } \Pi.x=3\,\Pi.k$$

vnde in genere colligitur, vt ſit $\Pi.x=n\,\Pi.k$, debere eſſe:

$$\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1}=(\sqrt{(1-kk)}+k\sqrt{-1})^n.$$

53. Quia porro $\sqrt{-1}$ ob ſuam naturam tam negatiue, quam affirmatiue accipere licet, erit quoque pro eadem arcus multiplicatione: $\Pi.x=n\,\Pi.k$

$$\sqrt{(1-xx)}-x\sqrt{-1}=(\sqrt{(1-kk)}-k\sqrt{-1})^n$$

ideo-

ideoque vel

$$V(1-xx)=\frac{(V(1-kk)+kV-1)^n+(V(1-kk)-kV-1)^n}{2}$$

$$\text{vel } x=\frac{(V(1-kk)+kV-1)^n-(V(1-kk)-kV-1)^n}{2V-1}$$

quae formulae quoque valent pro valoribus fractis exponentis n.

II.
De Comparatione arcuum parabolicorum.

54. Sit AB axis et A vertex parabolae, quem tangat recta indefinita AV, ſuper qua capiantur abſciſſae; poſito ergo parabolae latere recto $=2$, ſit abſciſſa quaeuis $AP=z$, erit applicata $Pp=\frac{1}{2}zz$, ex quo arcus parabolae huic abſciſſae reſpondens erit $Ap=\int dz\, V(1+zz)$: qui cum ſit functio ipſius z, denotetur per $\Pi.z$, ita vt $\Pi.z$ ſignificet arcum parabolae abſciſſae z conuenientem, ſeu ſit Tab. II. Fig. 1.

$$\Pi.z=\int dz\, V(1+zz).$$

55 Irrationalitate in denominatorem translata erit: $\Pi.z=\int\frac{dz(1+zz)}{V(1+zz)}$. Ad hanc ergo formam vt formulae integrales §. 38. reuocentur, erit $A=E=1$; $C=F=1$, $\mathfrak{A}=1$ et $\mathfrak{B}=1$ atque $\mathfrak{C}=0$. Vnde aequatio illa integralis in hanc abit formam:

$$\int\frac{dx(1+xx)}{V(1+xx)}-\int\frac{dy(1+yy)}{V(1+yy)}=\text{Conſt.}+kxy$$

cui ſatisfaciunt hi valores:

$$y=-kV(1+xx)+xV(1+kk) \text{ et } x=kV(1+yy)+yV(1+kk)$$

ſumtis tam k quam $V(1+kk)$ negatiuis.

56. Hac

56. Hac igitur inter x et y relatione ſubſiſtente pro arcubus parabolae erit:

$$\Pi.x - \Pi.y = \text{Conſt.} + kxy$$

ad quam conſtantem determinandam ponatur $y = 0$, et quia tum ſit $x = k$, erit $\Pi.k = \text{Conſt.}$ Quocirca habebitur

$$\Pi.x - \Pi.y = \Pi.k + kxy.$$

57. Vt igitur haec aequatio locum habeat, relatio inter ternas abſciſſas $k, x,$ et y eiusmodi erit:

$$x = k\surd(1+yy) + y\surd(1+kk), \text{ ſeu } y = x\surd(1+kk) - k\surd(1+xx)$$

vnde praeterea eruuntur iſtae determinationes:

$$\surd(1+xx) = \surd(1+kk)(1+yy) + ky \text{ et } \surd(1+yy) = \surd(1+kk)(1+xx) - kx$$

ex quibus porro elicitur:

$$x + \surd(1+xx) = (k+\surd(1+kk))(y+\surd(1+yy)).$$

58. Si manente eadem abſciſſa k, capiantur aliae duae abſciſſae q et p, vt ſit

$$q = k\surd(1+pp) + p\surd(1+kk) \text{ et } p = q\surd(1+kk) - k\surd(1+qq)$$

ſeu $q + \surd(1+qq) = (k + \surd(1+kk))(p + \surd(1+pp))$

erit $\Pi.q - \Pi.p = \Pi.k + kpq.$

Ideoque hanc aequationem ab illa ſubtrahendo habebitur:

$$(\Pi.x - \Pi.y) - (\Pi\,q - \Pi\,p) = k(xy - pq).$$

59. Pro hoc igitur caſu erit

$$\frac{x+\surd(1+xx)}{y+\surd(1+yy)} = \frac{q+\surd(1+qq)}{p+\surd(1+pp)}$$

vnde relatio inter p, q, x et y ſiue k obtinetur: Erit autem

$$k = x\surd(1+yy) - y\surd(1+xx) = q\surd(1+pp) - p\surd(1+qq) \text{ et}$$

$$\surd(1+kk) = \surd(1+xx)(1+yy) - xy = \surd(1+pp)(1+qq) - pq$$

60. Iam

60. Iam ob $\frac{1}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \sqrt{(1+pp)} - p$ erit:

$$\sqrt{(1+xx)}+x = (\sqrt{(1+yy)}+y)(\sqrt{(1+qq)}+q)(\sqrt{(1+pp)}-p)$$

vnde reperitur:

$$x = y\sqrt{(1+pp)(1+qq)} + q\sqrt{(1+pp)(1+yy)} - p\sqrt{(1+qq)(1+yy)} - pqy$$

Quare erit:

$$(\Pi.x-\Pi.y)-(\Pi.q-\Pi.p) = (q\sqrt{(1+pp)}-p\sqrt{(1+qq)})(y\sqrt{(1+pp)} - p\sqrt{(1+yy)})(q\sqrt{(1+yy)}+y\sqrt{(1+qq)}).$$

Problema I.

61. Dato arcu parabolae quocunque Ak, in vertice A terminato, ab alio quocunque puncto p arcum abſcindere pq, qui arcum illum Ak ſuperet quantitate algebraice aſſignabili. Tab. II. Fig. 1.

Solutio.

Poſita parabolae parametro $=2$, ſit k abſciſſa arcui Ak conueniens, abſciſſae autem punctis p et q reſpondentes ſint AP$=y$ et AQ$=x$; eritque arc.pq $=\Pi.x-\Pi.y$ et arc. A$k=\Pi.k$; cum igitur data ſit abſciſſa AP$=y$, ſi capiatur altera

$$AQ = x = y\sqrt{(1+kk)} + k\sqrt{(1+yy)}$$

erit $\Pi.x-\Pi.y = \Pi.k + kxy$, ideoque

$$\text{Arc.}pq = \text{Arc.A}k + kxy.$$

Superabit ergo arcus pq, qui in dato puncto p terminatur, arcum Ak quantitate algebraice aſſignabili kxy.

Poterit etiam a puncto p antrorſum abſcindi arcus pq', qui pariter arcum Ak quantitate geometrica ſuperet;

peret; ad hoc ponatur $AP = x$ et $AQ' = y$, ſitque $y = x\sqrt{(1+kk)} - k\sqrt{(1+xx)}$; et cum ſit Arc. $pq' = \Pi.x - \Pi.y$, erit:

$$\text{Arc.}\,pq' = \text{Arc.}\,Ak + kxy$$

Vtraque igitur ſolutio ita coniungetur, vt poſita abſciſſa data $AP = p$; capiendum ſit:

$AQ = p\sqrt{(1+kk)} + k\sqrt{(1+pp)}$, et $AQ' = p\sqrt{(1+kk)} - k\sqrt{(1+pp)}$ quo facto erit:

$$\text{Arc.}\,pq = \text{Arc.}\,Ak + kp.AQ$$
$$\text{Arc.}\,pq' = \text{Arc.}\,Ak + kp.AQ'$$

ſicque duplici modo problemati eſt ſatisfactum.

Coroll. 1.

62. Fieri autem nequit, vt exceſſus kxy, quo arcus pq arcum Ak ſuperat, euaneſcat, deberet enim eſſe vel $x = 0$, vel $y = 0$. At caſu $x = 0$ fieret $y = -k$, arcusque in ipſo vertice A inciperet in altero ramo ipſi arcui Ak ſimilis capiendus; altero autem caſu, quo $y = 0$, fieret $x = k$, et arcus pq in arcum Ak abiret: vnde arcui Ak geometrice in parabola abſcindi nequit alius arcus ipſi aequalis, qui ipſi non ſimul futurus ſit ſimilis.

Coroll. 2.

63. Viciſſim ergo dato arcu quocunque pq in parabola, ſemper a vertice arcus abſcindi poterit Ak, qui ab illo deficiat quantitate geometrica. Cum enim nunc datae ſint abſciſſae $AP = y$ et $AQ = x$. erit $AK = k = x\sqrt{(1+yy)} - y\sqrt{(1+xx)}$, qua inuenta, erit Arc. pq - Arc. $Ak = kxy$.

Coroll.

Coroll. 3.

64. Quin etiam puncto p pro incognito habito, propoſito arcu Ak, alius arcus pq aſſignari poterit, qui illum ſuperet quantitate data, puta $=$ C. Habebimus ergo has duas aequationes:

$$kxy = C \text{ et } xx + yy = kk + 2xy\sqrt{(1 + kk)}$$

ſeu $xx + yy = kk + \frac{2C}{k}\sqrt{(1 + kk)}$; ergo

$$x + y = \sqrt{(kk + \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1 + kk)})}$$

$$x - y = \sqrt{(kk - \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1 + kk)})}$$

Seu ſint x et y binae radices huius aequationis quadraticae

$zz - Pz + Q = 0$; erit $Q = \frac{C}{k}$ et $P = \sqrt{(kk + \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1 + kk)})}$ vnde $z = \frac{1}{2}\sqrt{(kk + \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1 + kk)})} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(kk - \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k}\sqrt{(1 + kk)})}$.

Coroll. 4.

65. Quantacunque ſit haec quantitas C, modo ſit affirmatiua, ſemper prodeunt pro x et y valores reales, iique affirmatiui: At ſi ſit $C = 0$, fiet $x = k$, et $y = 0$. Quin etiam poni poteſt C negatiuum, quo caſu y reperitur quoque negatiuum, et arcus quaeſitus vtrinque circa verticem A erit diſpoſitus. Verum ſi ſit $C = -D$, neceſſe eſt, vt ſit $D < \frac{k^3}{2(1 + \sqrt{(1 + kk)})}$, ſeu $D < \frac{1}{2}k(\sqrt{(1 + kk)} - 1)$; nam ſi D eſſet maius, vtraque abſciſſa fieret imaginaria.

Coroll. 5.

66. Caſu autem $D = -C = \frac{1}{2}k(\sqrt{(1 + kk)} - 1)$, erit $zz = \frac{D}{k}$; ideoque $x = + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{(1 + kk)} - 1)}$

et $y = -\sqrt{\frac{1}{2}}(\sqrt{(1+kk)}-1)$; hocque caſu orietur arcus vtrinque a vertice aeque extenſus, cuius defectus ab arcu Ak eſt minimus omnium, qui quidem geometrice conſtrui poſſunt.

Problema 2.

Tab. II. Fig. 2. 67. Dato arcu parabolae quocunque ef, a dato eius puncto quocunque p alium abſcindere arcum pq, ita vt arcuum ef et pq differentia geometrice poſſit aſſignari.

Solutio.

Poſito parabolae latere recto $=2$, tanget recta AV parabolam in vertice A, a quo capiantur abſciſſae, quae ſint:

$$AE = e;\ AF = f;\ AP = p \text{ et } AQ = q$$

quarum tres priores e, f, p, ſunt datae, haec vera q ita accipiatur, vt ſit per §. 59.

$$\frac{q+\sqrt{(1+qq)}}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}$$

Tum vero ſit $k = f\sqrt{(1+ee)} - e\sqrt{(1+ff)}$, ſcribendo e et f pro y et x, eritque $(\Pi.q - \Pi.p) - (\Pi.f - \Pi.e) = k(pq - ef)$.

Ideoque habebitur:

$$\text{Arc.}pq - \text{Arc.}ef = k(pq - ef).$$

Hinc etiam apparet, ſi punctum q fuerit datum, ex formula tradita ſimili modo punctum p antrorſum procedendo definiri poſſe, vt arcuum differentia prodeat geometrice aſſignabilis.

Coroll.

Coroll. 1.

68. Ex reductione §. 60. facta patet eſſe

$$pq - eff = (p\surd(1+ee) - e\surd(1+pp))(p\surd(1+ff) + f\surd(1+pp))$$

ſicque, ſumta abſciſſa q, ex aequatione $\frac{q+\surd(1+qq)}{p+\surd(1+pp)} = \frac{f+\surd(1+ff)}{e+\surd(1+ee)}$ erit:

$$\text{Arc.}\,pq - \text{Arc.}\,ef = (f\surd(1+ee) - e\surd(1+ff))(p\surd(1+ee) - e\surd(1+pp))(p\surd(1+ff) + f\surd(1+pp)).$$

Coroll. 2.

69. Si velimus punctum p ita accipere, vt arcuum differentia euaneſcat, ſeu fiat Arc. pq = Arc ef, oportet eſſe

vel $p\surd(1+ee) - e\surd(1+pp) = 0$, vel $p\surd(1+ff) + f\surd(1+pp) = 0$

Priori caſu fit $p = \pm e$; poſteriori $p = \pm f$, vtroque autem caſu arcus pq vel cum arcus ef congruit, vel eius fit ſimilis in altero parabolae ramo aſſumtus; ita vt geometrice duo arcus aequales exhiberi nequeant, quae non ſimul ſibi futuri ſint ſimiles.

Coroll. 3.

70. Cum ſit $k = f\surd(1+ee) - e\surd(1+ff)$, erit $\surd(1+kk) = \surd(1+ee)(1+ff) - ef$; hinc $k\surd(1+kk) = f\surd(1+ff) + 2eef\surd(1+ff) - 2eff\surd(1+ee) - e\surd(1+ff)$

ſiue

$$k\surd(1+kk) = f\surd(1+ff) - e\surd(1+ee) - 2ef(f\surd(1+ee) - e\surd(1+ff))$$

ideoque $k\surd(1+kk) = f\surd(1+ff) - e\surd(1+ee) - 2efk$.

Quo circa habebitur:

$$kef = \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)} - \tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)} - \tfrac{1}{2}k\sqrt{(1+kk)}.$$

Coroll. 4.

71. Quia igitur k ſimili quoque modo pendet a p et q, erit etiam

$$kpq = \tfrac{1}{2}q\sqrt{(1+qq)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{1}{2}k\sqrt{(1+kk)}$$

Quare cum arcuum differentia ſit $= kpq - kef$; ſi quatuor parabolae puncta e, f, p, q ita a ſe inuicem pendent, vt ſit:

$$\frac{q+\sqrt{(1+qq)}}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}$$

erit

$$\text{Arc.}\,pq - \text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}q\sqrt{(1+qq)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

quae expreſſio, ob functiones quantitatum p, q, e, f a ſe inuicem ſeparatas, eſt notatu digna.

Coroll. 5.

72. Relatio inter e, f, p, q etiam ita exprimi poteſt, vt ſit

$$\sqrt{(1+qq)}+q = (\sqrt{(1+ee)}-e)(\sqrt{(1+ff)}+f)(\sqrt{(1+pp)}+p)$$

tum ob $\frac{1}{\sqrt{(1+qq)}+q} = \sqrt{(1+qq)} - q$ erit:

$$\sqrt{(1+qq)}-q = (\sqrt{(1+ee)}+e)(\sqrt{(1+ff)}-f)(\sqrt{(1+pp)}-p)$$

vnde datis $e, f,$ et p, facile valor tam pro q, quam pro p, eruitur.

Coroll. 6.

73. Ex formula Coroll. 1. data apparet, arcum pq ſemper maiorem fore arcu ef, ſi punctum p a vertice

vertice parabolae A magis fuerit remotum, quam punctum e; contra autem arcum pq proditurum eſſe minorem. Ac ſi quidem ſit $p=0$, erit $\text{Arc.}\,ef-\text{Arc.}\,pq = ef(f\surd(1+ee)-e\surd(1+ff))$; minimus autem omnium arcus pq euadet, ſi capiatur $p=-\surd\tfrac{1}{2}(\surd(1+ee)(1+ff)-ef-1)$ et $q=+\surd\tfrac{1}{2}(\surd(1+ee)(1+ff)-ef-1)$ tumque erit:

$$\text{Arc.}\,ef-\text{Arc}\,pq=\tfrac{1}{2}(e+f)(\surd(1+ff)-\surd(1+ee))$$

Arcusque pq vtrinque aeque circa verticem A erit diſpoſitus.

Problema 3.

74. Dato arcu parabolae ef, a puncto dato p abſcindere arcum pz, qui ſuperet datum multiplum arcus ef quantitate geometrice aſſignabili. Tab. II. Fig. 3.

Solutio.

Poſito parabolae latere recto $=2$, ſint in verticis tangente abſciſſae datae $AE=e$, $AF=f$, et $AP=p$; tum capiantur abſciſſae $AQ=q$; $AR=r$; $AS=s$; $AT=t$; et vltima ſit $AZ=z$; quae ita determinentur, vt ſit:

$$\text{Primo}\ \frac{q+\surd(1+qq)}{p+\surd(1+pp)}=\frac{f+\surd(1+ff)}{e+\surd(1+ee)}$$

eritque ex §. 71.

$$\text{Arc}\,pq-\text{Arc.}\,ef=\tfrac{1}{2}q\surd(1+qq)-\tfrac{1}{2}p\surd(1+pp)-\tfrac{1}{2}f\surd(1+ff)+\tfrac{1}{2}e\surd(1+ee).$$

Deinde ex puncto q ſimili modo definiatur punctum r, vt ſit:

$$\frac{r+\surd(1+rr)}{q+\surd(1+qq)}=\frac{f+\surd(1+ff)}{e+\surd(1+ee)},\ \text{ſeu}\ \frac{r+\surd(1+rr)}{p+\surd(1+pp)}=\left(\frac{f+\surd(1+ff)}{e+\surd(1+ee)}\right)^2$$

eritque

eritque

$$\text{Arc.}\,qr - \text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}r\sqrt{(1+rr)} - \tfrac{1}{2}q\sqrt{(1+qq)} - \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

qua aequatione ad illam addita prodibit:

$$\text{Arc.}\,pr - 2\,\text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}r\sqrt{(1+rr)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{2}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{2}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

Tertio ex puncto r capiatur punctum s, vt ſit:

$$\frac{s+\sqrt{(1+ss)}}{r+\sqrt{(1+rr)}} = \frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}, \text{ ſeu } \frac{s+\sqrt{(1+ss)}}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \left(\frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}\right)^3$$

eritque:

$$\text{Arc.}\,rs - \text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}s\sqrt{(1+ss)} - \tfrac{1}{2}r\sqrt{(1+rr)} - \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

quae ad praecedentem addita praebet:

$$\text{Arc.}\,ps - 3\,\text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}s\sqrt{(1+ss)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{3}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{3}{2}e\sqrt{(1+ee)}.$$

Atque hoc modo ſi vlterius progrediamur, ſitque z punctum poſt n huiusmodi operationes inuentum, erit:

$$\frac{z+\sqrt{(1+zz)}}{p+\sqrt{(1+pp)}} = \left(\frac{f+\sqrt{(1+ff)}}{e+\sqrt{(1+ee)}}\right)^n$$

vnde immediate punctum z reperietur, ita vt ſit:

$$\text{Arc.}\,pz - n\,\text{Arc.}\,ef = \tfrac{1}{2}z\sqrt{(1+zz)} - \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{n}{2}f\sqrt{(1+ff)} + \tfrac{n}{2}e\sqrt{(1+ee)}$$

ſicque arcus pz eſt inuentus a dato puncto p abſciſſus, qui arcum ef vicibus n ſumtum ſuperat quantitate geometrica.

Coroll. 1.

75. Quodcunque ergo multiplum arcus ef proponatur, cuius multipli exponens ſit numerus n, ſiue is ſit integer, ſiue fractus, a dato puncto p ſemper abſcindi

ſcindi poterit arcus pz, qui hoc multiplum excedat quantitate geometrice aſſignabili; erit enim:

$$\sqrt{(1+zz)}+z=(\sqrt{(1+pp)}+p)(\sqrt{(1+ff)}+f)^n(\sqrt{(1+ee)}-e)^n \text{ et}$$

$$\sqrt{(1+zz)}-z=(\sqrt{(1+pp)}-p)(\sqrt{(1+ff)}-f)^n(\sqrt{(1+ee)}+e)^n.$$

Coroll. 2.

76. Quodſi ergo ad abbreuiandum ponatur:

$$\sqrt{(1+ee)}+e=E;\ \sqrt{(1+ff)}+f=F;\ \sqrt{(1+pp)}+p=P$$

erit $\sqrt{(1+zz)}+z=\frac{PF^n}{E^n}$ et $\sqrt{(1+zz)}-z=\frac{E^n}{PF^n}$

vnde oritur;

$$\sqrt{(1+zz)}=\frac{P^2F^{2n}+E^{2n}}{2PE^nF^n} \text{ et } z=\frac{P^2F^{2n}-E^{2n}}{2PE^nF^n}.$$

Coroll. 3.

77. Hinc ergo fiet $\frac{1}{2}z\sqrt{(1+zz)}=\frac{P^4F^{4n}-E^{4n}}{8P^2E^{2n}F^{2n}}$

Quia tum ſimili modo eſt

$$\tfrac{1}{2}e\sqrt{(1+ee)}=\frac{E^4-1}{8EE};\ \tfrac{1}{2}f\sqrt{(1+ff)}=\frac{F^4-1}{8FF}$$

$$\text{et } \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}=\frac{P^4-1}{8PP}$$

erit:

$$\text{Arc.}pz-n\,\text{Arc.}ef=\frac{P^4F^{4n}-E^{4n}}{8P^2E^{2n}F^{2n}}-\frac{P^4+1}{8PP}-\frac{n(F^4-1)}{8FF}+\frac{n(E^4-1)}{8EE}$$

Coroll. 4.

78. Si huius expreſſionis partes binae in vnam congregentur, reperietur iſta differentia geometrica:

$$\text{Arc.}pz - n\,\text{Arc.}ef = \frac{(F^{2n}-E^{2n})(P^4F^{2n}+E^{2n})}{8P^2E^{2n}F^{2n}} - \frac{n(FF-EE)(EEFF+1)}{8EEFF}.$$

Coroll. 5.

79. Quemadmodum hic ex puncto dato p alterum punctum z determinauimus, ita viciſſim, ſi punctum z pro dato accipiatur, antrorſum progrediendo, ſimili modo punctum p ex eadem aequatione reperietur, ita vt Arc. pz ſuperet arcum ef, n vicibus ſumtum quantitate geometrice aſſignabili.

Problema 4.

80. Dato in parabola arcu quocunque ef, inuenire alium arcum pz, qui ſe habeat ad illum in data ratione $n:1$, ita vt ſit Arc. $pz = n\,$Arc. ef.

Solutio.

Retentis iisdem denominationibus, quibus in probl. praecedenti eiusque Coroll. 2. vſi ſumus; quoniam fieri debet:

$$\text{Arc.}pz - n\,\text{Arc.}ef = 0$$

quantitas illa algebraica, cui haec arcuum differentia aequalis eſt inuenta, in nihilum abire debet. Habebimus ergo ex Coroll. 4. hanc aequationem:

$$F^{2n}P^4 + E^{2n} = \frac{nE^{2n-2}F^{2n-2}(FF-EE)(EEFF+1)}{F^{2n}-E^{2n}}P^2$$

Pona-

Ponamus breuitatis gratia $\frac{F}{E}=C$, eritque

$$C^{2n}P^4+1=\frac{nC^{2n-2}(CC-1)(CCE^4+1)}{(C^{2n}-1)EE}PP$$

vnde fit:

$$C^nP^2=\frac{nC^{n-2}(CC-1)(CCE^4+1)}{2(C^{2n}-1)EE}-\sqrt{\left(\frac{nnC^{n-4}(CC-1)^2(CCE^4+1)^2}{4(C^{2n}-1)^2E^4}-1\right)}$$

ideoque

$$P=\sqrt{\left(\frac{n(CC-1)(CCE^4+1)}{2(C^{2n}-1)CCEE}-\sqrt{\left(\frac{nn(CC-1)^2(CCE^4+1)^2}{4(C^{2n}-1)^2C^4E^4}-\frac{1}{C^{2n}}\right)}\right)}$$

ſiue

$$P=\sqrt{\left(\frac{n(CC-1)(CCE^4+1)}{4(C^{2n}-1)CCEE}+\frac{1}{2C^n}\right)}-\sqrt{\left(\frac{n(CC-1)(CCE^4+1)}{4(C^{2n}-1)CCEE}-\frac{1}{2C^n}\right)}$$

Deinde ſi pari modo ponatur $\sqrt{(1+zz)}+z=Z$, erit $Z=C^nP$. Ex inuentis autem quantitatibus P et Z ita eliciuntur ipſae abſciſſae p et z, vt ſit:

$$p=\frac{PP-1}{2P} \quad \text{et} \quad z=\frac{ZZ-1}{2Z}$$

Reſtituto autem pro C valore $\frac{F}{E}$, ſi ponamus:

$$\sqrt{\left(\frac{n(FF-EE)(EEFF+1)}{4EEFF(F^{2n}-E^{2n})}+\frac{1}{2E^nF^n}\right)}=M$$

$$\sqrt{\left(\frac{n(FF-EE)(EEFF+1)}{4EEFF(F^{2n}-E^{2n})}-\frac{1}{2E^nF^n}\right)}=N$$

reperietur:

$$P=E^n(M-N) \quad \text{et} \quad \frac{1}{P}=F^n(M+N)$$
$$Z=F^n(M-N) \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}=E^n(M+N)$$

vnde concluduntur ipſae abſciſſae

$$p=-\tfrac{1}{2}M(F^n-E^n)-\tfrac{1}{2}N(F^n+E^n)$$
$$z=+\tfrac{1}{2}M(F^n-E^n)-\tfrac{1}{2}N(F^n+E^n)$$

 Cum

Cum autem M et N tam affirmatiue, quam negatiue accipere liceat, capiatur N negatiuum, vt punctum z in iſtum parabolae ramum incidat, in quo eſt arcus ef, eritque

$$p = \tfrac{1}{2}N(F^n + E^n) - \tfrac{1}{2}M(F^n - E^n)$$
$$z = \tfrac{1}{2}N(F^n + E^n) + \tfrac{1}{2}M(F^n - E^n)$$

Ex quibus formulis ſi definiantur puncta p et z, erit

$$\text{Arc.}\, pz = n\, \text{Arc.}\, ef.$$

Coroll. 1.

81. Ambae ergo abſciſſae $AP = p$ et $AZ = z$, ita ſunt comparatae, vt ſit:

$$z + p = N(F^n + E^n) \text{ et } z - p = M(F^n - E^n).$$

Hinc erit valoribus pro M et N reſtituendis:

$$pz = \frac{nE^nF^n(F^2 - E^2)(EEFF + 1)}{4EEFF(F^{2n} - E^{2n})} - \frac{F^{2n} - E^{2n}}{4E^nF^n} \text{ et}$$

$$pp + zz = \frac{n(F^2 - E^2)(EEFF + 1)(F^{2n} + E^{2n})}{4EEFF(F^{2n} - E^{2n})} - 1.$$

Coroll. 2.

82. Si ſit $n = 1$, erit:

$$M = \sqrt{\left(\frac{EEFF + 1}{4EEFF} + \frac{1}{2EF}\right)} = \frac{EF + 1}{2EF} \text{ et } N = \frac{EF - 1}{2EF}$$

vnde fit:

$$z + p = \tfrac{1}{2}F + \tfrac{1}{2}E - \tfrac{1}{2E} - \tfrac{1}{2F} \text{ et } z - p = \tfrac{1}{2}F - \tfrac{1}{2}E + \tfrac{1}{2E} - \tfrac{1}{2F}$$

ideoque:

$$2p = E - \tfrac{1}{E}, \text{ ſeu } p = e \text{ et } 2z = F - \tfrac{1}{F}, \text{ ſeu } z = f$$

puncta ſcilicet p et z in puncta e et f incidunt.

Coroll.

Coroll. 3.

83. Si arcus pz debeat eſſe duplus arcus dati ef, ſeu $n = 2$, erit:

$$M = \sqrt{\left(\frac{EEFF+1}{2EEFF(FF+EE)} + \frac{1}{2EEFF}\right)} = \sqrt{\frac{(EE+1)(FF+1)}{2EEFF(EE+FF)}}$$

et $N = \sqrt{\left(\frac{EEFF+1}{2EEFF(FF+EE)} - \frac{1}{2EEFF}\right)} = \sqrt{\frac{(EE-1)(FF-1)}{2EEFF(EE+FF)}}$

vnde ſi arcus ef in vertice A terminetur, vt ſit $e = 0$, et $E = 1$, erit $M = \frac{1}{F}$, et $N = 0$; ſicque prodit $z + p = 0$, et $z - p = \frac{FF-1}{F} = 2f$; ideoque $p = -f$, et $z = +f$. Hoc ergo caſu arcus pz medium in verticem A incidit, et vtrinque arcum ipſi ef, ſeu Af, aequalem complectitur.

Coroll. 4.

84. Si arcus pz debeat eſſe triplus arcus ef, ſeu $n = 3$, erit:

$$M = \sqrt{\left(\frac{3(EEFF+1)}{4EEFF(F^4+E^2F^2+E^4)} + \frac{1}{2E^3F^3}\right)}, \text{ ſiue}$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{3E^3F^3+3EF+2F^4+2EEFF+2E^4}{4E^3F^3(F^4+EEFF+E^4)}\right)} \text{ et}$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{3E^3F^3+3EF-2F^4-2EEFF-2E^4}{4E^3F^3(F^4+EEFF+E^4)}\right)}.$$

Coroll. 5.

85. Si hoc caſu, quo $n = 3$ arcus ef in vertice A incipiat, erit $e = 0$, et $E = 1$, vnde

$$M = \sqrt{\left(\frac{2F^4+3F^3+2FF+3F+2}{2F^3(F^4+F^2+1)}\right)} \text{ ſiue}$$

$$M = (F+1)\sqrt{\frac{2FF-F+2}{2F^3(F^4+F^2+1)}} \text{ et}$$

$$N = (F-1)\sqrt{\frac{-2FF-F-2}{2F^3(F^4+F^2+1)}}$$

qui ergo valor eſt imaginarius.

Coroll. 6.

86. Vt ergo arcus ef triplum exhiberi poſſit, is non in vertice A terminari poteſt, ſeu E debet eſſe maius quam 1, atque adeo limes dabitur, infra quem accipi nequeat. Ad quem limitem inueniendum, reſolvi oportet hanc aequationem

$$3E^3F^3 + 3EF = 2F^4 + 2EEFF + 2E^4.$$

In hunc finem ponatur $EF = S$, et $EE + FF = R$, erit:

$$3S^3 + 3S = 2RR - 2SS, \text{ ideoque } R = \sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3 + SS + \tfrac{3}{2}S)}$$

vnde fit:

$$F + E = \sqrt{(2S + \sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3 + SS + \tfrac{3}{2}S)})}$$
$$F - E = \sqrt{(-2S + \sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3 + SS + \tfrac{3}{2}S)})}$$

Et cum ſit $E > 1$, et $F > 1$, debet eſſe $R > 2$, et

$$3S^3 + 2SS + 3S > 8; \text{ ideoque } S > 1.$$

Coroll. 7.

87. Generatim ergo pro caſu $n = 3$ oportet ſit $3S^3 + 3S > 2RR - 2SS$; ideoque $R < \sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3 + SS + \tfrac{3}{2}S)}$ quare ſi α ſit numerus vnitate minor: reperitur

$$F + E = \sqrt{(2S + \alpha\sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3 + SS + \tfrac{3}{2}S)})}$$
$$F - E = \sqrt{(-2S + \alpha\sqrt{(\tfrac{3}{2}S^3 + SS + \tfrac{3}{2}S)})}$$

Debet ergo eſſe $\alpha\alpha > \frac{8S}{3SS + 2S + 3}$ et $S > 1$.

Coroll. 8.

88. Ponamus $S = 2$; erit $\alpha\alpha > \frac{16}{19}$. Capiatur $\alpha = 1$, vt ſit $EF = 2$, et $EE + FF = \sqrt{19}$; erit

$$F+E = \sqrt{(\sqrt{19} + 4)}; \quad E = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{19}+4)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$$
$$F-E = \sqrt{(\sqrt{19} - 4)}; \quad F = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{19}+4)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$$

ergo

ergo $e = \frac{1}{8}\sqrt{(\sqrt{19}+4)} - \frac{3}{8}\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$

et $f = \frac{1}{8}\sqrt{(\sqrt{19}+4)} + \frac{3}{8}\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$

Porro reperitur :

$$M = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ et } N = 0; \text{ vnde}$$

$$x = -p = \frac{1}{4\sqrt{2}}(2+\sqrt{19})\sqrt{(\sqrt{19}-4)}$$

hic ergo arcus triplus vtrinque circa verticem aequaliter extenditur.

III.

De Comparatione ſuperficierum ſphaeroidis elliptici compreſſi et conoidis hyperbolici.

89. Sit igitur primum propoſitum ſphaeroides ellipticum genitum rotatione ellipſis BMA circa axem minorem AC. Ponatur ſemiaxis minor $CA = a$; et ſemiaxis maior $CB = a\sqrt{m}$, exiſtente m numero vnitate maiori. Sumta iam in axe minore a centro C abſciſſa $CP = x$, erit applicata $PM = \sqrt{m(aa-xx)}$, vnde elementum ellipticum $= dx\sqrt{\frac{aa+(m-\ )xx}{aa-xx}}$. Tab. II. Fig. 4.

90. Poſita nunc ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, erit portio ſuperficiei ſphaeroidicae, a reuolutione arcus AM genita, ſeu quae reſpondet abſciſſae $CP = x$, aequalis huic integrali $2\pi\int dx\sqrt{m(aa+(m-1)xx)}$. Indicetur hoc integrale, quod tanquam functio abſciſſae x ſpectetur, hoc modo

$$\int dx\sqrt{m(aa+(m-1)xx)} = \Pi . x.$$

91. Portio ergo ſuperficiei ſphaeroidicae ellipticae abſciſſae $CP = x$ reſpondens, erit $= 2\pi . \Pi . x$: vbi functio

functio Πx, vti perſpicuum eſt, a logarithmis, ſeu rectificatione parabolae pendet, eritque $\Pi x = 0$, ſi $x = 0$; ſin autem ponatur $x = a$, tum $2\pi . \Pi a$ exhibebit ſemiſſem totius ſuperficiei ſphaeroidis.

92. Sit porro conoides hyperbolicum genitum reuolutione hyperbolae am circa ſuum axem cap, cuius centrum ſit in c. Ponatur eius ſemiaxis transuerſus $ca = c$, ſemiaxis autem coniugatus $= c\sqrt{n}$. Sumta ergo in axe a centro c abſciſſa quacunque $cp = y$, quae quidem ſit $> c$, erit applicata $pm = \sqrt{n(yy - cc)}$, et elementum hyperbolicum $= \int dy \sqrt{\frac{(n+1)yy - cc}{yy - cc}}$.

93. Hinc erit portio ſuperficiei conoidis iſtius hyperbolici, ex arcu am genita, ſeu abſciſſae $cp = y$ reſpondens $= 2\pi \int dy \sqrt{n((n+1)yy - cc)}$. Quod integrale cum ſpectari poſſit tanquam functio ipſius y, ita indicetur;

$$\int dy \sqrt{n((n+1)yy - cc)} = \Theta y$$

fitque $\Theta y = 0$, ſi capiatur $y = c$. Erit ergo ſuperficies conoidis hyperbolici abſciſſae $cp = y$ reſpondens $= 2\pi . \Theta y$.

94. Comparentur hae binae formulae cum illis, quae ſupra §. 38. ſunt expoſitae, et cum ſit:

$$\Pi . x = \int \frac{dx(aa + (m-1)xx)\sqrt{m}}{\sqrt{(aa + (m-1)xx)}}$$

erit $A = aa$; $C = m - 1$; $\mathfrak{A}\sqrt{(m-1)} = aa\sqrt{m}$; et

$$\frac{m-1}{aa}\mathfrak{B}\sqrt{(m-1)} = (m-1)\sqrt{m};$$

vnde fit $\mathfrak{A} = \frac{aa\sqrt{m}}{\sqrt{(m-1)}}$ et $\mathfrak{B} = \frac{aa\sqrt{m}}{\sqrt{(m-1)}}$.

95. Deinde pro hyperbola cum ſit

$$\Theta . y = \int \frac{dy(-cc + (n+1)yy)\sqrt{n}}{\sqrt{(-cc + (n+1)yy)}}$$

fiat

fiat $E = -cc$, et $F = n+1$; eritque ob $\mathfrak{C} = 0$

$$-\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \frac{F}{E}\mathfrak{B}yy)\sqrt{F}}{\sqrt{(E+Fyy)}} = \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{\sqrt{(m-1)}} \int \frac{dy(-1+\frac{(n+1)yy}{cc})}{\sqrt{(-cc+(n+1)yy)}}$$

ergo $-\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \frac{F}{E}\mathfrak{B}yy)\sqrt{F}}{\sqrt{(E+Fyy)}} = \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}} \cdot \Theta y$

96. His ergo ſubſtitutionibus factis habebimus hanc aequationem:

$$\Pi x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}\Theta y = \text{Conſt.} + \frac{(n+1)\sqrt{m(m-1)}}{cc}kxy$$

cui ſatisfacit haec relatio inter x et y:

$$\frac{aay}{m-1} = k\sqrt{(\frac{aa}{m-1}+xx)} - x\sqrt{(kk-\frac{aacc}{(m-1)(n+1)})} \text{ ſeu}$$

$$\frac{ccx}{n+1} = k\sqrt{(-\frac{cc}{n+1}+yy)} + y\sqrt{(kk-\frac{aacc}{(m-1)(n+1)})}$$

vbi $\sqrt{(kk-\frac{aacc}{(m-1)(n+1)})}$ negatiue accipi conueniet.

97. Vel ponatur $k = \frac{ae}{\sqrt{(m-1)}}$, et ſi fuerit

$$y = \frac{e}{a}\sqrt{(aa+(m-1)xx)} + \frac{x\sqrt{(m-1)}}{a\sqrt{(n+1)}}\sqrt{((n+1)ee-ac)}$$

ſeu $x = \frac{ae\sqrt{(n+1)}}{cc\sqrt{(m-1)}}\sqrt{((n+1)yy-cc)} - \frac{ay\sqrt{(n+1)}}{cc\sqrt{(m-1)}}\sqrt{((n+1)ee-ca)}$

erit

$$\Pi. x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}\Theta y = \text{Conſt.} + \frac{(n+1)ae\sqrt{m}}{ac}xy$$

98. Ad conſtantem autem definiendam ponatur $x = 0$, vt ſit $\Pi. x = 0$, eritque $y = e$, vnde prodit: Conſt. $= \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}\Theta e$; ſicque habebitur:

$$\Pi x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}(\Theta y - \Theta e) = \frac{(n+1)ae\sqrt{m}}{cc}xy$$

At ſi in hyperbola capiatur abſciſſa $cf = e$, erit ſuperficies conoidis ex arcu em nata $= 2\pi.(\Theta y - \Theta e)$.

99 Quoniam igitur y per x determinatur, erit quoque

$$\sqrt{((n+1)(yy-cc))} = \frac{e}{a}x\sqrt{(m-1)(n+1)} + \frac{1}{a}\sqrt{(aa+(m-1)xx)((n+1)ee-cc)}$$

vnde fit:

$$y+\delta\sqrt{((n+1)yy-cc)} = \left(\frac{e}{a}+\frac{\delta}{a}\sqrt{((n+1)ee-cc)}\right)\sqrt{(aa+(m-1)xx)} + x\left(\frac{\delta e}{a}\sqrt{(m-1)(n+1)} + \frac{\sqrt{(m-1)}}{a\sqrt{(n+1)}}\sqrt{((n+1)ee-cc)}\right)$$

fit $1:\delta\sqrt{(m-1)(n+1)} = \delta : \frac{\sqrt{m-1)}}{\sqrt{(n+1)}}$ erit $\delta = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}}$ hincque obtinetur:

$$\sqrt{((n+1)yy-cc)}+y\sqrt{(n+1)} = \left(\frac{e\sqrt{(n+1)}}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{((n+1)ee-cc)}\right)\left(\sqrt{(aa+(m-1)xx)}+x\sqrt{(m-1)}\right).$$

100. Datis ergo abſciſſis $CP = x$, et $cf = e$, abſciſſa $cp = y$ ita definiri debet, vt ſit

$$\frac{\sqrt{((n+1)yy-cc)}+y\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)ee-cc)}+e\sqrt{(n+1)}} = \sqrt{\left(1+\frac{(m-1)xx}{aa}\right)}+\frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}$$

Deinde autem eſt

$$exy = \frac{ay\sqrt{((n+1)yy-cc)}}{2\sqrt{(m-1)(n+1)}} - \frac{ae\sqrt{((n+1)ee-cc)}}{2\sqrt{(m-1)(n+1)}} + \frac{ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{2a(n+1)}.$$

Problema Hugenianum.

Dato ſphaeroide elliptico lato ABC, inuenire conoides hyperbolicum apm, ita vt circulus deſcribi poſſit geometrice, cuius area aequalis ſit futura vtrique ſuperficiei ſphaeroidicae et conoidicae iunctim ſumtae.

Solutio prima.

101. Manentibus pro vtroque corpore denominationibus, modo expoſitis, ſtatuatur $\frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}} = 1$, ſeu

ſeu $cc = \frac{aa\sqrt{m}(n+1)}{\sqrt{n}(m-1)}$, vnde ſemiaxis transuerſus hyperbolae c determinatur, numero n ſeu eius ſpecie arbitrio noſtro relicta: eritque ſtabilita ſuperiori relatione inter x et y

$$\Pi.x + (\Theta y - \Theta e) = \frac{(n+1)ae\sqrt{m}}{cc}xy = \frac{exy\sqrt{n(m-1)(n+1)}}{a}.$$

102 Cum nunc ſit ſuperficies ſphaeroidis ex arcu BM nata, ſeu Sup. BM $= 2\pi.\Pi x$; et ſuperficies conoidis ex arcu em nata, ſeu Sup. $em = 2\pi(\Theta y - \Theta e)$; erit

$$\text{Sup. BM} + \text{Sup. } em = \frac{2\pi exy\sqrt{n(m-1)(n+1)}}{a}$$

Vnde ſi hae duae ſuperficies iunctim ſumtae aequentur circulo, cuius radius $= r$, ob eius aream $= \pi rr$ erit

$$rr = \frac{2exy\sqrt{n(m-1)(n+1)}}{a}.$$

103. Hic iam continetur ſolutio problematis ſenſu multo latiori accepti. Caſu enim Hugeniano, quo integrum ſphaeroides aſſumitur, ſeu, quod eodem redit, eius ſemiſſis, erit $x = a$; tum vero punctum e in vertice a capi oportet, vnde fit $e = c$. Erit ergo hoc caſu:

$$y = c\sqrt{m} + \frac{c\sqrt{n(m-1)}}{\sqrt{(n+1)}} = cp,$$

fietque:

$$\text{Sup. BA} + \text{Sup.} am = 2\pi(n+1)aa\left(m + \frac{\sqrt{mn(m-1)}}{\sqrt{(n+1)}}\right).$$

104 Radio ergo circuli vtrique ſuperficiei ſimul aequalis poſito $= r$ erit, $rr = 2aa(m(n+1) + \sqrt{mn}(m-1)(n+1))$

ſiue $r = a\sqrt{2(\sqrt{m(n+1)} + \sqrt{n(m-1)})\sqrt{m(n+1)}}$.

 Atque

Atque erit $cp = p = \frac{c}{\sqrt{(n+1)}} (\sqrt{m(n+1)} + \sqrt{n(m-1)})$
tum vero accipi debet $c = a \sqrt[4]{\frac{m(n+1)}{n(m-1)}}$.
Quae eſt ſolutio ſimpliciſſima Problematis Hugeniani.

Solutio ſecunda.

105. Cum relatio inter x et y ſit ita comparata, vt ſit

$$\frac{\sqrt{((n+1)yy-cc)}+y\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)ee-cc)}+e\sqrt{(n+1)}} = \sqrt{\left(1+\frac{(m-1)xx}{aa}\right)} + \frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}$$

ſitque $\Pi. x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}} (\Theta y - \Theta e) = \frac{\sqrt{m(n+1)}}{2cc}$.

$$\left(\frac{aay\sqrt{((n+1)yy-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aae\sqrt{((n+1)ee-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$$

Capiatur in conoide noua abſciſſa $cq = z$, et pro e iam ſumatur y, vt ſit

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz-cc)}+z\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)yy-cc)}+y\sqrt{(n+1)}} = \sqrt{\left(1+\frac{(m-1)xx}{aa}\right)} + \frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}$$

erit pariter $\Pi. x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}(\Theta z - \Theta y) = \frac{\sqrt{m(n+1)}}{2cc} \times$

$$\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aay\sqrt{((n+1)yy-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right).$$

106. Addantur hae formulae inuicem, atque y prorſus eliminabitur; fiet enim

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz-cc)}+z\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)ee-cc)}+e\sqrt{(n+1)}} = \left(\sqrt{\left(1+\frac{(m-1)xx}{aa}\right)} + \frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}\right)^2$$

eritque: $2\Pi. x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}(\Theta z - \Theta e) = \frac{\sqrt{m(n+1)}}{2cc} \times$

$$\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aae\sqrt{((n+1)ee-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{2ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right).$$

107. Statuatur iam $\frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}} = 2$, ſeu $cc = \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{2\sqrt{n(m-1)}}$ erit per $\frac{1\pi}{2}$ multiplicando

$$\text{Sup. BM} + \text{Sup. } en = \frac{\pi\sqrt{m(n+1)}}{2cc} \times$$

$$\left(\frac{aae\sqrt{((n+1)zz-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aae\sqrt{((n+1)ee-cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{2ccx\sqrt{(aa+(m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$$

vnde

vnde facile radius circuli aequalis definitur.

108. Sit nunc pro caſu Hugeniano $x = a$, et $e = c$, erit:

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz - cc)} + z\sqrt{(n+1)}}{c(\sqrt{n} + \sqrt{(n+1)})} = (\sqrt{m} + \sqrt{(m-1)})^2$$

Hincque inuento z, exiſtenteque $ec = \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{2\sqrt{n(m-1)}}$, erit

$$\text{Sup.}\,BA + \text{Sup.}\,an = \frac{\pi\sqrt{m(n+1)}}{2cc}\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz - cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aacc\sqrt{n}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{2aacc\sqrt{m}}{\sqrt{(n+1)}}\right).$$

Solutio Generalis.

109. Si hac ratione continuo vlterius progrediamur, vt ſupra pro parabola eſt factum, reperietur, ſi abſciſſa $cq = z$ exiſtente, $cf = e$ ita capiatur, vt ſit

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz - cc)} + z\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{((n+1)ee - cc)} + e\sqrt{(n+1)}} = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{(m-1)xx}{aa}\right)} + \frac{x}{a}\sqrt{(m-1)}\right)^{\mu}$$

fore $\mu\,\Pi x + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}}(\Theta z - \Theta e) = \frac{\sqrt{m(n+1)}}{2cc} \times$

$$\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz - cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aae\sqrt{((n+1)ee - cc)}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{\mu ccx\sqrt{(aa + (m-1)xx)}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$$

$$= \frac{\mu}{2\pi}\,\text{Sup.}\,BM + \frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{2\pi cc\sqrt{n(m-1)}}\,\text{Sup.}\,en.$$

110. Pro caſu ergo Hugenii, poſito $x = a$, et $e = c$, fiat $\frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}} = \mu$; et capiatur abſciſſa $cq = z$, ita vt ſit:

$$\frac{\sqrt{((n+1)zz - cc)} + z\sqrt{(n+1)}}{c(\sqrt{n} + \sqrt{(n+1)})} = (\sqrt{m} + \sqrt{(m-1)})^{\mu}$$

eritque

$$\text{Sup.}\,BA + \text{Sup.}\,an = \frac{\pi\sqrt{m(n+1)}}{\mu cc}\left(\frac{aaz\sqrt{((n+1)zz - cc)}}{\sqrt{(m-1)}} - \frac{aacc\sqrt{n}}{\sqrt{(m-1)}} + \frac{\mu aacc\sqrt{m}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$$

ſiue

$$\text{Sup.}\,BA + \text{Sup.}\,an = \pi\left(z\sqrt{n((n+1)zz - cc)} - nec + \frac{\mu cc\sqrt{mn(m-1)}}{\sqrt{(n+1)}}\right)$$

$$= \pi(z\sqrt{n((n+1)zz - cc)} - nec + maa).$$

 111. Quae-

111. Quaecunque ergo fuerit hyperbola, ex qua conoides naſcitur, dummodo ſit $\frac{aa\sqrt{m(n+1)}}{cc\sqrt{n(m-1)}} = \mu$ numerus rationalis, ab eo ſemper portio *an* abſcindi poterit, cuius ſuperficies ad ſuperficiem ſphaeroidis BMA addita, per circulum exhiberi poteſt, cuius radius *r* geometrice eſt aſſignabilis: erit enim

$$r = \sqrt{(maa - ncc + z\sqrt{n}((n+1)zz - cc))}.$$

112. Quo autem facilius pateat, quomodo abſciſſa $cq = z$ reperiri debeat, cum ſit

$$\sqrt{\left(\frac{(n+1)zz}{cc} - 1\right)} + \frac{z}{c}\sqrt{(n+1)} = (\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n})(\sqrt{m} + \sqrt{(m-1)})^{\mu}$$

erit

$$\frac{z}{c}\sqrt{(n+1)} - \sqrt{\left(\frac{(n+1)zz}{cc} - 1\right)} = (\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{(m-1)})^{\mu}$$

hinc facile tam z, quam $\sqrt{((n+1)zz - cc)}$ colligentur.

113. Hinc autem porro concluditur, fore

$$z\sqrt{n}((n+1)zz - cc) = \frac{cc\sqrt{n}}{4\sqrt{(n+1)}}(\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n})^2(\sqrt{m} + \sqrt{(m-1)})^{2\mu}$$
$$- \frac{cc\sqrt{n}}{4\sqrt{(n+1)}}(\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n})^2(\sqrt{m} - \sqrt{(m-1)})^{2\mu}$$

At ſi ponatur breuitatis gratia $\sqrt{(m + \sqrt{(m-1)})} = M$, et $\sqrt{n} + \sqrt{(n+1)} = N$, erit $z = \frac{c}{2\sqrt{(n+1)}}(M^{\mu}N - M^{-\mu}N^{-1})$, et

$$r = \sqrt{(maa + \frac{cc\sqrt{n}}{4\sqrt{(n+1)}}(M^{\mu} - M^{-\mu})(M^{\mu}N^2 + M^{-\mu}N^{-2})}$$

ſicque problema non difficulter conſtruitur, dummodo exponens μ fuerit rationalis.

114. Haec igitur exempla ſufficiant vſum, nouae methodi, quam adumbraui, oſtendiſſe; etſi enim haec eadem exempla methodo conſueta iam ſint ſoluta, tamen non ſolum ad calculos admodum intricatos deueniri

niri ſolet, ſed etiam integratione, qua formulae differentiales, vel ad quadraturam circuli, vel ad logarithmos reducantur, abſolute eſt opus. Huius igitur nouae methodi inſigne commodum in hoc conſiſtit, quod eius beneficio eadem problemata, tam ſine laborioſo calculo, quam ſine vlla integratione reſolui queant; quam ob cauſam inde merito multo maiora ac ſublimiora expectare licet, quae vim omnium conſuetarum methodorum penitus ſuperent.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS ET SOLVTIO PROBLEMATIS IN ACTIS ERVD. LIPSIENSIBVS PROPOSITORVM.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema iſtud et Problema verſantur circa arcus ellipticos; illo ſemiſſis ellipſeos quaeque ita ſecatur, vt partium differentia ſit geometrice aſſignabilis, hoc vero conſtructio geometrica arcus poſtulatur, qui ſit ſemiſſis quadrantis elliptici. Tam demonſtratio Theorematis, quam ſolutio Problematis, ſequuntur ex iis, quae iam aliquoties de comparatione linearum curuarum praelegi; et quoniam methodus, qua hoc argumentum pertractaui, non ſolum noua, ſed etiam plurimum recondita videbatur, has propoſitiones ideo publicare conſtitueram, vt alii quoque vires ſuas in iis euoluendis exercerent, nouisque methodis, quibus forte eo pertingerent, fines Analyſeos amplificarent. Cum autem nemo adhuc ſit inuentus, qui hoc negotium cum ſucceſſu ſuſceperit, etiamſi vix dubitare liceat, quin plures id fruſtra tentauerint, merito mihi quidem inde concludere videor, praeter methodum, qua ego ſum vſus, vix vllam aliam viam ad huiusmodi ſpeculationes patere. Quia enim haec methodus perquam indirecte, et quaſi per ambages procedit, neque veriſimile

mile ſit, eam cuiquam, qui huiusmodi problemata ſit aggreſſurus, vnquam in mentem venire, mirum non eſt, has quaeſtiones ab aliis intactas eſſe relictas. Etſi igitur iam aliquot ſpecimina huius methodi ſingularis ediderim, tamen operae pretium fore arbitror, ſi eius explicationem magis illuſtrauero, atque ad enodationem Problematis ac Theorematis propoſiti, accuratius accommodauero, vt ea, ſaepius tractando, magis trita et familiaris reddatur. Cum enim eius ope ad maxime abſconditas proprietates ellipſis aliarumque curuarum, quaſi inopinato ſim deductus, nullum eſt dubium, quin in ea plurima alia profundiſſimae indaginis contineantur, quae non niſi poſt frequentiorem tractionem inde eruere liceat.

Lemma I.

1. Si binae variabiles x et y ita a ſe inuicem pendeant, vt ſit:

$$0 = \alpha + \beta(xx + yy) + 2\gamma xy + \delta xxyy$$

erit ſiue ſumma, ſiue differentia, harum formularum integralium

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)yy - \beta\delta y^4)}} \pm \int \frac{dx}{\sqrt{(-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)xx - \beta\delta x^4)}}$$

aequalis quantitati conſtanti.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $0 = \alpha + \beta\, xx + yy) + 2\gamma xy + \delta xxyy$, erit inde vtramque radicem extrahendo:

$$y = \frac{-\gamma x \pm \sqrt{(-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)xx - \beta\delta x^4)}}{\beta + \delta xx}$$

$$x = \frac{-\gamma y \pm \sqrt{(-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)yy - \beta\delta y^4)}}{\beta + \delta yy}$$

 vnde

vnde ſequitur fore:

$$\beta y+\gamma x+\delta xxy=\pm\sqrt{(-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)xx-\beta\delta x^4)}$$
$$\beta x+\gamma y+\delta xyy=\pm\sqrt{(-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)yy-\beta\delta y^4)}$$

Quodſi vero aequatio propoſita differentietur, orietur:

$$0=\beta xdx+\beta ydy+\gamma ydx+\gamma xdy+\delta xyydx+\delta xxydy$$

ſeu $0=dx(\beta x+\gamma y+\delta xyy)+dy(\beta y+\gamma x+\delta xxy)$

quae abit in hanc:

$$\frac{dy}{\beta x+\gamma y+\delta xyy}+\frac{dx}{\beta y+\gamma x+\delta xxy}=0.$$

Subſtituantur loco denominatorum formulae illae irrationales, vt prodeant duo membra differentialia, in quibus variabiles x et y ſint a ſe inuicem ſeparatae, ac ſumendis integralibus obtinebitur:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)yy-\beta\delta y^4)}}\pm\int\frac{dx}{\sqrt{(-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)xx-\beta\delta x^4)}}=\text{Conſt.}$$

Coroll. 1.

2. Summa harum formularum integralium erit conſtans, ſi in vtraque radicis extractione ſignis radicalibus paria tribuantur ſigna; ſin autem ſigna ſtatuantur diſparia, tum differentia formularum integralium erit conſtans.

Coroll. 2.

3. Si ponamus:

$$-\alpha\beta=Ak;\quad \gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta=Bk;\quad -\beta\delta=Ck,$$

vnde fiet:

$$\alpha=\frac{-Ak}{\beta};\quad \delta=\frac{-Ck}{\beta},\quad \text{et } \gamma=\frac{\sqrt{(ACkk+Bk\beta\beta+\beta^4)}}{\beta}$$

Quare ſi relatio inter x et y hac aequatione exprimatur:

$$0=-Ak+\beta\beta(xx+yy)+2xy\sqrt{(ACkk+Bk\beta\beta+\beta^4)}-Ckxxyy$$

erit

erit

$$\int \frac{dy}{\sqrt{CA+Byy+Cy^4)}} \pm \int \frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}} = \text{Conſt.}$$

Coroll. 3.

4. Subſtitutis autem loco α, δ, γ his valoribus, erit

$$y = \frac{-x\sqrt{(ACkk+Bk\beta\beta+\beta^4)} \pm \beta\sqrt{k(A+Bxx+Cx^4)}}{\beta\beta - Ckxx}$$

$$x = \frac{-y\sqrt{(ACkk+Bk\beta\beta+\beta^4)} \pm \beta\sqrt{k(A+Byy+Cy^4)}}{\beta\beta - Ckyy)}$$

qui ergo ſunt valores illi aequationi integrali conuenientes, et quia in his formulis ineſt conſtans arbitraria $\frac{\beta\beta}{k}$, eae integrale completum exhibere ſunt cenſendae.

Coroll. 4.

5. Ad has formulas commodiores reddendas, quia poſito $x=0$ fit $y=\pm\frac{\sqrt{Ak}}{\beta}$, ponatur $\frac{\sqrt{Ak}}{\beta}=f$; et prodibit:

$$y = \frac{x\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)} + f\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)}}{A - Cffxx}$$

$$x = \frac{y\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)} \pm f\sqrt{A(A+Byy+y^4)}}{A - Cffyy}$$

quae ſunt radices huius aequationis:

$$0 = -Aff + A(xx+yy) - 2xy\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)} - Cffxxyy$$

Coroll. 5.

6. Si ergo relatio inter x et y hac aequatione exprimatur:

$$0 = -Aff + A(xx+yy) \pm 2xy\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)} - Cffxxyy$$

tum erit:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}} \pm \int \frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}} = \text{Conſt.}$$

ſeu $\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}} \pm \frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}} = 0.$

Coroll. 6.

7. Viciſſim ergo ſi habeatur haec aequatio differentialis:

$$\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}}+\frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}}=0$$

relatio inter x et y ita ſe habebit, vt ſit:

$$y=\frac{-x\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+f\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)}}{A-Cffxx}$$

ſeu $x=\frac{-y\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+f\sqrt{A(A+Byy+Cy^4)}}{A-Cffyy}$.

Coroll. 7.

8. Verum propoſita hac aequatione differentiali:

$$\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}}-\frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}}=0$$

aequatio integralis completa erit:

$$y=\frac{x\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+f\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)}}{A-Cffxx},$$

ſeu $x=\frac{y\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}-f\sqrt{A(A+Byy+Cy^4)}}{A-Cffyy}$.

Scholion.

9. Retinebo determinationes huius poſtremi caſus, quibus efficitur, quod ſi relatio inter binas variabiles x et y fuerit

$$0=-Aff+A(xx+yy)-2xy\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}-Cffxxyy,$$

ſiue $y=\frac{x\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+f\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)}}{A-Cffxx}$

et $x=\frac{y\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}-f\sqrt{A(A+Byy+Cy^4)}}{A-Cffyy}$

tum hanc aequationem differentialem locum habere:

$$\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}}-\frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}}=0,$$

ſeu ſumtis integralibus fore:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}}-\int\frac{dx}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}}=\text{Conſt.}$$

Pro

Pro hoc ergo caſu erit:

$$\sqrt{}(A+Bxx+Cx^4)=\frac{y(A-Cffxx)-x\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)}{f\sqrt{}A}$$

et $$\sqrt{}(A+Byy+Cy^4)=\frac{-x(A-Cffyy)+y\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)}{f\sqrt{}A}$$

ſicque fiet:

$$\frac{fdy\sqrt{}A}{y\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)-x(A-Cffyy)}+\frac{fdx\sqrt{}A}{x\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)-y(A-Cffxx)}=0.$$

Lemma 2.

10. Eadem manente relatione inter binas variabiles x et y, vt ſit $0=-Aff+A(xx+yy)-2xy\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)-Cffxxyy$, ſeu

$$y=\frac{x\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)+f\sqrt{}A(A+Bxx+Cx^4)}{A-Cffxx}$$

et $$x=\frac{y\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)-f\sqrt{}A(A+Byy+Cy^4)}{A-Cffyy}$$

erit differentia harum formularum integralium

$$\int\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy)}{\sqrt{}(A+Byy+Cy^4)}-\int\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx)}{\sqrt{}(A+Bxx+Cx^4)}$$

geometrice aſſignabilis.

Demonſtratio.

Ad hoc oſtendendum ponamus hanc differentiam $=V$, vt ſit:

$$\frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy)}{\sqrt{}(A+Byy+Cy^4)}-\frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx)}{\sqrt{}(A+Bxx+Cx^4)}=dV$$

Quare cum ſit $\frac{dy}{\sqrt{}(A+Byy+Cy^4)}=\frac{dx}{\sqrt{}(A+Bxx+Cx^4)}$, erit

$$dV=\frac{\mathfrak{B}(yy-xx)dx}{\sqrt{}(A+Bxx+Cx^4)}=\frac{\mathfrak{B}f(yy-xx)dx\sqrt{}A}{y(A-Cffxx)-x\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)}.$$

Ponamus iam $xy=u$, vt ſit $y=\frac{u}{x}$; et

$$0=-Aff+Axx+\frac{Auu}{xx}-2u\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)-Cffuu$$

qua aequatione differentiata fit:

$$0=Axdx-\frac{Auudx}{x^3}+\frac{Audu}{xx}-du\sqrt{}A(A+Bff+Cf^4)-Cffudu;$$

vnde, ob $\frac{u}{x} = y$, per x multiplicando oritur:

$$\frac{dx}{y(A - Cffxx) - x\sqrt{A(A + Bff + Cf^4)}} = \frac{du}{A(yy - xx)}$$

quae multiplicata per $\mathfrak{B}f(yy - xx)\sqrt{A}$ praebet:

$$dV = \frac{\mathfrak{B}f\,du}{\sqrt{A}} \text{ et } V = \text{Conſt.} + \frac{\mathfrak{B}fxy}{\sqrt{A}}.$$

Quam ob rem pro formularum integralium differentia habebimus:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}yy)}{\sqrt{(A + Byy + Cy^4)}} - \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx)}{\sqrt{(A + Bxx + Cx^4)}} = \text{Conſt.} + \frac{\mathfrak{B}fxy}{\sqrt{A}}$$

quae vtique eſt geometrice aſſignabilis.

Coroll. 1.

11. Propoſitis ergo duabus formulis integralibus ſimilibus

$$\int \frac{dy(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}yy)}{\sqrt{(A + Byy + Cy^4)}} \text{ et } \int \frac{dx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}xx)}{\sqrt{(A + Bxx + Cx^4)}}$$

eiusmodi relatio inter x et y exhiberi poteſt, vt harum formularum differentia fiat geometrice aſſignabilis.

Coroll. 2.

12. Hunc ſcilicet in finem talis relatio inter variabiles x et y ſtatui debet, vt ſit:

$$0 = -Aff + A(xx + yy) - 2xy\sqrt{A(A + Bff + Cf^4)} - Cffxxyy$$

cuius aequationis reſolutio cum ſit ambigua, capi debet:

$$y = \frac{x\sqrt{A(A + Bff + Cf^4)} + f\sqrt{A(A + Bxx + Cx^4)}}{A - Cffxx}$$

et $$x = \frac{y\sqrt{A(A + Bff + Cf^4)} - f\sqrt{A(A + Byy + Cy^4)}}{A - Cffyy}.$$

Coroll.

Coroll. 3.

13. Quemadmodum hic y per x et f, atque x per y et f definitur, ita etiam ſimili modo f per x et y definiri poteſt. Erit enim

$$f = \frac{y\sqrt{A(A+Bxx+Cx^4)} - x\sqrt{A(A+Byy+Cy^4)}}{A - Cxxyy}$$

vnde patet, ſi ſit $x=0$, fore $y=f$, ex quo caſu conſtans illa, in valorem ipſius V ingrediens, definiri debet.

Scholion.

14. Simili modo demonſtrari poteſt, etiam harum formularum integralium differentiam

$$\int \frac{dy(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}yy+\mathfrak{C}y^4+\mathfrak{D}y^6)}{\sqrt{(A+Byy+Cy^4)}} - \int \frac{dx(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}xx+\mathfrak{C}x^4+\mathfrak{D}x^6)}{\sqrt{(A+Bxx+Cx^4)}} = V$$

eſſe geometrice aſſignabilem: Poſito enim $xy=u$ erit:

$$dV = \frac{fdu}{(yy-xx)\sqrt{A}}(\mathfrak{B}(yy-xx)+\mathfrak{C}(y^4-x^4)+\mathfrak{D}(y^6-x^6)),$$ ideoque

$$dV = \frac{fdu}{\sqrt{A}}(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}(yy+xx)+\mathfrak{D}(y^4+xxyy+x^4))$$

At ex aequatione canonica habemus:

$$xx+yy = \frac{Aff+2u\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}+Cffuu}{A}$$

Ponamus breuitatis gratia $\sqrt{A(A+Bff+Cf^4)}=Fff$, vt ſit

$$xx+yy = \frac{ff}{A}(A+2Fu+Cuu),$$

eritque ob $y^4+xxyy+x^4=(xx+yy)-uu$

$$dV = \frac{fdu}{\sqrt{A}}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{B}+\frac{\mathfrak{C}ff}{A}(A+2Fu+Cuu)\\ +\frac{\mathfrak{D}f^4}{AA}(A+2Fu+Cuu)^2-\mathfrak{D}uu\end{array}\right\}$$

ideoque integrando:

$$V = \frac{f}{\sqrt{A}}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{B}u+\frac{\mathfrak{C}ff}{A}(Au+Fuu+\frac{1}{3}Cu^3)-\frac{1}{3}\mathfrak{D}u^3\\ +\frac{\mathfrak{D}f^4}{AA}(AAu+2AFuu+\frac{2}{3}(AC+2FF)u^3+CFu^4+\frac{1}{5}CCu^5\end{array}\right\}$$

Verum

Verum pro praeſenti inſtituto, quo ellipſis nobis eſt propoſita, formulae in lemmate exhibitae ſufficiunt.

Lemma 3.

Tab. III. Fig. 1. 15. Si C ſit centrum ellipſeos, eiusque ſemiaxes $CA = a$, $CB = b$; atque ad verticem A ducatur tangens AD, in qua ſumatur portio indefinita $AZ = z$, et ex Z ad AD perpendicularis erigatur ZMV, erit arcus, huic abſciſſae $AZ = z$ reſpondens, $AM = \int \frac{dz}{b} \sqrt{\frac{b^4 - (b^2 - aa)zz}{bb - zz}}$.

Demonſtratio.

Ponatur $ZM = v$; et ipſe arcus $AM = s$; erit ex natura ellipſis:

$$VM = a - v = \frac{a}{b} \sqrt{(bb - zz)}, \text{ hincque}$$

$$v = a - \frac{a}{b} \sqrt{(bb - zz)} \text{ et } dv = \frac{azdz}{b\sqrt{(bb - zz)}}.$$

Quare cum ſit $ds = \sqrt{(dz^2 + dv^2)}$, erit

$$ds = dz \sqrt{\left(1 + \frac{aazz}{bb(bb - zz)}\right)} = \frac{dz}{b} \sqrt{\frac{b^4 - (bb - aa)zz}{bb - zz}}.$$

et integrando:

$$s = \text{Arc. } AM = \int \frac{dz}{b} \sqrt{\frac{b^4 - (bb - aa)zz}{bb - zz}}$$

integrali ita accepto, vt euaneſcat, poſito $z = 0$.

Coroll. 1.

16. Ad hanc formulam contrahendam ponamus hic et in ſequentibus perpetuo $\frac{bb - aa}{bb} = n$, vt ſit $a = b\sqrt{(1 - n)}$, eritque

Arcus abſciſſae $AZ = z$ reſpondens $AM = \int dz \sqrt{\frac{bb - nzz}{bb - zz}}$.

Seu

Seu cum ſit $AM = \int \frac{dz(bb - nzz)}{\sqrt{(b^4 - (n+1)bbzz + nz^4)}}$, haec expreſſio ad noſtram formam tractatam $\int \frac{dz(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}zz)}{\sqrt{(A + Bzz + Cz^4)}}$ reducetur ponendo:

$\mathfrak{A} = bb$; $\mathfrak{B} = -n$; $A = b^4$; $B = -(n+1)bb$; $C = n$ ita vt ſit $\sqrt{(A + Bzz + Cz^4)} = \sqrt{(bb - zz)(bb - nzz)}$.

Coroll. 2.

17. Cum ob $a = b\sqrt{(1-n)}$ ſit $dv = \frac{zdz\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb - zz)}}$ et $ds = dz\sqrt{\frac{bb - nzz}{bb - zz}}$, erit anguli AMZ ſinus $= \frac{dz}{ds} = \sqrt{\frac{bb - zz}{bb - nzz}}$; coſinus $= \frac{dv}{ds} = \frac{z\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb - nzz)}}$ et tangens $= \frac{dz}{dv} = \frac{\sqrt{(bb - zz)}}{z\sqrt{(1-n)}}$: quas formulas probe notaſſe iuuabit

$$\text{ſinus } AMZ = \sqrt{\frac{bb - zz}{bb - nzz}}$$

$$\text{coſinus } AMZ = \frac{z\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{(bb - nzz)}}$$

$$\text{tang } AMZ = \frac{\sqrt{(bb - zz)}}{z\sqrt{(1-n)}}.$$

Coroll. 3.

18. Deſignabo porro arcum AM, qui abſciſſae cuique $AZ = z$ reſpondet, hac expreſſione $\Pi : z$, vt ſit $AM = \Pi : z = \int dz\sqrt{\frac{bb - nzz}{bb - zz}}$. Hinc ſi variae abſciſſae ponantur

$AF = f$; $AP = p$; $AQ = q$; $AR = r$; $AD = AB = b$

erunt arcus reſpondentes:

$Af = \Pi : f$; $Ap = \Pi : p$; $Aq = \Pi : q$; $Ar = \Pi : r$; $AMB = \Pi : b$.

Coroll. 4.

19. Hoc modo etiam arcus, qui non in puncto A terminantur, commode exprimi poterunt; ſic enim erit:

arcus $fp = \Pi : p - \Pi : f$; arcus $pq = \Pi : q - \Pi : p$
arcus $qr = \Pi : r - \Pi : q$; arcus $pr = \Pi : r - \Pi : p$

item arcus $Bp = \Pi : b - \Pi : p$; arcus $Bq = \Pi : b - \Pi : q$ Denotat enim $\Pi : b$ arcum totius quadrantis AMB; ideoque $4\,\Pi : b$ totam ellipſis peripheriam.

Problema I.

Tab. III. Fig. I. 20. Propoſito in ellipſi arcu Af in vertice A terminato, ab alio quouis puncto p arcum abſcindere pq, qui ab illo arcu Af diſcrepet quantitate geometrice aſſignabili.

Solutio.

Poſitis abſciſſis, quae punctis f, p et q reſpondent, $AF = f$; $AP = p$; et $AQ = q$, ex datis f et p conuenienter determinari oportet q. Cum igitur pro lemmate ſecundo ſit:

$$\mathfrak{A} = bb;\ \mathfrak{B} = -n;\ A = b^4;\ B = -(n+1)bb, \text{ et } C = n:$$

capiatur q ita, vt ſit:

$$q = \frac{bbp\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + bbf\sqrt{(bb-pp)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}$$

eritque per lemmatis concluſionem:

$$\int dq \sqrt{\frac{bb-nqq}{bb-qq}} - \int dp \sqrt{\frac{bb-npp}{bb-pp}} = \text{Conſt.} - \frac{nfpq}{bb}.$$

At eſt $\int dq \sqrt{\frac{bb-nqq}{bb-qq}} = \Pi : q$ et $\int dp \sqrt{\frac{bb-npp}{bb-pp}} = \Pi : p$, vnde:

$$\Pi : q - \Pi : p = \text{Conſt.} - \frac{nfpq}{bb}$$

vbi tantum ſupereſt, vt conſtans debite definiatur. Verum quia poſito $p = 0$, fit $q = f$, ad quem caſum aequa-

aequatione tranſlata fiet: $\Pi : f =$ Conſt. quo valore introducto habebimus:

$$\Pi : q - \Pi : p = \Pi : f - \frac{nfpq}{bb}$$

ſiue $\text{Arc} : pq = \text{Arc} : Af - \frac{nfpq}{bb}$.

Coroll. 1.

21. Quia vero eidem abſciſſae $AQ = q$, bina in ellipſi puncta q reſpondent, ad hoc punctum perfecte determinandum, etiam applicatae Qq magnitudo definiri debet: Eſt vero

$$Qq = a - \tfrac{a}{b}\sqrt{(bb-qq)} = (b - \sqrt{(bb-qq)})\sqrt{(1-n)}, \text{ et}$$

$$\sqrt{(bb-qq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)} + bfp\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}$$

Tum etiam notari meretur

$$\sqrt{(bb-nqq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)} - nbf\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)}}{b^4 - nffpp}$$

ſi igitur valor ipſius $\sqrt{(bb-qq)}$ fit negatiuus, punctum q in ſuperiori ellipſis quadrante capi debet.

Coroll. 2.

22. Hic igitur primo relatio notari debet, quae inter tria puncta f, p et q intercedit, quae ita eſt comparata, vt ex binis datis tertium inueniri poſſit:

I. Si f et p ſint data, erit

$$q = \frac{bbp\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + bbf\sqrt{(bb-pp)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}$$

$$\sqrt{(bb-qq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)} - bfp\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}$$

$$\sqrt{(bb-nqq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)} - nbfp\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)}}{b^4 - nffpp}$$

II. Si f et q ſint data, erit:

$$p = \frac{bbq\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} - bbf\sqrt{(bb-qq)(bb-nqq)}}{b^4 - nffqq}$$

$$\sqrt{(bb-pp)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-ff)(bb-qq)} + bfq\sqrt{(bb-nff)(bb-nqq)}}{b^4 - nffqq}$$

$$\sqrt{(bb-npp)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-nff)(bb-nqq)} + nbfq\sqrt{(bb-ff)(bb-qq)}}{b^4 - nffqq}$$

III. Si p et q ſint data, erit:

$$f = \frac{bbq\sqrt{(bb-pp)(bb-npp)} - bbp\sqrt{(bb-qq)(bb-nqq)}}{b^4 - nppqq}$$

$$\sqrt{(bb-ff)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-pp)(bb-qq)} + bpq\sqrt{(bb-npp)(bb-nqq)}}{b^4 - nppqq}$$

$$\sqrt{(bb-nff)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-npp)(bb-nqq)} + nbpq\sqrt{(bb-pp)(bb-qq)}}{b^4 - nppqq}$$

Hae autem formulae omnes ex hac naſcuntur:

$$0 = -b^4ff + b^4pp + b^4qq - 2bbpq\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} - nffppqq$$

quae adeo ad hanc rationalem, in qua f, p, et q aequaliter inſunt, reducitur:

$$0 = b^8(f^4+p^4+q^4) + 4(n+1)b^6ffppqq - 2b^8(ffpp+ffqq+ppqq) - 2nb^4ffppqq(ff+pp+qq) + nnf^4p^4q^4.$$

Coroll. 3.

23. Harum formularum igitur ope, ſi trium punctorum f, p et q data ſint bina quaecunque, tertium inueniri poterit, vt arcuum Af et pq differentia geometrice fiat aſſignabilis. Erit enim

$$\text{Arc. } Af - \text{Arc. } pq = \text{Arc. } Ap - \text{Arc. } fq = \frac{nfpq}{bb}.$$

Coroll. 4.

24. Denotat autem b ſemiaxem ellipſis CB, et poſito altero $CA = a$, fecimus $\frac{bb-aa}{bb} = n$; vnde ſi $n = 0$ ellipſis

ellipſis abit in circulum, et arcuum aſſignatorum differentia euaneſcit. Ellipſis autem abibit in parabolam, cuius ſemiparameter $= c$, ſi $bb = ac$, et $a = \infty$: Hoc ergo caſu fiet $n = \frac{c-a}{c} = -\frac{a}{c}$, et $\frac{n}{bb} = -\frac{1}{cc}$: ideoque $n = -\frac{bb}{cc}$ et $\sqrt{(bb-ff)} = b$; $\sqrt{(bb-nff)} = b\sqrt{(1-\frac{ff}{cc})}$: vnde formulae ſuperiores ad parabolam transferri poterunt.

Coroll. 5.

25. Si easdem formulas ad hyperbolam accommodare velimus, ſemiaxem b ita imaginarium ſtatui oportet, vt eius quadratum bb fiat quantitas negatiua. Seu, quod eodem redit, in noſtris formulis vbique loco bb ſcribatur $-bb$, et ſemiaxis a capiatur negatiue, tum vero n erit numerus vnitate maior.

Problema 2.

26. In quadrante elliptico AB, dato puncto quocunque f, inuenire aliud punctum g, vt arcuum Af et Bg differentia ſit geometrice aſſignabilis. Tab. III. Fig. 2.

Solutio.

Ex praecedente problemate hoc facile reſoluitur; poſitis enim ſemiaxibus CA $= a$, CB $= b$ et $\frac{bb-aa}{bb} = n$; punctum q in praecedente problemate in B vsque promoueri oportet, vt fiat $q = b$; tum ſint abſciſſae ſuper tangente AD vel axe AB ſumtae, punctis f et g reſpondentes, AF $=$ Cf $= f$ et AG $=$ CG $= g$, ita vt, quod ante erat p, nunc ſit g, atque ex dato puncto f

determinatio puncti g per formulas (§. 22.) ita ſe habebit, ob $p = g$ et $q = b$.

$$g = \frac{b^3 \surd(bb - ff)(bb - nff)}{b^4 - nbbff} = b \surd \frac{bb - ff}{bb - nff}:$$

$$\surd(bb - gg) = \frac{bbf \surd(bb - nff)(bb - nbb)}{b^4 - nbbff} = \frac{bf \surd(1 - n)}{\surd(bb - nff)}$$

$$\surd(bb - ngg) - \frac{b^3 \surd(bb - nff)(bb - nbb)}{b^4 - nbbff} = \frac{bb \surd(1 - n)}{\surd(bb - nff)}.$$

Vnde ſi anguli, quos applicatae Ff et Gg cum curua faciunt, in computum ducantur, erit

$$g = b \text{ ſin } Af\text{F} \text{ et } f = b \text{ ſin } Ag\text{G}.$$

Atque hinc ſequitur iſta conſtructio pro puncto g inueniendo: Ad punctum f ducatur tangens fT, donec axi CA producto occurrat in T, tum in ea, ſi opus eſt, producta capiatur TV $=$ CB $= b$, et per V agatur recta $\mathfrak{G}$G axi CA parallela, eritque punctum g quaeſitum, ita vt arcuum Af et Bg differentia ſit geometrice aſſignabilis. Verum ex problemate praecedente, ob $p = g$ et $q = b$, erit haec differentia:

$$\text{Arc.} Af - \text{Arc.} Bg = \frac{nfg}{b} = nf \surd \frac{bb - ff}{bb - nff}.$$

Ad quam conſtruendam notetur eſſe:

$$\text{F}f = \frac{\text{AF}}{\text{ſin AfF}} = f \surd \frac{bb - nff}{bb - ff}.$$

et ex natura ellipſis:

$$\text{CT} = \frac{ab}{\surd(bb - ff)} = \frac{bb \surd(1 - n)}{\surd(bb - ff)}.$$

Hinc ſi ex centro ellipſis C in tangentem Ff demittatur perpendiculum CS, ob ang. CTS $=$ ang. AfF, eiusque ſinum $= \surd \frac{bb - ff}{bb - nff}$ et coſinum $= \frac{f\surd(1 - n)}{\surd(bb - nff)}$, erit

$$\text{TS} = \text{CT cof. CTS} = \frac{bbf(1 - n)}{\surd(bb - ff)(bb - nff)} \text{ hincque}$$

$$\text{S}f = \text{T}f - \text{T}s = \frac{bbf - nf^3 - bbf + nbbf}{\surd(bb - ff)(bb - nff)} = \frac{nf(bb - ff)}{\surd(bb - ff)(bb - nff)} = nf \surd \frac{bb - ff}{bb - nff}$$

Portio

Portio igitur tangentis fS, inter perpendiculum CS et punctum contactus f contenta, praebebit differentiam arcuum Af et Bg, ita vt ſit:

$$\text{Arc.}\,Af - \text{Arc.}\,Bg = \text{Arc.}\,Ag - \text{Arc}\,Bf = Sf.$$

Coroll. 1.

27. Haec differentia arcuum facilius inueniri poteſt, ſi in f ad tangentem ducatur normalis $f\mathfrak{S}$; tum enim ex natura ellipſis ſtatim conſtat, eſſe $C\mathfrak{S} = f - \frac{aa}{bb}f = nf$. Quare cum CS ipſi $\mathfrak{S}f$ ſit parallela, et angulus $BCS = CTS = TfF$, eiusque ergo ſinus $= \sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}}$, erit

$$Sf = C\mathfrak{S}\,\text{ſin}\,BCS = nf\sqrt{\frac{bb-ff}{bb-nff}}.$$

Coroll. 2.

28. Simili modo ex puncto g definietur punctum f; ſi enim ad g ducatur tangens vsque ad axem CA, atque ab interſectione eius cum axe in ea capiatur portio alteri ſemiaxi CB aequalis, haec praeciſe in recta Ff terminabitur, ideoque punctum f monſtrabit.

Coroll. 3.

29. Conſtructio ergo puncti g ex dato puncto f ita ſe habebit: Ad punctum f ducatur tangens, axi CA producto occurrens in T, in eaque a T abſcindatur portio TV, ſemiaxi CB aequalis, et recta $G\mathfrak{G}$ axi CA parallela, per punctum V acta, in ellipſi punctum quaeſitum g definiet. Tum enim, ſi ex centro ellipſis C in illam tangentem perpendiculum CS demittatur, erit:

erit Arc. Af — Arc. Bg = Rectae Sf, hincque etiam Arc. Af — Recta fS = Arc. Bg.

Coroll. 4.

Tab. III. Fig. 3. 30. Caſus notabilis eſt, quo bina puncta f et g in vnum colliqueſcunt, ita vt arcus quadrantis AfB in puncto f ita ſecari iubeatur, vt partium Af et Bf differentia fiat geometrice aſſignabilis. Hunc in finem ponatur in ſolutione $g = f$, vnde fit $f = b\surd\frac{bb-ff}{bb-nff}$ hincque $2bbff - nf^4 = b^4$, et $\frac{bb}{ff} = 1 + \surd(1-n) = \frac{a+b}{b}$. Quare pro puncto hoc f capi debet abſciſſa $AF = f = b\surd\frac{b}{a+b}$: atque, ob $\surd\frac{bb-ff}{bb-nff} = \frac{f}{b}$, erit partium differentia $Af - Bf = \frac{nff}{b} = \frac{nbb}{a+b}$, quae cum ſit $n = \frac{bb-aa}{bb}$, abit in $Af - Bf = b - a$, ita vt aequalis euadat differentiae ſemiaxium. Vnde puncto f hoc modo definito, vt ſit $f = b\surd\frac{b}{a+b}$, erit etiam

$$AC + Af = BC + Bf$$

ſeu ducto radio Cf ambo trilinea ACf et BCf pari perimetro includuntur.

Coroll. 5.

31. Quia ſupra habuimus $CT = \frac{ab}{\surd(bb-ff)}$, erit pro praeſenti caſu $CT = \surd(aa+ab)$ ob $ff = \frac{b^3}{a+b}$; vnde ſequens concinna puncti f conſtructio deducitur. Biſecto ſemiaxe BC in O, interuallo $OT = OC + AC$, definiatur in CA producta punctum T, vnde interuallo $Tf = BC$ punctum f in ellipſi deſignetur: eritque f punctum quaeſitum, et recta Tf eius tangens.

Proble-

Problema 3.

32. Propoſita ſemiellipſi $AB\alpha$, in eaque ſumto quocunque puncto p, definire punctum q ita, vt arcus pBq differat a quadrante elliptico ApB quantitate geometrice aſſignabili. Tab. III. Fig. 4.

Solutio.

Poſitis, vt hactenus, ſemiaxibus $CA = a$, $CB = b$ et ad abbreuiandum $n = \frac{bb - aa}{bb}$, in ſolutione problematis primi promoueatur punctum f in B vsque, eritque vi eius arcuum AB et pq differentia geometrice aſſignabilis, vti requiritur. Demiſſis ergo ad tangentem AD ex p et q perpendiculis pP et qQ, ſint $AP = p$ et $AQ = q$, atque ob $f = b$ habebimus ex (22)

$$q = \frac{b\surd(bb - pp)(bb - npp)}{bb - npp} = b\surd\frac{bb - pp}{bb - npp}$$

$$\surd(bb - qq) = \frac{-p\surd(bb - nbb)(bb - npp)}{bb - npp} = \frac{-bp\surd(1 - n)}{\surd(bb - npp)}$$

cuius quantitatis ſignum $-$ indicat, vlteriorem interſectionem perpendiculi QK pro puncto q accipi oportere, ſecus atque in problemate praecedente. Cum igitur $\surd\frac{bb - pp}{bb - npp}$ exprimat ſinum anguli, quem applicata Pp cum curua facit, erit $q = b$ ſin ApP. Ad Qq, ſi opus eſt, productam, ex centro C dirigatur recta CK, ſemiaxi $CB = b$ aequalis, vt ſit $CK = b$, eritque $\frac{q}{b} = \frac{CQ}{CK} =$ ſin ApP, hincque ſin $CKQ =$ ſin ApP et $CKQ = ApP$. Ex quo patet rectam CK parallelam fore tangenti in puncto p. Quare iuncta Cp, eaque, vt ſemidiametro ſpectata, erit CL eius ſemidiameter coniugata, in qua proinde producta, ſi capiatur $CK = CB$,

 perpen-

perpendiculum KQ ad CB demiſſum in ellipſi definiet punctum q. Quo inuento ob $f = b$; et $q = b\sqrt{\frac{bb - pp}{bb - nn\,pp}}$ erit arcuum differentia:

$$\text{Arc. AB} - \text{Arc.}\,pq = \frac{nfpq}{bb} = np\sqrt{\frac{bb-pp}{bb-nn\,pp}} = np\,\text{ſin}\,\text{A}p\text{P}.$$

Ducatur ad ellipſin in p normalis $p\mathfrak{N}$, erit C$\mathfrak{N} = np$, et producta $p\mathfrak{N}$ in N angulus C$\mathfrak{N}$N = ang. ApP: quare cum haec pN futura ſit normalis in diametrum coniugatam CL, erit CN $= np\,$ſin ApP; vnde demiſſo ex p in CL perpendiculo, interuallum CN aequabitur differentiae illorum arcuum, ita vt ſit:

$$\text{Arc. AB} - \text{Arc.}\,pq = \text{CN}.$$

Coroll. 1.

33. Cum igitur punctum p pro lubitu aſſumi poſſit, infiniti arcus pq exhiberi poſſunt, qui a quadrante AB differunt quantitate geometrice aſſignabili. Quare etiam hi arcus inter ſe different quantitate geometrice aſſignabili.

Coroll. 2.

34. Ex dato ergo puncto p punctum q ita definitur: Ad ductam Cp iungatur ſemidiameter coniugata CL in K producenda, vt fiat CK aequalis ſemiaxi CB, ad quem ex K perpendiculum demittatur KQ, ellipſin ſecans in q, erit q punctum quaeſitum. Atque demiſſo ex p in CL perpendiculo pN, erit AB $- pq =$ CN.

Coroll. 3.

35. Quoties perpendiculum pN intra C et K cadit, arcus pq erit minor quadrante AB, contra autem, ſi ad alteram partem cadit, maior. Ita ſi prius punctum in π detur, et rectae $C\pi$ conueniat ſemidiameter coniugata CL, qua producta in K, vt ſit $CK = CB$, et ex K ad CB, demiſſo perpendiculo KQ ſecante ellipſin in q, quia hic perpendiculum $\pi\nu$ in CL demiſſum ad alteram partem cadit, erit arcus πq — arcu $AB = C\nu$. Tab. III. Fig. 5.

Theorema demonſtrandum.

36. Si ellipſis $AB\alpha\beta$ diametro quacunque $p\pi$ Fig. 5. fuerit biſecta, ad eamque ducatur diameter coniugata $L\lambda$, cuius ſemiſſis CL producatur in K, vt fiat CK alteri ſemiaxi principali CB aequalis, ad quem ex K demittatur perpendiculum KQ, ellipſin ſecans in q, tum ellipſis ſemiperimeter $pBL\alpha\pi$ ita ſecabitur in q, vt partium $\pi\alpha q$ et pBq differentia ſit geometrice aſſignabilis. Ductis enim ex p et π ad diametrum coniugatam $L\lambda$ normalibus pN et $\pi\nu$, interuallum $N\nu$ illi differentiae ita aequabitur, vt ſit Arc. $\pi\alpha q$ — Arc $pBq = N\nu$.

Demonſtratio.

Quia CL eſt ſemidiameter coniugata conueniens ſemidiametro Cp, ex conſtructione, qua punctum q eſt definitum, patet per §. 34. fore:

Arc. AB — Arc. $pq = CN$.

Deinde, quia CL eſt quoque ſemidiameter coniugata conueniens ſemidiametro $C\pi$, ex §. 35. patet eſſe:

$$\text{Arc.}\,\pi q - \text{Arc.}\,AB = C\nu.$$

Addantur hae duae aequationes, ac reſultabit

$$\text{Arc.}\,\pi q - \text{Arc.}\,pq = CN + C\nu = N\nu.$$

Coroll.

37. Perinde eſt, vtri ſemiaxi principali ſemidiameter CL producta, eiusue portio, aequalis capiatur, dummodo ex eius termino ad eum ipſum axem perpendiculum demittatur. Ita in CL potuiſſet abſcindi portio Ck ſemiaxi minori $C\alpha$ aequalis; recta enim qkq, per k ad $C\alpha$ normaliter ducta, in ellipſi idem punctum q prodidiſſet.

Scholion.

38. En ergo demonſtrationem completam Theorematis in Actis Erud. Lipſ. propoſiti, quae ita eſt comparata, vt nullo modo ex vulgaribus ellipſis proprietatibus deriuari potuiſſet, neque etiam Analyſis infinitorum multum auxilii attulerit, niſi hoc ipſo modo, quo hic ſum vſus, in ſubſidium vocetur. Ex profundis quidem ſpeculationibus Ill. Comitis Fagnani hanc quoque demonſtrationem deducere liceret; verum inde vix via pateret, ad problema ibidem propoſitum reſoluendum, in cuius ergo gratiam ſequentia ſunt praemittenda.

Problema 4.

Tab. IV. Fig. 1. 39. Arcum ellipticum quemcunque Ag ad alterum axem principalem in A terminatum ita ſecare in

f, vt

f, vt partium Af et fg differentia ſit geometrice aſſignabilis.

Solutio.

Poſitis ſemiaxibus $CA = a$, $CB = b$, et breuitatis gratia $n = \frac{bb - aa}{bb}$, in verticis A tangente AD ſumantur abſciſſae, ac ponatur abſciſſa toti arcui Ag dato [illegible]reſpondens $AG = g$, quaeſita autem, quae puncto f reſpondeat, [illegible] Cum igitur differentia arcuum Af et fg debeat eſſe geometrice[illegible] et quaeſtio continetur in Probl. I. ſumendo ibi $p = f$, et $q = g$, vnde obtinebimus has formulas:

$$g = \frac{2bbf\surd((bb-ff)(bb-nff))}{b^4 - nf^4}$$

$$\surd(bb-gg) = \frac{b^3(bb-ff) - bff(bb-nff)}{b^4 - nf^4} = \frac{b(b^4 - 2bbff + nf^4)}{b^4 - nf^4}$$

$$\surd(bb-ngg) = \frac{b^3(bb-nff) - nbff(bb-ff)}{b^4 - nf^4} = \frac{b(b^4 - 2nbbff + nf^4)}{b^4 - nf^4}$$

Ex quibus combinatione oritur:

$$\surd(bb-ngg) - n\surd(bb-gg) = \frac{(1-n)b(b^4 + nf^4)}{b^4 - nf^4}$$ hincque

$$\frac{nf^4}{b^4} = \frac{\surd(bb-ngg) - n\surd(bb-gg) - (1-n)b}{\surd(bb-ngg) - n\surd(bb-gg) + (1-n)b}$$

quae formula reducitur ad

$$\frac{nnf^4}{b^4} = \frac{(\surd(bb-ngg) - n\surd(bb-gg) - (1-n)b)^2}{2bb - (1+n)gg - 2\surd((bb-gg)(bb-ngg))}$$

vnde radice quadrata extracta fit:

$$\frac{nff}{bb} = \frac{\surd(bb-ngg) - n\surd(bb-gg) - (1-n)b}{\surd(bb-ngg) - \surd(bb-gg)} = \frac{(b-\surd(bb-gg))(b-\surd(bb-ngg))}{gg}$$

ex qua porro elicimus:

$$\frac{bb-nff}{bb} = \frac{(1-n)(b-\surd(bb-gg))}{\surd(bb-ngg) - \surd(bb-gg)} = \frac{(b-\surd(bb-gg))(\surd(bb-ngg) + \surd(bb-gg))}{gg}$$

$$\frac{n(bb-ff)}{bb} = \frac{(1-n)(b-\surd(bb-ngg))}{\surd(bb-ngg) - \surd(bb-gg)} = \frac{(b-\surd(bb-ngg))(\surd(bb-ngg) + \surd(bb-gg))}{gg}$$

 Punctum

Punctum igitur quaeſitum f ita determinabitur, vt ſit:

$$f = \frac{b}{g\sqrt{n}} \sqrt{(b-\sqrt{(bb-gg)})(b-\sqrt{(bb-ngg)})}$$

$$\sqrt{(bb-ff)} = \frac{b}{g\sqrt{n}} \sqrt{(b-\sqrt{(bb-ngg)})(\sqrt{(bb-gg)}+\sqrt{(bbn-gg)})}$$

$$\sqrt{(bb-nff)} = \frac{b}{g} \sqrt{(b-\sqrt{(bb-gg)})(\sqrt{(bb-gg)}+\sqrt{(bb-ngg)})}$$

Verum hoc puncto f ita determinato, ob $p=f$ et $q=g$, partium inuentarum differentia erit

$$\text{Arc. } Af - \text{Arc. } fg = \frac{nffg}{bb} = \frac{(b-\sqrt{(bb-gg)})(b-\sqrt{(bb-ngg)})}{\dots}$$

Coroll. 1.

40. Caſum huius problematis iam ſoluimus (§. 30), quo arcus ſecandus Ag toti quadranti AB aſſumitur aequalis. Si enim ponamus $g=b$, reperietur, vt ibi,

$$f = b\sqrt{\frac{1-\sqrt{(1-n)}}{n}} = b\sqrt{\frac{b(b-a)}{bb-aa}} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{(2+b)}}$$

et partium differentia prodit $= b - b\sqrt{(1-n)} = b - a$.

Coroll. 2.

41. Si arcus dati Ag alter terminus in ſuperiori quadrante exiſtat, eique eadem abſciſſa $AG=g$ reſpondeat, eaedem hae formulae valent, niſi quod valor radicalis $\sqrt{(bb-gg)}$ negatiue capi debeat, radicali $\sqrt{(bb-ngg)}$ non mutato.

Coroll. 3.

42. Ita ſi proponatur tota ſemiperipheria, erit $g=0$, et $\sqrt{(bb-gg)}=-b$, vnde pro hoc caſu obtinebitur:

$$f = \frac{b}{g\sqrt{n}} \sqrt{2b(b-\sqrt{(bb-ngg)})} = b$$

ſcilicet

ſcilicet arcus Af abibit in quadrantem ellipſis. Sin autem integra ellipſis peripheria proponeretur, tum eſſet et $g = 0$ et $\sqrt{(bb-gg)} = +b$; ſicque valor ipſius f prodiret euaneſcens, at pro $\sqrt{(bb-ff)}$ capi deberet $-b$.

Problema 5.

43. Propoſito in ellipſi arcu Ag altero termino A in axe principali terminato aſſignare arcum pq, qui ſit praeciſe ſemiſſis arcus dati Ag.

Solutio.

Manentibus ſuperioribus denominationibus, ſint abſciſſae, punctis p et q reſpondentes, $AP = p$, et $AQ = q$, atque ex puncto p, quaſi eſſet datum, quaeratur q, vt differentia arcuum Af et pq fiat geometrice aſſignabilis, tum enim quoque differentia arcuum fg et pq geometrice aſſignari poterit; ſiquidem ſecundum problema praecedens arcus datus Ag, pro quo eſt $AG = g$, ita ſectus eſt in f, vt partium Af et fg differentia ſit geometrice aſſignabilis. Hunc ergo in finem eſſe debet

$$q = \frac{bbp\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + bbf\sqrt{(bb-pp)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}$$

ſeu

$$0 = b^4(pp+qq-ff) - 2bbpq\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} - nffppqq.$$

Quo facto erit

$$\text{Arc. } Af - \text{Arc. } pq = \frac{nfpq}{bb}; \text{ ideoque}$$

$$2\,\text{Arc. } Af - 2\,\text{Arc. } pq = \frac{2nfpq}{bb}$$

At ex problemate praecedente habemus:

$$\text{Arc. } Af - \text{Arc. } fg = \frac{nffg}{bb}$$

qua

qua aequatione ab illa ſubtracta relinquitur:

$$\text{Arc. } Ag - 2\,\text{Arc. } pq = \frac{2nfpq}{bb} - \frac{nffg}{bb}$$

Quae differentia cum in nihilum abire debeat, habebimus:

$$2nfpq = nffg \quad \text{et} \quad 2pq = fg.$$

Pro pq ſubſtituatur iſte valor $\frac{1}{2}fg$, et obtinebimus

$$b^4(pp+qq) = b^4ff + bbfg\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + \tfrac{1}{4}nf^4gg$$

exiſtente $g = \frac{2bbf\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}}{b^4-nf^4}$, vel potius pro f introducatur valor ante inuentus:

$$f = \frac{b}{g\sqrt{n}}\sqrt{(b-\sqrt{(bb-gg)})(b-\sqrt{(bb-ngg)})}$$

vnde fit:

$$\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} = \frac{bb(\sqrt{(bb-gg)}+\sqrt{(bb-ngg)})}{gg\sqrt{n}}\sqrt{(b-\sqrt{(bb-gg)})(b-\sqrt{(bb-ngg)})}$$

Poſtea vero ambae abſciſſae p et q ex hac aequatione duplicata definiri poterunt:

$$pp \pm 2pp + qq = \frac{b^4ff \pm b^4fg + bbfg\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + \tfrac{1}{4}nf^4gg}{b^4}$$

vel ſublata iſta irrationalitate ob $bbfg\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} = \frac{1}{2}gg(b^4-nf^4)$ habebimus:

$$p+q = \frac{\sqrt{(b^4ff + b^4fg + \frac{1}{2}b^4gg - \frac{1}{4}nf^4gg)}}{bb}$$

$$q-p = \frac{\sqrt{(b^4ff - b^4fg + \frac{1}{2}b^4gg - \frac{1}{4}nf^4gg)}}{bb}$$

vnde vtraque abſciſſa p et q ſeorſim facile aſſignatur.

Coroll. I.

44. Si quantitatem ſubſidiariam f penitus eliminemus, perueniemus ad has duas formulas:

$pp+qq$

$$pp+qq=\frac{1}{4ngg}(b-\sqrt{}(bb-gg))(b-\sqrt{}(bb-ngg)) \text{ in } (5bb+3b\sqrt{}(bb-gg)+3b\sqrt{}(bb-ngg)+\sqrt{}(bb-gg)(bb-ngg))$$

$$2pq=\frac{b}{n\sqrt{}}\sqrt{}(b-\sqrt{}(bb-gg)(b-\sqrt{}(bb-ngg)).$$

Coroll. 2.

45. Si arcus propoſitus Ag ſit ſemiperipheriae aequalis, ideoque $g=0$ et $\sqrt{}(bb-gg)=-b$, et $\sqrt{}(bb-ngg) =b-\frac{ngg}{2b}$, fiet pro hoc caſu:

$$pp+qq=bb \text{ et } 2pq=bg=0$$

ideoque $p=0$ et $q=b$. Arcus ſcilicet pq abibit in quadrantem AB, vt natura rei poſtulat.

Problema ſoluendum.

46. In quadrante elliptico AB, arcum aſſignare pq, qui praeciſe ſit ſemiſſis arcus quadrantis AB. Tab. IV. Fig. 2.

Solutio.

Ponantur ellipſis ſemiaxes $CA=a$, $CB=b$, ſitque breuitatis gratia $\frac{bb-aa}{bb}=n$. Tum ad A ducatur tangens, in eamque ex punctis quaeſitis p et q demiſſa concipiantur perpendicula pP et qQ, vocenturque $AP=p$ et $AQ=q$. Iam manifeſtum eſt, hoc problema eſſe caſum praecedentis, quo punctum g in B aſſumitur, ita vt hoc ſit $g=b$. Quo valore inducto formulae (§. 44.) praebebunt

$$pp+qq=\frac{1-\sqrt{}(1-n)}{4n}(5bb-3bb\sqrt{}(1-n)) \text{ et}$$

$$2pq=bb\sqrt{}\frac{1-\sqrt{}(1-n)}{n}.$$

At ob $n = \frac{bb - aa}{bb}$ eſt $\sqrt{(1-n)} = \frac{a}{b}$ et $\frac{1 - \sqrt{(1-n)}}{n} = \frac{b}{b+a}$ vnde fiet:

$$pp + qq = \frac{bb(5b + 3a)}{4(a+b)} \text{ et } 2pq = \frac{bb\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$$

hincque:

$$q + p = \tfrac{1}{2} b \sqrt{\frac{5b + 3a + 4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}$$

$$q - p = \tfrac{1}{2} b \sqrt{\frac{5b + 3a - 4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}$$

ideoque ipſae abſciſſae erunt:

$$AP = \tfrac{1}{4} b \sqrt{\frac{5b + 3a + 4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}} - \tfrac{1}{4} b \sqrt{\frac{5b + 3a - 4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}$$

$$AQ = \tfrac{1}{4} b \sqrt{\frac{5b + 3a + 4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}} + \tfrac{1}{4} b \sqrt{\frac{5b + 3a - 4\sqrt{b(a+b)}}{a+b}}$$

qui ambo valores geometrice per circinum et regulam conſtrui poſſunt.

Haecque eſt ſolutio adaequata problematis in Actis Erud. Lipſienſibus propoſiti.

Coroll. 1.

47. Si diſtantiae binorum punctorum p et q a centro ellipſis deſiderentur, notetur poſita $AP = p$ fore $Cp = \sqrt{(aa + npp)}$, atque hinc colligitur fore

$$Cp = \frac{\sqrt{(5aa - 2ab + 5bb + (a-b)\sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)})}}{2\sqrt{2}}$$

$$Cq = \frac{(5aa - 2ab + 5bb + (b-a)\sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)})}{2\sqrt{2}}.$$

Coroll. 2.

48. Ambae abſciſſae p et q etiam hoc modo ad conſtructionem fortaſſe aptius exprimi poſſunt, vt ſit:

$$AP = p = \frac{b\sqrt{(5b + 3a - \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)})}}{2\sqrt{2(a+b)}}$$

$$AQ = q = \frac{b\sqrt{(5b + 3a + \sqrt{(9aa + 14ab + 9bb)})}}{2\sqrt{2(a+b)}}.$$

Coroll.

Coroll. 3.

49. Si ad puncta p et q tangentes ducantur ad occurſum axis CA, magnitudo harum tangentium commode exprimitur. Reperietur enim

$$Tp = \frac{\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}-3a-b}{4}$$

pro puncto autem q erit eadem tangens $= \frac{\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}+3a+b}{4}$.

Coroll. 4.

50. Concipiatur tangens Tp ad alterum vsque axem CB continuata, et concurſus littera Θ notari, eritque permutatis literis a et b:

$$\Theta p = \frac{\sqrt{(9aa+14ab+9bb)}+a+3b}{4}$$

ideoque $\Theta p - Ap = a + b$.

Coroll. 5.

51. Solutio igitur huius problematis ad hanc quaeſtionem mere geometricam reducitur:

In quadrante elliptico AB *duo eiusmodi puncta* p *et* q *aſſignare, ita vt ad ea ductis tangentibus* T$p\Theta$, $tq\theta$ *quoad axibus productis occurrant, ſit pro vtroque* Tab. IV. Fig. 2.

$$\Theta p - Tp = CA + CB \text{ et } tq - \theta q = CA + CB$$

ſeu vt differentia partium vtriusque tangentis aequalis ſit ſemiſummae axium principalium.

Hoc problemate conſtructo, puncta p et q ſimul ita ſunt comparata, vt arcus interceptus pq ad totum quadrantem AB rationem teneat ſubduplam.

Scholion.

52. Demonſtrato nunc Theoremate, ſolutoque Problemate, quae in Actis Erud. Lipſ. extant propoſita, antequam huic inueſtigationi finem imponam, problema adhuc multo difficilius pertractabo, quo in ellipſi arcus aſſignari iubetur, qui totius perimetri ellipſeos ſit triens. Quoniam enim facillime arcus aſſignatur, qui totius perimetri ſit ſemiſſis, vel quadrans, vel ope problematis praecedentis etiam octans, haud parum notatu dignus videtur caſus, quo triens poſtulatur, cuius ſolutio, etiamſi ob ſummam facilitatem, qua res de ſemiſſi et quadrante expeditur, non admodum difficilis videatur, tamen ad inueſtigationes perquam prolixas et operoſas deducitur, quas ſuperare tentabo.

Problema 7.

Tab. IV. Fig. 1. 53. Datum ellipſis arcum Ab, ad alterum axem principalem in A terminatum, ita ſecare in duobus punctis f et g, vt trium partium Af, fg et gb binae quaeuis quantitate geometrice aſſignabili diſcrepent.

Solutio.

Ex punctis f, g, b ad rectam AD, quae ellipſin in A tangit, demiſſis perpendiculis vocentur abſciſſae:

$$AF = f;\; AG = g;\; \text{et } AH = b$$

quarum haec $AH = b$ datur, illas vero duas f et g determinari oportet. Cum autem arcuum Af et fg differentia geometrica eſſe debeat, erit ex praecedentibus:

$$g = \frac{2bbf\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}}{b^4-nf^4}$$

et $Af - fg = \frac{nffg}{bb}$.

Deinde

Deinde quia arcuum Af et gb differentia debet eſſe geometrica, erit per formulas ſuperiores:

$$g = \frac{bbb\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} - bbf\sqrt{(bb-bb)(bb-nbb)}}{b^4 - nffbb}$$

et $Af - gb = \frac{nfgb}{bb}$.

Tum igitur quoque tertia differentia erit

$$fg - gb = \frac{nfg}{bb}(b-f).$$

Quodſi iam ambo hi valores ipſius g inter ſe aequentur, obtinebitur aequatio inter f et b, per quam propterea abſciſſa f determinabitur, qua inuenta porro abſciſſa g innoteſcit.

Coroll. 1.

54. Aequatis autem duobus valoribus ipſius g, eruetur:

$$(b^4b - nf^4b - 2b^4f + 2nf^3bb)\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)}$$
$$= (b^4f - nf^5)\sqrt{(bb-bb)(bb-nbb)}$$

quae, ſumtis vtrinque quadratis, ad duodecimum gradum aſcendit.

Coroll. 2.

55. Si ſit $b = b$, ſeu arcus Ab in B terminetur, habebitur iſta aequatio reſoluenda:

$$b^5 - nbf^4 - 2b^4f + 2nbbf^3 = 0$$

ſeu $$nf^4 - 2nbf^3 + 2b^3f - b^4 = 0.$$

Problema 8.

56. In ellipſi arcum pq aſſignare, qui ſit tertia pars totius perimetri ellipſis. Tab. IV. Fig. 4.

V 3 Solutio.

Solutio.

Poſitis ſemiaxibus $CA = a$, $CB = b$, et breuitatis ergo $n = \frac{bb-aa}{bb}$, diuidatur primo tota peripheria ellipſis ita in punctis f et g, vt partium ABf, $f\alpha g$, $g\beta A$ differentiae ſint geometrice aſſignabiles. Statuantur his punctis f et g abſciſſae reſpondentes $AF = f$ et $AG = -g$ quatenus haec in plagam oppoſitam cadit. Problema igitur praecedens ad hunc caſum accommodabitur, ſi ob punctum b in A incidens ponatur $b = 0$ et $\sqrt{(bb-bb)} = +b$, quo facto habebimus:

$$g = \frac{2bbf\sqrt{(bb-ff)}(bb-nff)}{b^4-nf^4} \text{ et } g = -f$$

ſicque erit $AG = AF = f$: et ternae partes ellipſis ita different, vt ſit:

$$f\alpha g - ABf = \frac{nf^3}{bb} \text{ et } ABf - A\beta g = 0.$$

Cum autem ſit $g = -f$ erit:

$$2bbf\sqrt{(bb-ff)}(bb-nff) = -(b^4-nf^4)f$$

vnde quadratis ſumtis elicitur:

$$nnf^8 - 6nb^4f^4 + 4(n+1)b^6ff - 3b^8 = 0.$$

Ad hanc aequationem reſoluendam fingantur eius factores:

$$(nf^4 + Pff + Q)(nf^4 - Pff + R) = 0$$

eſſeque oportet:

$$-6nb^4 = n(Q+R) - PP;\quad 4(n+1)b^6 = P(R-Q);\quad -3b^8 = QR$$

ex quibus fit:

$$R + Q = \frac{PP - 6nb^4}{n};\quad R - Q = \frac{4(n+1)b^6}{P}$$

vnde

vnde valores ipſarum Q et R in poſtrema aequatione ſubſtituta praebent:

$$P^6 - 12nb^4P^4 + 48nnb^8P^2 = 16nn(n+1)^2b^{12}$$

vbi commode euenit, vt ſubtrahendo vtrinque $64n^3b^{12}$ cubus relinquatur, cuius radice extracta fiet:

$$PP - 4nb^4 = 2b^4\sqrt[3]{2nn(1-n)^2}$$

et $P = bb\sqrt{(4n + 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2})}$

Quo valore ſubſtituto, reperietur:

$$R + Q = \frac{-2b^4(n - \sqrt[3]{2nn(1-n)^2})}{n}$$

$$R - Q = \frac{2b^4\sqrt{(4nn - 2n\sqrt[3]{2nn(1-n)^2} + \sqrt[3]{4n^4(1-n)^4})}}{n}$$

Deinde vero ipſa reſolutio ſuppeditat:

$$ff = \frac{-P \pm \sqrt{(PP - 4nQ)}}{2n} \quad \text{et} \quad ff = \frac{+P \pm \sqrt{(PP - 4nR)}}{2n}$$

vnde, ſubſtitutis valoribus inuentis, obtinebitur:

$$\frac{2nff}{bb} = -\sqrt{(4n + 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2})} \pm \sqrt{(8n - 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2} + 4\sqrt{(4nn - 2n\sqrt[3]{2nn(1-n)^2} + \sqrt[3]{4n^4(1-n)^4})})}$$

$$\frac{2nff}{bb} = +\sqrt{(4n + 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2})} \pm \sqrt{(8n - 2\sqrt[3]{2nn(1-n)^2} - 4\sqrt{(4nn - 2n\sqrt[3]{2nn(1-n)^2} + \sqrt[3]{4n^4(1-n)^4})})}$$

ex his autem quaternis valoribus alii locum habere nequeunt, niſi qui ff praebeant poſitiuum et minus quam bb.

Inuento iam valore idoneo pro f, pro punctis quaeſitis p et q ponantur abſciſſae $AP = p$ et $AQ = q$, ac ſtatuatur:

$$0 = b^4(pp + qq - ff) - 2bbpq\sqrt{(bb - ff)(bb - nff)} - nffppqq$$

eritque

eritque $Af - pq = \frac{nfpq}{bb}$; hincque

$$3Af - 3pq = \frac{3nfpq}{bb}.$$ Supra autem habebamus

$$fg - Af = \frac{nf^3}{bb}$$

$$Ag - Af = 0$$

quae tres aequationes additae dant:

$$Af + fg + gA - 3pq = \frac{3nfpq + nf^3}{bb}.$$

Quare vt arcus pq praeciſe ſit triens totius peripheriae, neceſſe eſt, vt ſit $3pq = ff$, ſeu $pq = -\frac{1}{3}ff$, vnde fit:

$$pp + qq = ff - \frac{2ff}{3bb}\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + \frac{nf^6}{9b^4}$$

hincque porro:

$$qq \pm 2pq + pp = ff + \frac{2}{3}ff - \frac{2ff}{3bb}\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)} + \frac{nf^6}{9b^4}$$

Fiet ergo:

$$q - p = \frac{f}{3bb}\sqrt{(15b^4 + nf^4 - 6bb\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)})}$$

$$q + p = \frac{f}{3bb}\sqrt{(3b^4 + nf^4 - 6bb\sqrt{(bb-ff)(bb-nff)})}.$$

Quia rectangulum $pq = -\frac{1}{3}ff$ eſt negatiuum, patet binarum abſciſſarum p et q alteram eſſe poſitiuam, alteram negatiuam. Cum autem ſingulis abſciſſis bina curvae puncta reſpondeant, vtrum conueniat ex valoribus $\sqrt{(bb-pp)}$ et $\sqrt{(bb-qq)}$ ſiue ſint poſitiui, ſiue negatiui, dignoſcitur. Eorum autem ſigna ita comparata eſſe oportet, vt ſatisfiat huic formulae.

$$\sqrt{(bb-qq)} = \frac{b^3\sqrt{(bb-ff)(bb-pp)} - bfp\sqrt{(bb-nff)(bb-npp)}}{b^4 - nffpp}.$$

Caſus $n = \frac{1}{2}$

57. Prae ceteris hic caſus $n = \frac{1}{2}$, ſeu $bb = 2aa$, eſt notatu dignus, quod hoc ſolo radicale cubicum rationale

rationale euadit. Erit ſcilicet $\sqrt[3]{2nn(1-n)^2} = \frac{1}{3}$, et $P = bb\sqrt{3}$; vnde $R + Q = 0$ et $R - Q = 2b^4\sqrt{3}$; ideoque $Q = -b^4\sqrt{3}$, et $R = +b^4\sqrt{3}$. Cum iam ſit

$$ff = -P \pm \sqrt{(PP - 2Q)} \quad \text{et} \quad ff = +P \pm \sqrt{(PP - 2R)}$$

erit

$$\frac{ff}{bb} = -\sqrt{3} \pm (3 + 2\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \frac{ff}{bb} = +\sqrt{3} \pm \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})}$$

Horum quatuor valorum bini poſteriores ſunt imaginarii, priorum vero ſolus poſitiuus locum habet, ita vt ſit:

$$ff = bb(-\sqrt{3} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}), \text{ quia hinc } ff < bb.$$

Cum porro punctum f ſupra axem ellipſis CB exiſtat, erit

$$\sqrt{(bb - ff)} = -b\sqrt{(1 + \sqrt{3} - \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})} \quad \text{et}$$

$$\sqrt{(bb - nff)} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{(2 + \sqrt{3} - \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})} \quad \text{vnde}$$

$$\sqrt{(bb - ff)(bb - nff)} = \frac{-bb}{\sqrt{2}}\sqrt{(8 + 5\sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})}$$

ſiue

$$\sqrt{(bb - ff)(bb - nff)} = -\tfrac{1}{2}bb(\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})} - 2 - \sqrt{3}).$$

Cum nunc ſit $ff = bb(\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} - \sqrt{3})$, erit

$$2pq = -\tfrac{2}{3}bb(\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} - \sqrt{3}) \quad \text{et}$$

$$pp + qq = +\tfrac{2}{3}bb(3 - \tfrac{1}{3}\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})})$$

ex quibus fit

$$(q + p)^2 = \tfrac{2}{3}bb(+3 + \sqrt{3} - \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} - \tfrac{1}{3}\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})})$$

$$(q - p)^2 = \tfrac{2}{3}bb(+3 - \sqrt{3} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} - \tfrac{1}{3}\sqrt{(9 + 6\sqrt{3})})$$

et radicibus extractis

$$q + p = \tfrac{1}{3}b\sqrt{(3 + \sqrt{3})(6 - 2\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})}$$

$$q - p = \tfrac{1}{3}b\sqrt{(3 - \sqrt{3})(6 + 2\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})})}$$

Hine in fractionibus decimalibus erit

$$ff = 0,8104090\,bb; \qquad f = 0,9002272\,b$$

$$V(bb-ff) = -0,4354205\,b; \quad V(bb-nff) = +0,7712300\,b$$

$$2pq = -0,5402727\,bb; \quad (q+p)^2 = 0,4811342\,bb$$

$$pp+qq = +1,0214069\,bb; \quad (q-p)^2 = 1,5616796\,bb$$

$$q+p = 0,6936383\,b; \qquad p = 0,9716548\,b$$

$$p-q = 1,2496712\,b; \qquad q = -0,2780165\,b$$

quos valores pro p et q figura propemodum refert: atque ex formula $V(bb-pp)$ et $V(bb-qq)$ inuoluentis intelligitur, punctum p infra axem βB, punctum q vero ſupra eum capi debere.

DE

DE AEQVATIONIBVS DIFFERENTIALIBVS SECVNDI GRADVS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Omnium quaeſtionum, quae quidem in Matheſi ſuſcipiuntur, ſolutio duabus conſtat partibus, quarum altera in eo verſatur, vt conditiones, quibus quaeſtio determinatur, ad aequationes analyticas perducantur, quae ſolutionem continere dicuntur, altera vero pars in ipſa harum aequationum reſolutione occupatur. Si quaeſtio ad Matheſin mixtam, vel applicatam pertineat, prior pars petenda eſt ex principiis, quibus iſta diſciplina Mathematica innititur, huicque ſcientiae quaſi eſt propria; pars autem poſterior ſemper ad Analyſin puram eſt referenda, cum tota in reſolutione aequationum verſetur. Ita ſi quaeſtio, vel ex Mechanica, vel ex Hydrodynamica, vel ex Aſtronomia, fuerit deſumta, ex principiis cuique harum diſciplinarum propriis quaeſtionem primum ad aequationes reduci oportet, tum vero iſtarum aequationum reſolutio artificiis, quae quidem in Analyſi comperta habemus, vnice eſt relinquenda. Ex quo ſatis eſt manifeſtum, quanti ſit momenti Analyſis per cunctas Matheſeos partes.

2. Principia autem fere omnium Matheſeos applicatae partium iam ita ſunt euoluta, vt nulla propemodum quaeſtio eo pertinens proferri poſſit, cuius ſolutio non aequationibus comprehendi queat. Siue enim quaeſtio ſit de aequilibrio, ſiue de motu corporum cuiuscunque indolis, tam ſolidorum, quam fluidorum, cum ab aliis, tum a me, principia certiſſima ſunt ſtabilita, quorum ope ſemper ad aequationes peruenire licet: atque ſi corpora coeleſtia viribus quibuscunque in ſe inuicem agere ſtatuantur, omnes perturbationes, quae inde in eorum motibus efficiuntur, non difficulter ad aequationes reuocantur; ita vt ſi has aequationes reſoluere valeremus, nihil amplius ſupereſſet, quod in his ſcientiis deſiderari poſſet. Quocirca omne ſtudium, quod in Matheſin confertur, vtilius impendi nequit, quam ſi in limitibus Analyſeos promouendis elaboremus.

3. Quoties autem problema ad Matheſin applicatam pertinens tractatur, rariſſime in aequationes algebraicas incidimus, quarum reſolutio, etiamſi nondum vltra quartum gradum ſit perducta, tamen ope approximationum ita exacte perfici poteſt, vt pro perfecta ſit habenda. Perpetuo autem fere deuoluimur ad aequationes differentiales, et quidem maximam partem ad differentiales ſecundi ordinis; principia quippe mechanica ſtatim differentialia ſecundi gradus implicant: ita vt ſine Analyſeos infinitorum ſubſidio, nihil fere in his ſcientiis praeſtari liceat. Cum autem in reſolutione aequationum differentialium primi gradus non admodum ſimus profecti, multo minus eſt mirandum, ſi aqua

nobis

nobis haereat, quando quaeſtiones ad aequationes differentiales ſecundi gradus reducuntur. Regulae enim, quae pro huiusmodi aequationum reſolutione ſunt inventae, et quas mihi equidem vindicare poſſum, ita ſunt limitatae, vt certis tantum caſibus, qui non admodum frequenter occurrunt, in vſum vocari queant. Huiusmodi autem regulas plures expoſui in Comment. Acad. Petrop. et Vol. VII. Miſcell. Berol.

4. Interim tamen iam ſaepius eiusmodi ſe mihi obtulerunt caſus aequationum differentialium ſecundi gradus, quas tametſi ope regularum illarum tractare non licuerit, tamen aliunde earum integralia habuerim perſpecta; neque vlla via directa patebat, qua haec integralia erui poſſent. Huiusmodi caſus eo magis ſunt notatu digni, quod comparatio illarum aequationum cum ſuis integralibus tutiſſimam viam patefacere videatur, earum reſolutionem per certas methodos perficiendi. In quo negotio, ſi euentus ſpem non feſellerit, nullum eſt dubium, quin methodi hunc in finem detectae, multo latius pateant, ac noſtram facultatem, aequationes differentiales ſecundi gradus tractandi, non mediocriter promoueant. Iis ergo, quos huiusmodi ſtudia iuuant, non ingratum fore arbitror, ſi caſus illos mihi oblatos commemorauero, vt occaſionem inde adipiſcantur, in hac parte Analyſin amplificandi, tum vero ipſe methodos exponam, quas horum caſuum contemplatio mihi ſuppeditauit.

5. Primum huiusmodi exemplum mihi occurrit in Mechanicae meae Tom. I. pag. 465. vbi

ad hanc perueni aequationem differentialem ſecundi gradus:

$$2Bxddx - 4Bdx^2 = x^{n+5}dp^2(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$$

in qua differentiale dp ſumtum eſt conſtans. Eius autem integrale aliunde mihi conſtabat in hac forma contineri:

$$x^{n+5}dp^2(1+pp)^{\frac{n+1}{2}} + Cds^4 = 0$$

exiſtente $ds^2 = (1+pp)dx^2 + 2pxdpdx + xxdp^2$. Poteram etiam notare valorem huius conſtantis C eſſe $= -(n+1)B$. Diu tum temporis operam inutiliter perdidi in methodo directa indaganda, cuius ope iſtam aequationem integralem ex illa differentiali ſecundi gradus eruere poſſem; neque vllum artificium cognitum huc deducere eſt viſum. Caeterum notari conuenit, integrale hic exhibitum tantum eſſe particulare, quia non continet quantitatem conſtantem ab arbitrio noſtro pendentem, quae per integrationem eſſet introducta, infra autem oſtendam ob talem conſtantem adiici poſſe huiusmodi terminum Ex^4dp^4.

6. In aliud ſimile exemplum incidi in opuſculorum meorum prima collectione pag. 82, vbi motum corporum in ſuperficiebus mobilibus ſum perſcrutatus: perueni autem in euolutione certi cuiusdam caſus ad hanc aequationem differentialem ſecundi gradus:

$$\frac{ddr}{r} + \frac{(F+Mkk)^2\theta^2du^2}{(Mkkrr+F+2Gu+Huu)^2} = 0$$

vbi differentiale du ſumtum eſt conſtans, litterae autem F, G, H, Mkk et θ denotant quantitates conſtantes quascunque. Nullo modo quoque huius aequationis inte-

integrale eruere poteram, aliunde autem noueram, eius integrale eſſe:

$$\frac{(F+Mkk)^2\theta^2 du^2}{Mkkrr+F+2Gu+Huu} + \frac{dr^2}{r^2}(F+2Gu+Huu) - \frac{2dudr}{r}(G+Hu)$$
$$+ H du^2 = \frac{H du^2}{r^2} + \frac{(F+Mkk)\theta^2 du^2}{rr}$$

quod quidem etiam eſt particulare, et quia tantopere eſt complicatum, multo minus patet, quomodo per integrationem ex illa aequatione erui queat. Deinceps vero monſtrabo, hoc integrale completum reddi, ſi loco termini $\frac{H du^2}{rr}$, adiiciatur $\frac{C du^2}{rr}$, ita vt C deſignet quantitatem conſtantem, a reliquis, quae in aequatione differentiali ſecundi gradus inſunt, plane non pendentem.

7. Deinde etiam alia problemata tractans, perductus fui ad huiusmodi aequationes differentiales ſecundi gradus, quarum integratio non parum recondita videbatur. Veluti huius aequationis differentialis ſecundi gradus:

$$rrddr + rdr^2 = n^2 s ds^2$$

ſumto elemento ds conſtante, integrale particulare quidem inueni eſſe:

$$rdr + nrds + nnsds = 0$$

quae quidem aequatio, quia binae variabiles r et s vbique earundem dimenſionum, per methodum a me olim exhibitam, tractari poſſet. Porro quoque ſe mihi obtulit haec aequatio differentio-differentialis:

$$ds^2(\alpha ss + \beta s + \gamma) = rrdr^2 + 2r^3 ddr$$

ſumto elemento ds conſtante, cuius integrale completum deprehendi eſſe:

$$C = -\frac{1}{2}\left(\frac{rdr^2}{ds^2} + \frac{\alpha ss+\beta s+\gamma}{r}\right)^2 + \frac{2rdr(2\alpha s+\beta)}{ds} - 2\alpha rr$$

quod,

quod, quomodo inde elici queat, haud facile patet. Quin etiam ipſa aequatio integralis, etſi eſt differentialis primi tantum gradus, parum adiumenti afferre videtur, ob inſignem variabilium implicationem.

8. Haec quatuor exempla ſufficiunt, ad oſtendendum, plures adhuc methodos deeſſe, quibus aequationes differentiales ſecundi gradus integrari queant, ſimul autem, quoniam his quidem caſibus integralia conſtant, de earum inuentione non eſſe deſperandum. Equidem poſt varia tentamina, quibus has aequationes tractaui, comperi, totum negotium eo redire, vt idonea quaeratur quantitas, per quam iſtae aequationes multiplicatae integrationem admittant; tali autem multiplicatore invento, integratio nulla amplius laborat difficultate. Quemadmodum enim omnium aequationum differentialium primi gradus integratio eo reduci poteſt, vt inveſtiganda ſit functio quaepiam binarum variabilium, per quam aequatio multiplicata euadat integrabilis, ita etiam, pro omnibus aequationibus differentialibus ſecundi gradus, hanc regulam non dubito tanquam generalem in medium afferre, vt ſtatuam ſemper eiusmodi functionem variabilium dari, per quam aequatio multiplicata reddatur integrabilis.

9. Loquor autem hic de eiusmodi tantum aequationibus, quae duas ſolum variabiles inuoluunt, et quae iam eo ſint perductae, vt differentialia ſupremi gradus vnicam dimenſionem obtineant. Ponamus x et y eſſe ambas variabiles, et poſito $dy = p\,dx$; $dp = q\,dx$; $dq = r\,dx$, $dr = s\,dx$, etc. omnes aequationes differentiales

tiales cuiusque gradus ad formas ſequentes reduci poſſe conſtat:

I. Forma generalis aequationum differentialium primi gradus

$p =$ funct. (x et y)

II. Forma generalis aequationum differ. ſecundi gradus

$q =$ funct. (x, y et p)

III. Forma generalis aequationum differ. tertii gradus

$r =$ funct. (x, y, p et q)

IV. Forma generalis aequationum differ. quarti gradus

$s =$ funct. (x, y, p, q, et r)

et ita porro de ſequentibus altiorum graduum.

10. Cum igitur propoſita quacunque aequatione differentiali primi gradus $p =$ funct. (x et y), ſemper detur eiusmodi functio ipſarum x et y, per quam illa aequatio multiplicata reddatur integrabilis, etiamſi ſaepe numero hanc functionem aſſignare non valeamus, nullum eſt dubium, quin etiam pro aequationibus differentialibus ſecundi gradus $q =$ funct. (x, y et p) eiusmodi multiplicator exiſtat, qui eas reddat integrabiles, ideoque ad differentialia primi gradus reducat. Iam vero hic caſus diſtingui oportet, quibus iſte multiplicator vel binarum tantum variabilium x et y functio exiſtat, vel inſuper quantitatem p, ſeu rationem differentialium $\frac{dy}{dx}$ inuoluat: ob hoc enim diſcrimen ipſa multiplicatoris inuentio modo facilior, modo difficilior

 euadet.

euadet. Caſus autem euolutu facillimus habebitur, ſi multiplicator alterius tantum variabilis ſolius fuerit functio.

11. Si igitur litterae P, Q, R, S, T ſumantur ad deſignandas quascunque functiones ipſarum variabilium x et y, ſequentes ordines ſimpliciores multiplicatorum pro aequationibus differentialibus ſecundi gradus conſtituentur:

Multiplicator ordinis primi .. P

Multiplicator ordinis ſecundi .. $Pdx+Qdy$

Multiplicator ordinis tertii .. $Pdx^2+Qdxdy+Rdy^2$

Multiplicator ordinis quarti .. $Pdx^3+Qdx^2dy+Rdxdy^2+Sdy^3$

etc.

Hi quidem ſunt ordines ſimpliciores, quibus $p=\frac{dy}{dx}$, vel ad nullam, vel ad vnam, vel duas, vel tres dimenſiones aſſurgit: facile autem colligitur fieri poſſe, vt littera p vel per fractiones, vel irrationalia, vel adeo tranſcendentia, multiplicatorem afficiat, cuiusmodi caſus ingentem campum nouarum inueſtigationum aperiunt. Hic quidem tantum in formis expoſitis verſari conſtitui, quia eae ſufficiunt exemplis allatis expediendis, ſimulque nos ad aequationes multo generaliores earum ope reſolubiles manuducent.

12. Propoſita ergo aequatione quacunque differentiali ſecundi gradus, $q=$ funct. (x, y et p), quae ſumto dx conſtanti ad hanc formam redigetur $ddy=dx^2$ funct. (x, y et $\frac{dy}{dx}$), tentetur primo multiplicator primae formae P, num eius ope integratio ſuccedat? ſin minus,

minus, ſumatur multiplicator formae ſecundae $Pdx+Qdy$, qui niſi negotium conficiat, recurratur ad multiplicatorem formae tertiae, tum quartae, etc. mox autem colligere licebit, vtrum per factores harum formarum integratio abſolui queat, nec ne? quo poſteriori caſu, ad formas magis complicatas erit confugiendum, ac dummodo huiusmodi calculo fuerimus aſſueti, facultatem nobis comparabimus, pro quouis caſu oblato idoneam multiplicatoris formam dignoſcendi: ad quem ſcopum euolutio propoſitorum exemplorum erit accommodata.

Problema 1.

13. Propoſita aequatione differentiali ſecundi gradus:

$$2ayddy-4ady^2-y^{n+5}dx^2(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}=0$$

in qua differentiale dx ſumtum eſt conſtans, eius integrale inuenire.

Solutio.

Factorem primae formae P tentanti mox patebit, negotium non ſuccedere, niſi ſit $n=-2$, quo quidem caſu foret $P=\frac{1}{y^3}$ et aequationis $\frac{2ayddy-4ady^2}{y^3}-\frac{dx^2}{(1+xx)\sqrt{(1+xx)}}=0$ integrale eſſet

$$\frac{2ady}{yy}+\frac{xdx}{\sqrt{(1+xx)}}=adx,\text{ denuoque integrando haberetur}$$

$$-\frac{2a}{y}+\sqrt{(1+xx)}=ax+\beta;$$

ita vt hic caſus ſpecialis nullam habeat difficultatem. In genere igitur pro valore quocunque exponentis n,

Y 2 tentetur

tentetur factor formae ſecundae $Pdx + Qdy$, et aequatione ad hanc ſpeciem reducta

$$2addy - \frac{4ady^2}{y} - y^{n+4}dx^2(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0$$

productum erit:

$$\left.\begin{aligned}&+2aPdxddy - \frac{4aPdxdy^2}{y} - Py^{n+4}dx^3(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}\\ &+2aQdyddy - \frac{4aQdy^3}{y} - Qy^{n+4}dx^2dy(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}\end{aligned}\right\} = 0$$

quam per hypotheſin integrabilem eſſe oportet. Duo autem primi termini, qualescunque P et Q ſint functiones ipſarum x et y, nonniſi ex differentiatione horum $2aPdxdy + aQdy^2$ oriri potuerunt; vnde habebimus

Primam partem integralis $2aPdxdy + aQdy^2$.

Huius ergo differentiale ſubtrahamus a noſtra aequatione et ob $dP = dx(\frac{dP}{dx}) + dy(\frac{dP}{dy})$; $dQ = dx(\frac{dQ}{dx}) + dy(\frac{dQ}{dy})$, aequatio ordinata erit:

$$\left.\begin{aligned}&-Py^{n+4}dx^3(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} - Qy^{n+4}dx^2dy(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{4aPdxdy^2}{y} - \frac{4aQdy^3}{y}\\ &-2adx^2dy\left(\frac{dP}{dx}\right) - 2adxdy^2\left(\frac{dP}{dy}\right) - ady^3\left(\frac{dQ}{dy}\right)\\ &-adxdy^2\left(\frac{dQ}{dx}\right)\end{aligned}\right\} = 0$$

quae ob dx ſumtum conſtans nullo modo integrabilis eſſe poteſt, niſi termini per dy^3 et dy^2 affecti ſeorſim ſe tollant. Neceſſe ergo eſt, ſit:

$$\frac{4Q}{y} + \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0, \text{ ſeu } 4Qdy + ydy\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0$$

et $\frac{4P}{y} + 2\left(\frac{dP}{dy}\right) + \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0$

Iam vt ex aequatione priori valorem ipſius Q eruamus, ſpectemus x vt conſtans, eritque $dy(\frac{dQ}{dy}) = dQ$, denotat

notat enim $dy(\frac{dQ}{dy})$ incrementum ipſius Q ex ſolius y variabilitate ortum, vnde cum ſit $4Qdy + ydQ = 0$, obtinebimus integrando

$Qy^4 = K$ functioni ipſius x tantum

ita vt ſit $Q = \frac{K}{y^4}$ et $(\frac{dQ}{dx}) = \frac{1}{y^4}(\frac{dK}{dx})$

vbi $(\frac{dK}{dx})$ erit functio ipſius x. Nunc in altera aequatione quoque x ſumatur conſtans, fietque:

$$4Pdy + 2ydP + \frac{dy}{y^3}(\frac{dK}{dx}) = 0$$

quae per y multiplicata et integrata dat:

$$2Pyy - \frac{1}{y}(\frac{dK}{dx}) = 2L, \text{ ideoque}$$

$$P = \frac{L}{yy} + \frac{1}{2y^3}(\frac{dK}{dx})$$

vbi L denotat functionem ipſius x tantum. Deſtructis ergo iſtis membris, ob $(\frac{dP}{dx}) = \frac{1}{yy}(\frac{dL}{dx}) + \frac{1}{2y^3}(\frac{ddK}{dx^2})$ erit altera pars integralis:

$$-dx^2\int((1+xx)^{\frac{n-1}{2}}(Ly^{n+2}dx + \tfrac{1}{2}y^{n+1}dx(\tfrac{dK}{dx}) + Ky^n dy)$$
$$-2a\,dx^2\int(\frac{dy}{yy}(\frac{dL}{dx}) + \frac{dy}{2y^3}(\frac{ddK}{dx^2}))$$

quae cum conſtet duobus membris, pro priori eſſe debet $L=0$, et membri $\int(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}(\frac{1}{2}y^{n+1}dx(\frac{dK}{dx}) + Ky^n dy)$ integrale erit $\frac{Ky^{n+1}}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$. Supereſt ergo vt reddatur $\frac{y^{n+1}dK}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{(n-1)Ky^{n+1}xdx}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-3}{2}}$ $= \frac{1}{2}y^{n+1}dK(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$, ſeu $2(n-1)Kxdx = (n-1)dK(1+xx)$.

Atque hinc elicitur $K = 1 + xx$; ita vt alterius partis integralis membrum prius ſit $-\frac{1}{n+1} y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}}$: at membrum poſterius ob $L = 0$ et $(\frac{ddK}{dx^2}) = 2$ fiet

$$-2adx^2 \int \frac{dy}{y^3} = \frac{adx^2}{yy}$$

cuius integratio cum ſponte ſucceſſerit, totum negotium eſt confectum, et integralis pars altera erit:

$$-\frac{1}{n+1} y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{adx^2}{yy}.$$

Cum deinde ſit $L = 0$ et $K = 1 + xx$, erit $(\frac{dK}{dx}) = 2x$, hincque fiet: $P = \frac{x}{y^3}$ et $Q = \frac{1+xx}{y^4}$; ex quo integralis pars prima habebitur

$$\frac{2axdxdy}{y^3} + \frac{a(1+xx)dy^2}{y^4}$$

Quocirca aequationis differentio - differentialis propoſitae adhibito termino conſtante Cdx^2 integrale completum erit:

$$\frac{adx^2}{yy} + \frac{2axdxdy}{y^3} + \frac{a(1+xx)dy^2}{y^4} - \frac{1}{n+1} y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = Cdx^2;$$

ſeu per y^4 multiplicando:

$$\frac{1}{n+1} y^{n+5} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = a(yydx^2 + 2xydxdy + (1+xx)dy^2) - Cy^4dx^2$$

quod egregie conuenit cum eo, quod ante per methodum indirectam eram aſſecutus.

Coroll. I.

14. Aequatio ergo differentio-differentialis

$$2addy - \frac{4ady^2}{y} - y^{n+4} dx^2 (1+xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0$$

integrabilis redditur, ſi multiplicetur per hunc factorem

$$\frac{xdx}{y^3} + \frac{(1+xx)dy}{y^4}$$

qui

qui ſi aliunde cognoſci potuiſſet, integratio ſine vlla difficultate perfecta fuiſſet.

Coroll. 2.

15. Viciſſim ergo ſi aequatio integralis inuenta

$$\frac{ayydx^2 + 2axydxdy + a(1+xx)dy^2}{y^4} - \frac{1}{n+1} y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = C\,dx^2$$

ſumto elemento dx conſtante differentietur, quo pacto conſtans C ex calculo egreditur, differentiale erit diuiſibile per hanc formulam $\frac{x\,dx}{y^3} + \frac{(1+xx)\,dy}{y^4}$, ſeu hanc $xydx + (1+xx)dy$, et diuiſione inſtituta ipſa demum aequatio differentio-differentialis propoſita proueniet.

Coroll. 3.

16. Si aequatio propoſita per $\frac{\surd(1+xx)}{y^4}$ multiplicetur, vt habeatur

$$2a\left(ddy - \frac{2dy^2}{y}\right)\frac{\surd(1+xx)}{y^4} - y^n dx^2 (1+xx)^{\frac{n}{2}} = 0$$

multiplicator eam reddens integrabilem erit:

$$\frac{xy\,dx}{\surd(1+xx)} + dy\surd(1+xx) = d.\,y\surd(1+xx)$$

Quare ſi ponatur $y\surd(1+xx) = z$, haec obtinebitur aequatio:

$$\frac{2addz(1+xx)^2}{z^4} - \frac{4adz^2(1+xx)^2}{z^5} + \frac{4axdxdz(1+xx)}{z^4} - \frac{2adx^2}{z^3} - z^n dx^2 = 0$$

quae per dz multiplicata integrationem admittit. Erit enim integrale:

$$\frac{a\,dz^2(1+xx)^2}{z^4} + \frac{a\,dx^2}{zz} - \frac{1}{n+1} z^{n+1} dx^2 = C\,dx^2.$$

Coroll.

Coroll. 4.

17. Hinc ergo patet, quomodo per idoneam ſubſtitutionem integratio ſubleuari queat; cum enim aequatio propoſita per ſubſtitutionem $y = \frac{z}{\sqrt{(1+xx)}}$ in hanc poſteriorem formam fuerit transmutata, non amplius foret difficile integrationem peragere. Sed praeterquam quod talis ſubſtitutio non facile occurrat, ſi multiplicator fuerit ordinis tertii, vel altioris, huiusmodi reductio ne locum quidem habere poterit.

Scholion.

18. In hac ſolutione vſus ſum ſingulari ſpecie calculi, qua ad plurium litterarum introductionem vitandam differentiale functionis P duarum variabilium x et y expreſſi per

$$dP = dx\left(\frac{dP}{dx}\right) + dy\left(\frac{dP}{dy}\right)$$

vbi more iam ſatis vſitato, $dx\left(\frac{dP}{dx}\right)$ denotat incrementum ipſius P ex ſola variabilitate ipſius x oriundum, et $dy\left(\frac{dP}{dy}\right)$ eius incrementum, quod ex variabilitate ſolius y naſcitur; conſtat autem haec duo incrementa addita praebere completum differentiale ipſius P ex vtra variabili x et y natum. Hinc formulae $\left(\frac{dP}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ denotabunt functiones finitas variabilium x et y, quippe quae per differentiationem omiſſis differentialibus habentur, ita ſi ſit $P = y\sqrt{(1+xx)}$, erit $\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{xy}{\sqrt{(1+xx)}}$ et $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \sqrt{(1+xx)}$. Tum vero cognita altera parte huiusmodi differentialis veluti $dx\left(\frac{dP}{dx}\right)$, ipſa quantitas P inde ex parte cognoſcitur. Spectata enim ſola x vt

variabili

variabili erit $P = \int dx\left(\frac{dP}{dx}\right) + Y$, denotante Y functionem ipſius y tantum, atque ex hoc fonte in ſolutione valores quantitatum P et Q determinaui. Manifeſtum eſt quoque, ſi K fuerit functio ipſius x tantum, tum $dx\left(\frac{dK}{dx}\right)$ eius completum differentiale iam ſignificare, ita vt ſit $dx\left(\frac{dK}{dx}\right) = dK$: porro autem haec ſcriptio $\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$ denotat idem quod $\left(\frac{d.(dK:dx)}{dx}\right)$, ſeu ſi ponatur $\left(\frac{dK}{dx}\right) = k$, erit $\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = \left(\frac{dk}{dx}\right)$. Erit enim pariter k functio ipſius x tantum; ita ſi ſit $K = \sqrt{(1+xx)}$, erit $\left(\frac{dK}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ et $\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = \frac{1}{(1+xx)\sqrt{(1+xx)}}$: hocque modo vlterius progredi licebit, vt ſit $\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = \frac{-3x}{(1+xx)^2\sqrt{(1+xx)}}$, atque haec ad intelligentiam tam huius ſolutionis, quam ſequentium annotaſſe neceſſe eſt viſum. Caeterum conſideratio huius ſolutionis facile deducit ad ſequens Theorema generalius.

Theorema I.

19. Iſta aequatio differentialis ſecundi gradus, poſito dx conſtante,

$$a\,ddy - \frac{ma\,dy^2}{y} + y^n dx^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-4m+2}{2m-2}} = 0$$

integrabilis redditur, ſi multiplicetur per hunc factorem:

$$\frac{(\beta+\gamma x)dx}{(m-1)y^{2m-1}} + \frac{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)dy}{y^{2m}}$$

atque aequatio integralis erit:

$$\frac{a\gamma y^2dx^2 + 2(m-1)a(\beta+\gamma x)y\,dx\,dy + (m-1)^2 a(\alpha+2\beta x+\gamma xx)dy^2}{2(m-1)^2 y^{2m}}$$

$$+ \frac{y^{n-2m+1}dx^2}{n-2m+1}(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^{\frac{n-2m+1}{2m-2}} = C\,dx^2.$$

 Coroll.

Coroll. 1.

20. Si fuerit $n=1$, prodibit iſta aequatio differentialis ſecundi gradus:

$$addy - \frac{m\,a\,dy^2}{y} + \frac{y\,dx^2}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^2} = 0$$

quae ergo multiplicata per $\frac{(\beta+\gamma x)dx}{(m-1)y^{2m-1}} + \frac{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)dy}{y^{2m}}$

fit integrabilis, eius integrali exiſtente:

$$\frac{a\gamma yydx^2 + 2(m-1)a(\beta+\gamma x)ydxdy + (m-1)^2 a(\alpha+2\beta x+\gamma xx)dy^2}{2(m-1)^2 y^{2m}}$$

$$-\frac{yydx^2}{2(m-1)y^{2m}(\alpha+2\beta x+\gamma xx)} = Cdx^2.$$

Coroll. 2.

21. Poſito $m-1=\mu$, ſi ſtatuamus $y=e^{\int v dx}$, aequatio noſtra fiet differentialis primi ordinis:

$$adv - \mu avvdx + \frac{dx}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^2} = 0$$

cuius ergo integralis erit

$$a\gamma yydx^2 + 2\mu a(\beta+\gamma x)ydxdy + \mu^2 a(\alpha+2\beta x+\gamma xx)dy^2$$
$$-\frac{\mu yydx^2}{\alpha+2\beta x+\gamma xx} = 2\mu\mu Cy^{2m}dx^2$$

ſeu pro y valore ſuo ſubſtituto

$$a\gamma + 2\mu a(\beta+\gamma x)v + \mu^2 a(\alpha+2\beta x+\gamma xx)vv - \frac{\mu}{\alpha+2\beta x+\gamma xx}$$
$$= 2\mu\mu Ce^{2\mu\int vdx}.$$

Coroll. 3.

22. Statim ergo aequationis differentialis propoſitae:

$$adv - \mu avvdx + \frac{dx}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^2} = 0$$

poſito

poſito $C = 0$, habemus aequationem integralem particularem, quae eſt:

$$0 = a\gamma + 2\mu a(\beta + \gamma x)v + \mu^2 a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)vv - \frac{\mu}{\alpha + 2\beta x + \gamma xx}$$

ex qua per methodum a me alias expoſitam integrale completum erui poteſt. Quin etiam, ſi illa aequatio differentialis per hanc formam integralem diuidatur, integrabilis reddetur.

Problema 2.

23. Propoſita aequatione differentiali ſecundi gradus:

$$\frac{ddy}{y} + \frac{a\,dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + \epsilon yy)^2} = 0$$

In qua differentiale dx ſumtum eſt conſtans, eius integrale inuenire.

Solutio.

Tentetur iterum integratio per factorem $Pdx + Qdy$, ac poſito breuitatis gratia $\alpha + 2\beta x + \gamma xx + \epsilon yy = Z$, conuertatur aequatio in hanc formam:

$$ddy + \frac{ay\,dx^2}{ZZ} = 0$$

quae per $Pdx + Qdy$ multiplicata praebet:

$$Pdx\,ddy + Qdy\,ddy + \frac{aPy\,dx^3}{ZZ} + \frac{aQy\,dx^2\,dy}{ZZ} = 0.$$

Quae cum integrabilis eſſe debeat, dabit ſtatim

I. *primam integralis partem* $= Pdx\,dy + \frac{1}{2}Qdy^2$;

ſupereſt ergo, vt integrabilis reddatur ſequens expreſſio:

$$-\tfrac{1}{2}dy^3\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \tfrac{1}{2}dx\,dy^2\left(\frac{dQ}{dx}\right) + \frac{aQy\,dx^2\,dy}{ZZ} + \frac{aPy\,dx^3}{ZZ}$$
$$- dx\,dy^2\left(\frac{dP}{dy}\right) - dx^2\,dy\left(\frac{dP}{dx}\right).$$

Primum ergo neceſſe eſt, vt ſit $(\frac{dQ}{dy}) = 0$, vnde ſit Q functio ipſius x tantum, quae ſit $Q = K$; tum vero etiam termini dy^2 inuoluentes deſtruendi ſunt, ex quibus ſit:

$$(\frac{dK}{dy}) + 2(\frac{dP}{dx}) = 0$$

ſeu ſumto ſolo y pro variabili:

$$dy(\frac{dK}{dx}) + 2dP = 0$$

cuius integrale eſt

$$P = L - \tfrac{1}{2}y(\frac{dK}{dx})$$

denotante L quoque functionem ipſis x. Quare ob

$$(\frac{dP}{dx}) = (\frac{dL}{dx}) - \tfrac{1}{2}y(\frac{ddK}{dx^2})$$

et dx ſumtum conſtans, altera pars integralis erit:

$$dx^2\int\frac{ay}{ZZ}(Ldx - \tfrac{1}{2}ydx(\frac{dK}{dx}) + Kdy) - dx^2\int dy((\frac{dL}{dx}) - \tfrac{1}{2}y(\frac{ddK}{dx^2}))$$

at eſt $\int\frac{aKydy}{ZZ} = aK\int\frac{ydy}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)^2}$

vnde pro integrali naſcitur

II. pars $= -\frac{a}{2c}\cdot\frac{Kdx^2}{\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy}$

ideoque debet eſſe:

$$\frac{ay}{ZZ}(Ldx - \tfrac{1}{2}ydK) = -\frac{a}{2c}\cdot\frac{(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)dK - 2Kdx(\beta+\gamma x)}{ZZ}$$

ſeu

$$acLydx - \tfrac{1}{2}acyydK = aKdx(\beta+\gamma x) - \tfrac{1}{2}adK(\alpha+2\beta x+\gamma xx+cyy)$$

vel $acLydx = aKdx(\beta+\gamma x) - \tfrac{1}{2}adK(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$

Perſpicuum ergo eſt, eſſe debere

$$L = 0 \text{ et } K = \alpha+2\beta x+\gamma xx.$$

Quare ob $(\frac{ddK}{dx^2}) = 2\gamma$ erit

III. vltima pars integralis $= +\tfrac{1}{2}\gamma yydx^2$.

Cum

Cum igitur ſit:

$$P = -\gamma(\beta + \gamma x) \text{ et } Q = \alpha + 2\beta x + \gamma xx$$

erit noſter multiplicator:

$$-y dx(\beta + \gamma x) + dy(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)$$

et integrale quaeſitum habebitur:

$$-y dx dy(\beta + \gamma x) + \tfrac{1}{2} dy^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) - \frac{a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2}{2c(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\gamma yy dx^2 = C dx^2$$

At ſi ponatur $C = \frac{-a}{2c} + C$, erit hoc integrale:

$$\tfrac{1}{2}\gamma yy dx^2 - y dx dy(\beta + \gamma x) + \tfrac{1}{2} dy^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)$$
$$+ \frac{a yy dx^2}{2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)} = C dx^2.$$

Quae forma conuenit cum ea, quam ſupra exhibui.

Theorema 2.

24. Iſta aequatio differentialis ſecundi gradus poſito dx conſtante

$$ddy + \frac{a y^{n+1} dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)^{\frac{n+4}{2}}} = 0$$

integrabilis reddetur per multiplicatorem:

$$-y dx(\beta + \gamma x) + dy(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)$$

et integrale erit:

$$\tfrac{1}{2}\gamma yy dx^2 - y dx dy(\beta + \gamma x) + \tfrac{1}{2} dy^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)$$
$$+ \frac{a y^{n+2} dx^2}{(n+2)(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)^{\frac{n+2}{2}}} = C dx^2.$$

Coroll. 1.

25. Caſus problematis naſcitur ex Theoremate hoc, ſi ponatur $n = 0$. Ceterum integrale in Theore-

mate exhibitum ſimili modo elicitur, quo ſolutionem problematis expediuimus; vnde ſuperfluum foret eius demonſtrationem adiicere.

Coroll. 2.

26. Si ponatur $c = 0$, caſus habebitur, quem etiam ex Theoremate primo deriuare licet, ſi ibi ponatur $m = 0$. Dum enim pro a ſcribitur $\frac{1}{a}$ et $n+1$ loco n; integrale ibi datum perfecte congruit cum hoc, quod iſtud Theorema ſuppeditat pro caſu $c = 0$.

Coroll. 3.

27. Hoc autem Theorema adeo primum in ſe complectitur: aequatio enim primi

$$addy - \frac{mady^2}{y} + y^n dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}} = 0$$

ſi ponatur $y = z^{\frac{1}{1-m}}$ abit in hanc:

$$\frac{a}{1-m} z^{\frac{m}{1-m}} ddz + z^{\frac{n}{1-m}} dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}} = 0$$

ſeu $\frac{addz}{1-m} + z^{\frac{n-m}{1-m}} dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}} = 0.$
Quodſi iam ſtatuatur $\frac{n-m}{1-m} = n+1$, vt fiat $n = 1 - n(m-1)$ aequatio haec abibit in iſtam formam:

$$\frac{addz}{1-m} + z^{n+1} dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{-n-4}{2}} = 0$$

quae eſt caſus particularis praeſentis Theorematis, ex quo quippe naſcitur, ponendo $c = 0$.

Coroll.

Coroll. 4.

28. Praeſens ergo Theorema latiſſime patet, atque eiusmodi caſus difficillimos in ſe complectitur, qui nullo alio modo reſolui poſſe videntur. Si enim $c = 0$, fortaſſe reperietur methodus negotium conficiens, propterea quod variabiles non ſunt inuicem permixtae: at ſi c non $= 0$, ob permixtionem variabilium nulla methodus cognita hic cum ſucceſſu in vſum vocabitur.

Coroll. 5.

29. Caſus hic imprimis notatu dignus hic occurrit, ſi $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = c = 1$, quo habetur haec aequatio:

$$ddy + \frac{ay^{n+1}dx^2}{(xx+yy)^{\frac{n+4}{2}}} = 0$$

cuius ergo integrale eſt:

$$\tfrac{1}{2}(ydx - xdy)^2 + \frac{ay^{n+2}dx}{(n+2)(xx+yy)^{\frac{n+2}{2}}} = Cdx^2$$

Ponatur $y = ux$, erit $ydx - xdy = -xxdu$, fietque integrale:

$$\tfrac{1}{2}x^4du^2 + \frac{au^{n+2}dx^2}{(n+2)(1+uu)^{\frac{n+2}{2}}} = Cdx^2$$

ideoque $\frac{dx}{xx} = \frac{du(1+uu)^{\frac{n+2}{4}}}{\sqrt{(2C(1+uu)^{\frac{n+2}{2}} - \frac{2a}{n+2}u^{n+2})}}$

quae ob variabiles ſeparatas denuo integrari poteſt.

Scholion.

Scholion.

30. Hic quoque multiplicatoris forma ſubſtitutionem idoneam praebet, cuius ope aequatio differentio-differentialis in aliam tractatu faciliorem transformabitur. Statui ſcilicet oportet

$$y = z\sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)}$$

Hanc vero ipſam ſubſtitutionem ſuadet formulae indoles

$$(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)^{\frac{n+4}{2}}$$

quia hoc pacto vnica variabilis in vinculo relinquitur. At per hanc ſubſtitutionem ipſa aequatio multo magis fit perplexa, ita vt, etiamſi per factorem ſimpliciorem $dz(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{5}{2}}$ ad integrabilitatem reuocetur, id tamen minus pateat. Verum ſi multiplicator fuerit ordinis tertii, ſeu altioris, ne huiusmodi quidem ſubſtitutio commode inueniri poteſt, vti in duobus reliquis exemplis vſu venit.

Problema 3.

31. Propoſita aequatione differentiali ſecundi gradus:

$$yyddy + mydy^2 = axdx^2$$

in qua differentiale dx ſumtum eſt conſtans, eius integrale inuenire.

Solutio.

Quia multiplicator neque primi, neque ſecundi ordinis ſuccedit, ex ordine tertio deſumatur. Perducta ergo aequatione ad hanc formam:

$$ddy + \frac{mdy^2}{y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0$$

multi-

multiplicetur ea per $Pdx^2 + 2Qdxdy + 3Rdy^2$; vnde ſtatim habebitur:

I. prima pars integralis $Pdx^2dy + Qdxdy^2 + Rdy^3$ et integrando relinquitur haec forma:

$$-\frac{aPxdx^4}{yy} - \frac{2aQxdx^3dy}{yy} - \frac{3aRxdx^2dy^2}{yy}$$
$$+ \frac{mPdx^2dy^2}{y} + \frac{2mQdxdy^3}{y} + \frac{3mRdy^4}{y}$$
$$-dx^3dy\left(\frac{dP}{dx}\right) - dx^2dy^2\left(\frac{dP}{dy}\right) - dxdy^3\left(\frac{dQ}{dy}\right) - dy^4\left(\frac{dR}{dy}\right)$$
$$-dx^2dy^2\left(\frac{dQ}{dx}\right) - dxdy^3\left(\frac{dR}{dx}\right).$$

Haec autem forma integrabilis eſſe nequit, niſi membra, quae dy^2, dy^3 et dy^4 implicant, deſtruantur. Primum ergo pro dy^4 habebimus:

$$\frac{3mR}{y} - \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0, \text{ ſeu } 3mRdy = ydR$$

vbi x ſumitur pro conſtante, vnde fit $R = Ky^{3m}$, denotante K functionem ipſius x tantum, ſicque erit: $\left(\frac{dR}{dx}\right) = y^{3m}\left(\frac{dK}{dx}\right)$. Iam pro deſtructione terminorum dy^3 continentium, fiet:

$$\frac{2mQ}{y} - \left(\frac{dQ}{dy}\right) - y^{3m}\left(\frac{dK}{dx}\right) = 0$$

ſeu ſumto x conſtante:

$$2mQdy - ydQ = y^{3m+1}dy\left(\frac{dK}{dx}\right)$$

quae diuiſa per y^{2m+1} et integrata dat:

$$\frac{-Q}{y^{2m}} = \frac{1}{m+1}y^{m+1}\left(\frac{dK}{dx}\right) - L.$$

Sumta denuo L pro functione ipſius x, ita vt ſit

$$Q = Ly^{2m} - \frac{1}{m+1}y^{3m+1}\left(\frac{dK}{dx}\right), \text{ ideoque}$$
$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = y^{2m}\left(\frac{dL}{dx}\right) - \frac{1}{m+1}y^{3m+1}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right).$$

 Deſtru-

Deſtruantur denique etiam termini dy^2 continentes, vnde prodit:

$$-3aKy^{2m-2}x-y^{2m}\left(\frac{dL}{dx}\right)+\frac{1}{m+1}y^{3m+1}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$+\frac{mP}{y}-\left(\frac{dP}{dy}\right)=0$$

quae ſumta x conſtante per ydy multiplicata praebet:

$$-3aKxy^{2m-1}dy-y^{2m+1}dy\left(\frac{dL}{dx}\right)+\frac{1}{m+1}y^{3m+2}dy\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$+mPdy-ydP=0$$

quae per y^{m+1} diuiſa et integrata dat:

$$\frac{-3a}{2m-1}Kxy^{2m-1}-\frac{1}{m+1}y^{m+1}\left(\frac{dL}{dx}\right)+\frac{1}{2(m+1)^2}y^{2m+2}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$\frac{-P}{y^m}+M=0$$

denotante M functionem ipſius x tantum. Ergo fit

$$P=My^m-\frac{3a}{2m-1}Kxy^{3m-1}-\frac{1}{m+1}y^{2m+1}\left(\frac{dL}{dx}\right)+\frac{1}{2(m+1)^2}y^{3m+2}\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$

ideoque

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)=y^m\left(\frac{dM}{dx}\right)-\frac{3a}{2m-1}Ky^{3m-1}-\frac{3ax}{2m-1}y^{3m-1}\left(\frac{dK}{dx}\right)-\frac{1}{m+1}y^{2m+1}\left(\frac{ddL}{dx^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2(m+1)^2}y^{3m+2}\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right).$$

Nunc termini $-\frac{2aQxdx^3dy}{yy}-dx^3dy\left(\frac{dP}{dx}\right)$, integrati, x pro conſtante ſumta, ſuppeditabunt

II. alteram integralis partem:

$$-2axdx^3\left(\frac{1}{2m-1}Ly^{2m-1}-\frac{1}{3m(m+1)}y^{3m}\left(\frac{dK}{dx}\right)\right)-Ndx^3$$
$$-dx^3\left(\frac{1}{m+1}y^{m+1}\left(\frac{dM}{dx}\right)-\frac{a}{m(2m-1)}Ky^{3m}-\frac{ax}{m(2m-1)}y^{3m}\left(\frac{dK}{dx}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(m+1)^2}y^{2m+2}\left(\frac{ddL}{dx^2}\right)+\frac{1}{6(m+1)^3}y^{3m+3}\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right)\right);$$

Huius ergo differentiale poſito y conſtante ſumtum aequale eſſe debet reſiduae parti $\frac{-aPxdx^4}{yy}$: vnde per dx^4 diuiſo habebimus ſequentem aequationem:

$aMxy$

$a M x y^{m-2} - \frac{2aaxx}{2m-1} K y^{2m-3} - \frac{ax}{m+1} y^{2m-1} \left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{ax}{2(m+1)^2} y^{3m} \left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$
$- \frac{2a}{2m-1} L y^{2m-1} + \frac{2a}{3m(m+1)} y^{3m} \left(\frac{dK}{dx}\right) - \frac{2ax}{2m-1} y^{2m-1} \left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{2ax}{3m(m+1)} \times$
$y^{3m} \left(\frac{ddK}{dx^2}\right) - \frac{1}{m+1} y^{m+1} \left(\frac{ddM}{dx^2}\right) + \frac{a}{m(2m-1)} y^{3m} \left(\frac{dK}{dx}\right) + \frac{a}{m(2m-1)} y^{3m} \left(\frac{dK}{dx}\right)$
$+ \frac{ax}{m(2m-1)} y^{3m} \left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \frac{1}{2(m+1)^2} y^{2m+2} \left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) - \frac{1}{6(m+1)} y^{3m+3}$
$\left(\frac{d^4K}{dx^4}\right) =$ functioni ipſius $x = \left(\frac{dN}{dx}\right)$.

Hic iam ſingulae diuerſae ipſius y poteſtates ſeorſim ad nihilum redigantur, et quia y^{m-2} et y^{2m-3} ſemel occurrunt, niſi ſit vel $m = 2$, vel $m = 1$, habebimus $M = 0$, et $K = 0$; et ſupererunt tantum termini per L affecti, inter quos ſolitarius eſt y^{2m+2}; vnde eſſe debet $\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) = 0$, ideoque $L = \alpha + 2\beta x + \gamma xx$, reliqui per y^{2m-1} affecti dant:

$$-\frac{2ax(\beta + \gamma x)}{m+1} - \frac{2a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)}{2m-1} - \frac{4ax(\beta + \gamma x)}{2m-1} = 0.$$

Hinc debet eſſe $\alpha = 0$, et $\frac{\beta + \gamma x}{m+1} + \frac{4\beta + 3\gamma x}{2m-1} = 0$. Quibus conditionibus in genere ſatisfieri nequit; conſtituendi ergo ſunt caſus ſequentes:

I. Si $\alpha = 0$, et $\gamma = 0$, fiet $m = -\frac{1}{2}$, ita vt aequatio propoſita ſit:

$$yy\,ddy - \tfrac{1}{2} y\,dy^2 = ax\,dx^2$$

ſeu

$$ddy - \frac{dy^2}{2y} - \frac{ax\,dx^2}{yy} = 0.$$

Cum igitur ſit $K = 0$, $L = x$, $M = 0$, erit:

$$R = 0;\ Q = \frac{x}{y};\ \text{et } P = -2$$

et noſter multiplicator erit: $-2dx^2 + \frac{2x\,dx\,dy}{y}$

ideoque integrale quaeſitum:

$$-2dx^2\,dy + \frac{x\,dx\,dy^2}{y} + \frac{ax\,x\,dx^2}{yy} = C\,dx^2,$$

ſeu

ſeu per dx diuidendo

$$axxdx^2 + xydy^2 - 2yydxdy = Cyydx^2$$

II. Sit $\alpha = 0$; $\beta = 0$; erit $m = -\frac{2}{3}$; et aequatio differentio-differentialis propoſita:

$$ddy - \frac{2dy^2}{3y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0.$$

Cum igitur ſit $K = 0$, $L = xx$, et $M = 0$, erit

$$R = 0;\ Q = xxy^{-\frac{4}{3}};\ P = -\tfrac{10}{3}xy^{\frac{1}{3}}$$

vnde noſter multiplicator fiet:

$$-\tfrac{10}{3}xy^{\frac{1}{3}}dx^2 + 2xxy^{-\frac{4}{3}}dxdy$$

et integrale quaeſitum

$$-\tfrac{10}{3}xy^{\frac{2}{3}}dx^2dy + xxy^{-\frac{4}{3}}dxdy^2 + \tfrac{10}{9}ax^3y^{-\frac{2}{3}}dx^3 + \tfrac{25}{9}y^{\frac{5}{3}}dx^3 = Cdx^3$$

ſeu per dx diuidendo, et $y^{\frac{4}{3}}$ multiplicando,

$$-\tfrac{10}{3}xyydxdy + xxydy^2 + \tfrac{10}{9}ax^3dx^2 + \tfrac{25}{9}y^3dx^2 = Cy^{\frac{4}{3}}dx^2$$

III. Ante vero iam duos caſus commemorauimus, quibus eſt vel $m = 1$, vel $m = 2$. Sit ergo primo $m = 1$ et aequatio propoſita

$$ddy + \frac{dy^2}{y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0$$

ac fieri debet

$$\left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{aMx}{y} - 3aaxxK - \tfrac{1}{3}axy\left(\frac{dL}{dx}\right) + \tfrac{1}{3}axy^3\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$-2aLy + \tfrac{1}{3}ay^3\left(\frac{dK}{dx}\right) - 2axy\left(\frac{dL}{dx}\right) + \tfrac{1}{3}axy^3\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$
$$-\tfrac{2}{3}yy\left(\frac{ddM}{dx^2}\right) + 2ay^3\left(\frac{dK}{dx}\right) + axy^3\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \tfrac{1}{3}y^4\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) - \tfrac{1}{27}y^6\left(\frac{d^4K}{dx^4}\right)$$

vnde obtinemus $M = 0$; $N = -3aa\int Kxxdx$; et

$$-\tfrac{5}{3}x\left(\frac{dL}{dx}\right) - 2L = 0;\ \tfrac{25}{54}x\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \tfrac{7}{3}\left(\frac{dK}{dx}\right) = 0$$
$$\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) = 0;\ \left(\frac{d^4K}{dx^4}\right) = 0.$$

His

His conditionibus ſatisfit, ſi ſumatur:

$$L=0;\ K=1;\ M=0;\ \text{et}\ N=-aax^{3}$$

vnde fit: $R=y^{5}$; $Q=0$; $P=-3axy^{2}$.

Quare noſter multiplicator erit:

$$-3axy^{2}dx^{2}+3y^{5}dy^{2}$$

et integrale quaeſitum:

$$-3axy^{2}dx^{2}dy+y^{5}dy^{3}+2y^{3}dx^{3}+2aax^{3}dx^{3}=Cdx^{3}.$$

IV. Sit iam $m=2$, vt aequatio noſtra fiat

$$ddy+\frac{2dy^{2}}{y}-\frac{axdx^{2}}{yy}=0$$

ac ſatisfieri debet huic aequationi:

$$\left(\frac{dN}{dx}\right)=aMx-aaKxxy^{3}-\tfrac{5}{2}aLy^{3}-axy^{3}\left(\frac{dL}{dx}\right)-\tfrac{1}{2}y\left(\frac{ddN}{dx^{2}}\right)$$
$$+\tfrac{4}{3}ay^{6}\left(\frac{dK}{dx}\right)+\tfrac{1}{12}y^{6}\left(\frac{d^{3}L}{dx^{3}}\right)+\tfrac{1}{3}axy^{6}\left(\frac{ddK}{dx^{2}}\right)-\tfrac{1}{108}y^{9}\left(\frac{d^{4}K}{dx^{4}}\right).$$

Erit ergo $N=a\int Mxdx$; ac ſtatui poteſt $L=0$; $K=0$; $M=1$, vnde fit $N=\tfrac{1}{2}axx$. Hinc vero fit:

$$R=0;\ Q=0;\ P=y^{2}$$

ita vt multiplicator futurus ſit $ydxy^{2}$ et integrale:

$$yydx^{2}dy-\tfrac{1}{2}axxdx^{3}=Cdx^{3},\ \text{ſeu}$$

$$2yydy-axxdx=Cdx.$$

Coroll. 1.

32. Caſus ergo vltimus, quo $m=2$, eſt omnium facillimus, cum per multiplicatorem adeo primi ordinis confici poſſit, quin primo intuitu aequationis

$$yyddy+2ydy^{2}=axdx^{2}$$

integrale $yydy=\tfrac{1}{2}axxdx+Cdx$ patet. Caſus autem primus et ſecundus, quibus eſt $m=-\tfrac{1}{2}$ et $m=-\tfrac{2}{3}$ per multi-

multiplicatorem formae ſecundae, ob $R=0$, reſolui potuiſſent.

Coroll. 2.

33. Solus ergo caſus tertius, quo eſt $m=1$, reſolutu eſt difficillimus, quia requirit multiplicatorem formae tertiae. Quare notetur, ſequentem aequationem differentialem ſecundi gradus

$$yyddy+ydy^2-axdx^2=0$$

integrabilem reddi, ſi multiplicetur per

$$3ydy^2-3axdx^2$$

et integrale eſſe:

$$y^3dy^3-3axyydx^2dy+ay^3dx^3+aax^3dx^3=Cdx^3.$$

Coroll. 3.

34. Porro autem notandum eſt, hanc expreſſionem in tres factores ſimplices reſolui poſſe. Si enim ponatur breuitatis gratia $a=c^3$ et $\mu=-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\nu=-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, aequatio haec integralis ita repraeſentari poteſt:

$$(ydy+cydx+c^2xdx)(ydy+\mu cydx+\nu c^2xdx)(ydy+\nu cydx+\mu c^2xdx)=Cdx^3.$$

Coroll. 4.

35. Hinc ſi conſtans C ſumatur $=0$, tres ſtatim prodeunt aequationes integrales particulares:

$$ydy+cydx+c^2xdx=0$$
$$ydy+\mu cydx+\nu c^2xdx=0$$
$$ydy+\nu cydx+\mu c^2xdx=0$$

quarum

quarum prima continet caſum iam ſupra (7) indicatum. duae reliquae vero ſunt imaginariae.

Scholion.

36. Reſtat ergo quartum exemplum, quod erat

$$ds^2(\alpha ss+\beta s+\gamma)=rrdr^2+2r^3ddr$$

quod poſito

$$r=y^{\frac{2}{3}};\ \text{vt ſit}\ dr=\tfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy,\ \text{et}\ ddr=\tfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}ddy-\tfrac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}}dy^2$$

abit in hanc formam:

$$\tfrac{4}{3}y^{\frac{5}{3}}ddy=ds^2(\alpha ss+\beta s+\gamma).$$

In genere autem obſeruo, ſi habeatur huiusmodi aequatio:

$$Sds^2=mr^{\mu}dr^2+nr^{\mu+1}ddr$$

eam per ſubſtitutionem $r=y^{\frac{n}{m+n}}$ reduci ad hanc formam ſimpliciorem:

$$Sds^2=\frac{nn}{m+n}y^{\frac{\mu n-m+n}{m+n}}ddy.$$

Huiusmodi ergo aequationes omnes complecti licet in hac forma generali: $ddy=y^nXdx^2$. Videamus ergo quibusnam caſibus tam exponentis n, quam functionis X, haec aequatio integrari queat per noſtram methodum.

Problema 4.

37. Caſus pro exponente n et naturam functionis X inuenire, quibus haec aequatio differentialis ſecundi gradus

$$ddy+y^nXdx^2=0,$$

vbi dx eſt conſtans, integrari queat.

Solutio

Solutio I.

Sumatur primo multiplicator primi ordinis P, et integranda erit haec aequatio:

$$Pddy + y^n PX dx^2 = 0$$

ac integralis pars prima erit $= Pdy$, et integranda reſtat haec expreſſio:

$$y^n PX dx^2 - dx\,dy\left(\frac{dP}{dx}\right) - dy^2\left(\frac{dP}{dy}\right)$$

vnde neceſſe eſt, ſit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0$, ideoque P functio ipſius x tantum. Sit ergo $P = K$, et integrari oportet ob dx conſtans:

$$dx\left(y^n KX dx - dy\left(\frac{dK}{dx}\right)\right)$$

cuius integrale nequit eſſe, niſi $-y\,dx\left(\frac{dK}{dx}\right) = -y\,dK$. Oportet autem ſit $y^n KX dx^2 + y\,ddK = 0$, quod fieri nequit, niſi ſub his conditionibus:

$$n = 1 \text{ et } X = -\frac{ddK}{K\,dx^2}$$

ac tum aequatio integralis erit:

$$K\,dy - y\,dK = C\,dx.$$

Solutio II.

Sumto multiplicatore ſecundae formae $P\,dx + 2Q\,dy$, integrabilis efficienda eſt haec aequatio:

$$2Q\,dy\,ddy + P\,dx\,ddy + y^n X dx^2 (P\,dx + 2Q\,dy) = 0$$

vnde integralis pars prima colligitur $P\,dx\,dy + Q\,dy^2$. Supereſt ergo, vt integretur:

$$y^n PX dx^3 + 2y^n QX dx^2 dy$$
$$- dx^2 dy\left(\frac{dP}{dx}\right) - dx\,dy^2\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$- dx\,dy^2\left(\frac{dQ}{dx}\right) - dy^3\left(\frac{dQ}{dy}\right).$$

Hinc

Hinc quo termini tollantur, quibus dy plus vna habet dimenſione, oportet eſſe

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)=0; \text{ ideoque } Q=K \text{ functioni ipſius } x.$$

Deinde habebimus

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)+\left(\frac{dQ}{dx}\right)=0, \text{ ſeu } dP+dy\left(\frac{dK}{dx}\right)=0$$

vnde fit:

$$P=L-y\left(\frac{dK}{dx}\right) \text{ et } \left(\frac{dP}{dx}\right)=\left(\frac{dL}{dx}\right)-y\left(\frac{ddK}{dx^2}\right).$$

Iam altera pars integralis erit:

$$dx^2\int\left(y^n PX dx+2y^n QX dy-dy\left(\frac{dP}{dx}\right)\right) \text{ ſiue}$$

$$dx^2\int\left\{\begin{matrix} +y^n LX dx & +2y^n KX dy \\ -y^{n+1}X dx\left(\frac{dK}{dx}\right) & -dy\left(\frac{dL}{dx}\right)+y\,dy\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)\end{matrix}\right\}$$

ex variabilitate ipſius y ergo concluditur *altera pars integralis*.

$$\text{II. } dx^2\left(\frac{2}{n+1}y^{n+1}KX-y\left(\frac{dL}{dx}\right)+\frac{1}{2}yy\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)+M\right).$$

Ac variabilitas ipſius x poſtulat, vt ſit:

$$y^n LX-y^{n+1}X\left(\frac{dK}{dx}\right)=\frac{2}{n+1}y^{n+1}K\left(\frac{dX}{dx}\right)+\frac{2}{n+1}y^{n+1}X\left(\frac{dK}{dx}\right)$$
$$-y\left(\frac{ddL}{dx^2}\right)+\frac{1}{2}yy\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right)+\left(\frac{dM}{dx}\right).$$

Si n velimus indefinitum relinquere; eſſe debet

$$L=0;\ \left(\frac{d^3K}{dx^3}\right)=0 \text{ et } \left(\frac{dM}{dx}\right)=0; \text{ tum vero}$$

$$\frac{2}{n+1}K\left(\frac{dX}{dx}\right)+\frac{n+3}{n+1}X\left(\frac{dK}{dx}\right)=0$$

vnde colligitur $K^{\frac{n+3}{2}}X=A$ conſtanti: at ob $\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right)=0$ erit $K=\alpha+2\beta x+\gamma xx$, ideoque $X=\frac{A}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)^{\frac{n+3}{2}}}$ et $Q=\alpha+2\beta x+\gamma xx$; $P=-2y(\beta+\gamma x)$. Quocirca multiplicator erit:

$$-2y\,dx(\beta+\gamma x)+2dy(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$$

 et

et huius aequationis differentio-differentialis

$$ddy + \frac{Ay^n dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n+3}{2}}} = 0$$

integrale erit:

$$-2y\,dx\,dy(\beta + \gamma x) + dy^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{Ay^{n+1}}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n+1}{2}}} + \gamma yy\,dx^2 = C\,dx^2.$$

Superſunt autem caſus, quibus eſt vel $n=1$, vel $n=2$.

I. Sit $n=1$; et conditiones praecedentes poſtulant

$$LX + \left(\frac{ddL}{dx^2}\right) = 0;\ \frac{2}{n+1}K\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{n+3}{n+1}X\left(\frac{dK}{dx}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = 0$$

ſeu $LX\,dx^2 + ddL = 0$ et $2K\,dX + 4X\,dK + dx\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = 0$

hinc fit $2KKX + \int \frac{K\,d^3K}{dx^3} = \text{Conſt.}$ ideoque

$$2KKX\,dx^2 + K\,ddK - \tfrac{1}{2}dK^2 = C\,dx^2$$

et $X = \dfrac{E\,dx^2 + \frac{1}{2}dK^2 - K\,ddK}{2KK}$

pro priori conditione autem ponatur $L=0$. Quare erit

$$Q=K;\ P=-y\left(\frac{dK}{dx}\right);$$ atque huius aequationis

$$ddy + yX\,dx^2 = 0.$$

Exiſtente $X = \dfrac{E\,dx^2 + \frac{1}{2}dK^2 - K\,ddK}{2KK\,dx^2}$, quaecunque functio ipſius x ſumatur pro K, erit integrale:

$$-y\,dx\,dy\left(\frac{dK}{dx}\right) + K\,dy^2 + yyKX\,dx^2 + \tfrac{1}{2}yy\,dx^2\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) = C\,dx^2$$

II. Sit $n=2$; et conditiones poſtulant:

$$2K\,dX + 5X\,dK = 0;\ LX = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right);\ \left(\frac{ddL}{dx^2}\right) = 0.$$

Prima

Prima dat $X = AK^{-\frac{5}{2}}$, qui in altera ſubſtitutus praebet

$$2ALK^{-\frac{5}{2}}dx^3 = d^3K;$$

verum, ob $(\frac{ddL}{dx^2}) = 0$, erit $L = \alpha + \beta x$, vnde, poſito $K = (\alpha + \beta x)^\mu$, erit $2A(\alpha + \beta x)^{1-\frac{5\mu}{2}} = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\alpha + \beta x)^{\mu-3}\beta^3$ et $\mu = \frac{8}{7}$; hincque $2A = -\frac{48}{343}\beta^3$; et $X = \frac{A}{(\alpha+\beta x)^{\frac{20}{7}}} = -\frac{24\beta^3}{343(\alpha+\beta x)^{\frac{20}{7}}}$

Porro $Q = (\alpha + \beta x)^{\frac{8}{7}}$; $P = \alpha + \beta x - \frac{8}{7}\beta y(\alpha + \beta x)^{\frac{1}{7}}$
Conſequenter huius aequationis differentio-differentialis

$$ddy + y^2 X dx^2 = 0$$

exiſtente $X = -\frac{24\beta^3}{343(\alpha+\beta x)^{\frac{20}{7}}}$, integrale eſt

$$dx\,dy(\alpha + \beta x - \tfrac{8}{7}\beta y(\alpha+\beta x)^{\frac{1}{7}}) + dy^2(\alpha+\beta x)^{\frac{8}{7}} - \frac{16\beta^3 y^3 dx^2}{343(\alpha+\beta x)^{\frac{12}{7}}} - \beta y\,dx^2 + \frac{4\beta^2 y^2 dx^2}{49(\alpha+\beta x)^{\frac{6}{7}}} = C\,dx^2$$

II. Si $n = 2$, adhuc caſus notari meretur, quo $L = \alpha$, et poſito

$K = x^\mu$, erit $2\alpha A x^{-\frac{5\mu}{2}} = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$, vnde fit $\mu = \frac{6}{7}$ et $2\alpha A = \frac{6.1.8}{343}$; ideoque $\alpha = \frac{24}{343A}$. Quare erit

$K = x^{\frac{6}{7}}$; $L = \frac{24}{343A}$; $X = \frac{A}{x^{\frac{15}{7}}}$; ac porro

$Q = x^{\frac{6}{7}}$; $P = \frac{24}{343A} - \frac{6y}{7x^{\frac{1}{7}}}$. Conſequenter huius aequationis:

$$ddy + \frac{Ay^2dx^2}{x^{\frac{15}{7}}} = 0$$

integrale erit

$$\frac{24\,dx\,dy}{343\,A} - \frac{6y\,dx\,dy}{2\,x^{\frac{1}{7}}} + x^{\frac{6}{7}}dy^2 + \frac{2Ay^3dx^2}{3\,x^{\frac{9}{7}}} - \frac{8yy\,dx^2}{49\,x^{\frac{8}{7}}} = C\,dx^2.$$

Solutio III.

Sumto multiplicatore $P\,dx^2 + 2Q\,dx\,dy + 3R\,dy^2$, prima integralis pars exiſtit $P\,dx^2dy + Q\,dx\,dy^2 + R\,dy^3$, et reliqua expreſſio integranda

$$\begin{aligned} y^nPXdx^4 &+ 2y^nQXdx^3dy + 3y^nRXdx^2dy^2 \\ &- dx^3dy\left(\tfrac{dP}{dx}\right) - dx^2dy^2\left(\tfrac{dP}{dy}\right) \\ &\qquad - dx^2dy^2\left(\tfrac{dQ}{dx}\right) - dx\,dy^3\left(\tfrac{dQ}{dy}\right) \\ &\qquad\qquad - dx\,dy^3\left(\tfrac{dR}{dx}\right) - dy^4\left(\tfrac{dR}{dy}\right) \end{aligned}$$

vnde ſtatim, vt ante concludimus, $R = K$ functioni ipſius x, tum vero $Q = L - y\left(\frac{dK}{dx}\right)$, ergo $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dL}{dx}\right) - y\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$. Deinde deſtructio terminorum per dy^2 affectorum praebet:

$$3y^nKX - \left(\tfrac{dP}{dy}\right) - \left(\tfrac{dL}{dx}\right) + y\left(\tfrac{ddK}{dx^2}\right) = 0, \text{ ex quo fit}$$

$$P = M - y\left(\tfrac{dL}{dx}\right) + \tfrac{1}{2}yy\left(\tfrac{ddK}{dx^2}\right) + \tfrac{3}{n+1}y^{n+1}KX.$$

Cum ergo ſit

$$\left(\tfrac{dP}{dx}\right) = \left(\tfrac{dM}{dx}\right) - y\left(\tfrac{ddL}{dx^2}\right) + \tfrac{1}{2}yy\left(\tfrac{d^3K}{dx^3}\right) + \tfrac{3}{n+1}y^{n+1}\left(\tfrac{d.KX}{dx}\right)$$

ob $2y^nQXdx^3dy = 2Xdx^3\left(y^nL\,dy - y^{n+1}dy\left(\frac{dK}{dx}\right)\right)$ termini per dy affecti praebent alteram integralis partem

$$dx^3\left\{\begin{aligned} &\tfrac{2}{n+1}LXy^{n+1} - \tfrac{2}{n+2}y^{n+2}X\left(\tfrac{dK}{dx}\right) - y\left(\tfrac{dM}{dx}\right) + \tfrac{1}{2}yy\left(\tfrac{ddL}{dx^2}\right) \\ &\quad - \tfrac{1}{6}y^3\left(\tfrac{d^3K}{dx^3}\right) - \tfrac{3}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\tfrac{d.KX}{dx}\right) + N \end{aligned}\right\}$$

Iam

Iam vero, ob primum terminum $y^n PX dx^4$, eſſe oportet:

$$0 = y^n MX - y^{n+1} X\left(\frac{dL}{dx}\right) + \tfrac{1}{2} y^{n+2} X\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \frac{3}{n+1} y^{2n+1} KXX$$
$$- \frac{2}{n+1} y^{n+1}\left(\frac{d.LX}{dx}\right) + \frac{2}{n+2} y^{n+2} X\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \frac{2}{n+2} y^{n+2}\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dK}{dx}\right)$$
$$+ y\left(\frac{ddM}{dx^2}\right) - \tfrac{1}{2} yy\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) + \tfrac{1}{6} y^3\left(\frac{d^4K}{dx^4}\right) + \frac{2}{(n+1)(n+2)} y^{n+2}\left(\frac{dd\,KK}{dx^2}\right) - \frac{dN}{dx}.$$

Hic autem, ſi n determinare nolimus, eſſe debet $L = 0$, ideoque $R = 0$, vnde hic caſus ad praecedentem deduceretur. Conſideremus ergo caſus ſequentes:

I. Sit $n = 1$; eritque $N = 0$; $MX + \left(\frac{ddM}{dx^2}\right) = 0$; vnde ne X ad primam ſolutionem reuocetur, fieri debet $M = 0$; tum vero habebitur:

$$-X\left(\frac{dL}{dx}\right) - \left(\frac{d.LX}{dx}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) = 0 \text{ et}$$
$$\tfrac{1}{2} X\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \tfrac{3}{2} KXX + \tfrac{2}{3} X\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \tfrac{2}{3}\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dK}{dx}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^4K}{dx^4}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dd.KX}{dx^2}\right) = 0.$$

Ac ne X ad modum caſus praecedentis definiatur, quod erat $n = 1$, ponatur $L = 0$; vnde X ex hac aequatione definiri debet:

$$\tfrac{3}{2} KXX dx^4 + \tfrac{5}{3} X dx^2 ddK + \tfrac{5}{3} dx^2 dK dX + \tfrac{1}{2} K dx^2 ddX + \tfrac{1}{6} d^4K = 0$$

II. Sit $n = \frac{1}{2}$; eritque $2KXX - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) = 0$; $M = 0$; $N = 0$:

$$-X\left(\frac{dL}{dx}\right) - \tfrac{4}{3}\left(\frac{d.LX}{dx}\right) = 0; \left(\frac{d^4K}{dx^4}\right) = 0; \text{ et}$$
$$\tfrac{23}{10} X\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \tfrac{4}{5}\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dK}{dx}\right) + \tfrac{4}{5}\left(\frac{dd.KX}{dx^2}\right) = 0$$

ſeu $\frac{31}{10} X ddK + \frac{12}{5} dK dX + \frac{4}{5} K ddX = 0$

ſed huiusmodi caſibus non immoror.

Coroll. 2.

39. Si viciſſim ergo ponamus $y = fz^{\frac{3}{2}}$; vt ſit $y^{\frac{2}{3}} = z\sqrt[3]{f}$ et $y^{\frac{5}{3}} = fz^{\frac{5}{2}}\sqrt[3]{ff}$; erit $dy = \frac{3}{2}fz^{\frac{1}{2}}dz$ et $ddy = \frac{3}{2}fz^{\frac{1}{2}}ddz + \frac{3}{4}fz^{-\frac{1}{2}}dz^2$

et aequatio propoſita:

$$\frac{3}{2}fz^{\frac{1}{2}}ddz + \frac{3}{4}fz^{-\frac{1}{2}}dz^2 + \frac{dx^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)}{fz^{\frac{5}{2}}\sqrt[3]{ff}} = 0$$

ſit integrabilis, ſi multiplicetur per

$$36z^{\frac{1}{2}}(\beta + \gamma x)dx^3\sqrt[3]{f} - \frac{18(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2dz}{z^{\frac{1}{2}}}\sqrt[3]{f} + \frac{27}{2}f^3z^{\frac{3}{2}}dz^3$$

et integrale erit:

$$54fz(\beta + \gamma x)dx^3dz\sqrt[3]{f} - \frac{27}{2}f(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2dz^2\sqrt[3]{f} + \frac{81}{16}f^4zzdz^4$$
$$+ \frac{9(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2dx^4}{fzz\sqrt[3]{f}} - 27\gamma fzzdx^4\sqrt[3]{f} = Cdx^4.$$

Coroll. 3.

40. Ponatur $ff\sqrt[3]{ff} = \frac{4}{9}$, vt habeatur haec aequatio:

$$2z^3ddz + zzdz^2 + dx^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) = 0$$

haecque ſiet integrabilis, ſi multiplicetur per:

$$\frac{2(\beta + \gamma x)dx^3}{zz} - \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2dz}{z^3} + \frac{dz^3}{z}$$

eritque integrale:

$$4z(\beta + \gamma x)dx^3dz - (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2dz^2 + \frac{1}{2}zzdz^4$$
$$+ \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2dx^4}{2zz} - 2\gamma zzdx^4 = Cdx^4$$

quae

quae aequatio etiam hoc modo repraeſentari poteſt:

$$((\alpha+2\beta x+\gamma xx)dx^2-zzdz^2)^2+8z^3(\beta+\gamma x)dx^3dz-4\gamma z^4=Ezzdx^4.$$

Coroll. 4.

41. Si ſit $\alpha=0$; $\beta=0$; et $\gamma=a^2$, ſeu iſta aequatio integranda proponatur:

$$2z^3ddz+zzdz^2+aaxxdx^2=0,$$

ea integrabilis reddetur per hunc multiplicatorem:

$$\frac{2aaxdx^3}{zz}-\frac{aaxxdx^2dz}{z^3}+\frac{dz^3}{z}$$

et aequatio integralis erit:

$$(aaxxdx^2-zzdz^2)^2+8aaxz^3dx^3dz-4aaz^4dx^4=Ezzdx^4$$

ſeu $(aaxxdx^2+zzdz^2)^2-4aa(zdx-xdz)^2zzdx^2=Ezzdx^4$.

Coroll. 5.

42. Poſita ergo conſtante $E=0$, pro hoc caſu gemina aequatio integralis particularis habebitur:

I. $aaxxdx^2+zzdz^2-2azdx(zdx-xdz)=0$

II. $aaxxdx^2+zzdz^2+2azdx(zdx-xdz)=0$

quarum illa reſoluitur in $axdx+zdz=\pm zdx\sqrt{2a}$

haec vero in . . . $axdx-zdz=\pm zdx\sqrt{-2a}$.

Scholion.

43. Euolutio horum exemplorum ita eſt comparata, vt non parum vtilitatis in reſolutione aequationum differentialium ſecundi gradus afferre videatur; cum enim haec exempla, ſi nonnullos caſus faciliores excipiamus, ope methodorum adhuc vſitatarum expe-

 diri

diri nequeant, noua haec methodus, qua negotium per multiplicatores conficitur, non ſolum optimo cum ſucceſſu adhibetur, ſed etiam nullum eſt dubium, quin ea, ſi vberius excolatur, multo maiora commoda ſit allatura. Pari autem quoque ſucceſſu ad aequationes differentiales tertii et altiorum graduum extendi poterit, ſiquidem certum eſt, quacunque propoſita aequatione differentiali cuiuscunque gradus, inter duas variabiles, ſemper dari eiusmodi quantitatem, per quam, ſi aequatio multiplicetur, reddatur integrabilis. Quod cum etiam verum ſit in aequationibus differentialibus primi gradus, et harum reſolutio per methodum tales factores inueſtigandi non mediocriter promoueri poterit; vbi quidem totum negotium eo reducitur, vt quouis caſu oblato idoneus multiplicator inueniatur; atque in aequationibus quidem differentialibus primi gradus hic factor ſemper erit functio ipſarum x et y tantum, verum ob hoc ipſum quod diuerſitas ordinum locum non habet, eius inueſtigatio multo difficilior videtur, imprimis quando iſte factor eſt functio tranſcendens. Cum autem haec ratio integrandi naturae aequationum ſit maxime conſentanea, non ſine eximio fructu ſtudium in ea excolenda collocabitur.

ENV-

ENVMERATIO
MODORVM QVIBVS FIGVRAE
PLANAE RECTILINEAE PER DIAGONALES DIVIDVNTVR IN TRIANGVLA.

Auctore

IOH. ANDR. DE SEGNER.

Triangulum per diagonalem in alia ſolui non poſſe, vtpote quod ex ſe ipſo vno tantum modo componitur, notum eſt: quadrilaterum autem ita diuidi duplicem in modum poſſe, mox apparet. Neque difficulter perſpicitur, modos, quibus quinque laterum figura per diagonales in triangula ſoluitur, quinque eſſe, quorum quilibet diſcrepat ab altero. Sex autem, vel plurium laterum figurae, quot modis ita ſoluantur enumerare difficilius eſt; eoque difficilius, quo plura, ſunt figurae latera. Soluitur autem hexagonum in triangula 14 modis diuerſis, heptagonum 42, ogdogonum 132, enneagonum 429; quos numeros mecum beneuolus communicauit ſummus *Eulerus*; modo, quo eos reperit, atque progreſſionis ordine, celatis. Vtrumque perſpiciendi cupido, poſt tentamina quaedam inania, eos numeros eliciendi methodus occurrit adeo ſimplex, vt in ea acquieſcendum mihi putauerim, quam hic proponam.

Triangulum prima ordine eſt figurarum planarum rectilinearum, quadrilaterum ſecunda, et ita deinceps,

 ſic

ſic vt index ordinis cuiuslibet reperiatur, a numero laterum figurae vel angulorum duabus vnitatibus ſubtractis. Ex quo ſequitur, quod neminem latet, biangulum, vel lineam rectam figuram non eſſe, vtpote cui index ordinis o reſpondet.

Problema.

Dato indice ordinis figurae planae rectilineae, n, datoque numero modorum, quo quaelibet eius generis figura alia, ordinis, cuius exponens numero n minor eſt, in triangula ſoluitur: reperire numerum modorum, quibus in triangula ſolui poteſt figura illa ordinis n.

Solutio.

Si figura, cuius ordinis index eſt o, in triangula ſolui poſſit modis a, figura autem ordinis 1, modis b, figura ordinis 2, modis c; et ita porro; figura autem ordinis, cuius index eſt $n-1$, modis q, figura ordinis $n-2$, modis p, reliqua; dicaturque numerus modorum quaeſitus, quo figura ordinis proxime ſequentis n in triangula ſoluitur, x: ſcriptis indicibus ab o ad $n-1$, ordine, atque ad quemlibet adſcripto diuiſionum numero, hunc in modum.

o	1	2	.	.	$n-3$	$n-2$	$n-1$
a	b	c	.	.	o	p	q

erit numerus omnium indicum ita ſcriptorum, vel par, vel impar: prius quidem ſi $n-1$ impar fuerit, atque n par; poſterius ſi $n-1$ par fuerit, atque n impar. Si par ſit numerus indicum, fac $x = 2aq + 2bp + 2co$, et ita

ita porro, donec terminus intermedius nullus ſit reliquus. Sin autem numerus indicum ſit impar, iisdem factis, quia terminum intermedium vnum ſupereſſe neceſſe eſt, qui ſit d; huius quadratum factis adde, vt fiat $x = 2aq + 2bp + 2co +$ etc. $+ dd$.

Ad indicem o eſt $a = 1$. Si enim linea recta concipiatur vt triangulum; figuram iſtam aliter atque aliter diſſolui non poſſe manifeſtum eſt, quia plures vna rectae inter duo puncta non cadunt. Hoc ſumpto, ſi et numerorum illuſtris *Euleri* quinque priores veri eſſe ponuntur, ſunt autem veri omnes, reperietur numerus modorum, quibus in triangula ſoluitur figura ordinis ſexti, ſiue ogdogonum, faciendo ſecundum ſchema adiectum

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	5	14	42	84
						+ 28
						+ 20
						132

$x = 2 \times 42 + 2 \times 14 + 2 \times 10$. Sique hinc porro pergere velis ad enneagonum, quae figura eſt ordinis ſeptimi, erit ex ſchemate producto;

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	5	14	42	132	264
							+ 84
							+ 56
							+ 25
							429

$x = 2 \times 132 + 2 \times 42 + 2 \times 28 + 5 \times 5$.

Atque ſecundum perpetuam hanc legem, ex ſolo numero modorum ſoluendi 1, qui pertinet ad figuram ordinis 0, numeri eiusdem generis omnes, quorum cuilibet qui reſpondet, ordinis index, vel vnitas eſt, vel numerus vtcunque magnus, ſenſim eliciuntur.

Demonſtratio.

Tab. IV. Fig. 5. Sit in triangula diuidenda figura ACDEFGB. Cum ergo non alia eſſe debeant eorum triangulorum latera, quam quae eadem vel latera ſunt figurae diuidendae, vel diagonales: quodlibet figurae latus, latus fieri vnius triangulorum, debet. Sumatur ergo latus AB, ab eoque diuiſio inchoetur ſic, vt ſupra. baſin AB ſtatuatur triangulum, cuius apex vel in C cadat, vel in D, vel in quodcunque huius generis punctorum reliquorum, quorum quidem numerus, cum duabus vnitatibus minor ſit numero angulorum figurae diuidendae, indici ordinis eiusdem figurae n aequalis erit. Quodlibet horum triangulorum vt ADB a figura ACDEFGB reſecebit ſiniſtram ACD, et dextram DEFGB, quarum illa, vel haec linea recta, vel biangulum, erit, ſi apex trianguli ceciderit in puncta aſſumptis A, B vicina, C vel G: ſumma autem indicum, quorum vnus figurae dextrae, alter ſiniſtrae ordinem exponit, ſemper eadem erit, $n-1$; vnde ſi index ordinis figurae ſiniſtrae ſit 0, erit index ordinis figurae dextrae $n-1$, ſi index ordinis figurae ſiniſtrae ſit 1, erit index ordinis figurae dextrae $n-2$, et ita porro.

Si

Si iam a triangulo deſcripto ADB diuiſio figurae ita abſoluatur, vt primo figurarum reſectarum ſiniſtra ACD tot modis in triangula diuidatur, quot modis diuidi poteſt, tum et dextra: earum diuiſionum tot conſtitui poſſunt genera, quot ſuper AB triangula poſſunt conſtitui, id eſt, numero n; cumque diuiſio figurae dextrae nullo modo pendeat, a diuiſione figurae ſiniſtrae, cuiuslibet eorum generum tot ſumi poſſunt ſpecies, quot modis ſecari poteſt figura ſiniſtra, quarum cuilibet tot ſuberunt diuiſiones ſingulares, quot modis figura dextra in triangula ſecatur. Vnde ſequitur in qualibet eiusdem generis ſpecie eundem fore ſectionum ſingularium numerum, atque numerum ſectionum ſingularium cuiuslibet generis prodíturum, numero modorum, quibus in triangula diuidi poteſt figura ſiniſtra, per numerum modorum, quibus dextra poteſt diuidi, multiplicato.

Litteris ergo a, b, c, vt et d, et o, p, q eadem hic notantibus, quae notabant initio, ad primum genus, quo apex trianguli ſuper AB deſcripti, cadit in C, cum ſit index ordinis figurae ſiniſtrae $=0$, et index ordinis figurae dextrae $n-1$; erit aq numerus ſectionum eius generis ſingularium. Ad vltimum autem genus, quo apex trianguli cadit in G, cum index ordinis figurae ſiniſtrae ſit $n-1$, et index ordinis figurae dextrae $=0$, idem prodit numerus ſectionum ſingularium huius generis aq, vt duo haec genera, primum et vltimum, coniuncta, ſectiones ſingulares comprehendant numero $2aq$. Ad alterum diuiſionum genus,

genus, quo trianguli apex in D cadit, eſt index ordinis figurae ſiniſtrae $=1$, et index ordinis figurae dextrae $n-2$, hinc numerus ſectionum ſingularium huius generis $=bp$. Verum ad penultimum ſectionum genus, quo apex trianguli cadit in F, cum ſit index ordinis figurae ſiniſtrae $n-2$, et index ordinis figurae dextrae 1, idem ſectionum ſingularium numerus bp et huic generi ſuberit, atque genus ſecundum cum penultimo ſectiones numero $2bp$ comprehendet. Patetque, eodem modo ſi pergamus, donec genera, quae ita combinari poſſint, nulla relinquantur, collectis in ſummam factis $2aq$, $2bp$, $2co$ ex reliquis, vniuerſum ſectionum ſingularium numerum, quae omnibus generibus ſubſunt, obtineri. Id autem futurum eſt, ſi n numerus fuerit par. Si vero impar fuerit hic exponens ordinis n, combinatis ita duobus quibus libet generibus, quae aequaliter ab extremis diſtant, vnum relinquetur in medio punctum E, ad quod, ductis AE, BE rectis, eiusdem ordinis figura reſecabitur vtrinque. Vnde ſi d ſit numerus modorum, quibus vna harum figurarum diuiditur in triangula, idem numerus ad alteram aeque pertinebit, eritque numerus ſectionum omnium generis in medio relicti, quadratus dd; quo ad ſummam priorem $2aq+2bp+2co$ etc. addito, omnium figurae propoſitae ſectionum ſingularium numerus prodibit.

Vehementer creſcunt modorum, quibus figurae plane rectilineae in triangula diuidi poſſunt, numeri, ſic, vt viginti laterum figura ita ſecari poſſit plus quam 469,

469, 000000 modis. Appoſui tabellam, quo id declaratur, cuius prima ſeries habet numerum laterum cuiuslibet figurae, altera indicem ordinis, tertia numeros ſectionum generis primi et vltimi, coniunctos, quarta, numeros ſectionum generis ſecundi et penultimi, et ita porro, ad quos apud indices impares accedit numerus ſectionum generis intermedii. Vltima tandem ſeries numeros iſtos in ſummam collectos. atque numeros vniuerſorum modorum, ſectionum omnis generis earum figurarum, quarum indices illis imminent, complectitur.

II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII	X	XI	XII
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	10	28	84	264	858	2860	9724
.	.	.	1	4	10	28	84	264	858	2860
.	.	.	.	.	4	20	56	168	528	1716
.	.	.	.	.	. .	. .	25	140	420	1320
.	.	.	.	.	. .	. .	. .	. .	196	1176
1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

XIII	XIIII	XV	XVI	XVII
11	12	13	14	15
33592	117572	416024	1503800	5384880
9724	33592	117572	416024	1503800
5720	19448	77184	235144	832048
4290	14300	48620	167960	587860
3696	12012	39040	136136	470288
1764	11088	36036	120120	408408
. . . . .	. . . . . .	17424	113256	377520
. . . .	. . . . .	. . . .	. . . .	184041
58786	208012	751900	2692440	9748845

XVIII	XVIIII	XX
16	17	
19497690	69016140	252827580
5384880	19497690	69016140
3007600	10769760	38995380
2080120	7519000	26924400
1646008	5824336	21053200
1410864	4938024	17473008
1283568	4434144	15519504
197340	4171596	14410968
. . . .	243100	13905320
345[illegible]8070	126413790	469925500

METHO

METHODVS SIMPLEX ET VNIVERSALIS, OMNES OMNIVM AEQVATIONVM RADICES DETEGENDI.

Auctore

IOH. ANDR. de SEGNER.

Aliquot ſunt anni, vt in facilem et generalem curvarum generis parabolici deſcriptionem incidi; quam ideo quaeſiui, atque deinde ſenſim perfeci, quod per eas curuas omnes omnium aequationum radices quam ſimpliciſſime exhiberi poſſe vidi, et vix minus, quam per vllam reliquarum, accurate. Ea vero in re inſigne compendium ineſt laboris eius, quo arithmetica radices has per numeros decimales detegit, veris quantumuis propinquos. Cum enim omnes methodi ad id comparatae, quae mihi quidem innotuerunt, *Raphſoni*, *Halleyi*, *Newtoni*, a numeris incipiant, qui radices eas exhibent errore non nimio, eumque errorem repetito labore adeo imminuant, vt tandem contemni debeat: multum vtique taedii calculo decedere neceſſe eſt, ſi primus ille numerus, a quo calculus inchoatur, a vero non magis aberret, quam parte ſui decima, vel centeſima. Solent enim regulae illae errores hos tanto magis imminuere, quo ipſi errores minores ſunt. Decimae autem et interdum centeſimae partis errorem, in figura non magna mediocri ſtudio deſcripta, euitare facile eſt, in plerisque caſibus.

Prodiit ab eo tempore praeſtans liber, *Crameri Analyſis curuarum algebraicarum*; quem vt primum euolui, eadem via ad detegendas aequationum radices inſignem eum Geometram proceſſiſſe, *Cap. IV.* vidi cum magna voluptate: quo loco excuſationem quoque adfert methodi, ab ea, quae maxime trita eſt, non nihil recedentis, et egregia multa de radicum limitibus: ſed curuarum, quibus vna mecum vtitur, conſtructiones tradit eas, quibus ſimpliciores et ipſe optare videtur. Quare ſola mihi relinquitur, quam ita editis tanquam meam addere poſſim, facilis illa atque vniuerſalis curuarum iſtarum conſtructio. Nam et aequationis ſolutionem, qua nititur, in *Newtoni Analyſi per quantitatum ſeries etc.* ſub finem eius loci, quo *aequationum affectarum reſolutio* docetur, adnotatam poſtea reperi. Id cum ingens ſcribendi compendium fecerit, addam tamen, quae ad plenam dicendorum comprehenſionem neceſſaria ſunt, ne iis, qui haec lectione digna iudicauerint, onus imponam, operoſe quaerendi, quae ſcribi facile potuere.

Sumo conſtantem m pro arbitrio, quam dico *Parametrum*, et variabilem z, ac facio $\frac{z}{m}$. Deinde aliam conſtantem ſumo A, factoque A $\frac{z}{m}$ nouam conſtantem B iungo. Prodit A $\frac{z}{m}$ + B, functio ſimplex variabilis z. Hanc functionem denuo in $\frac{z}{m}$ duco, atque facto A $\frac{z^2}{m^2}$ + B $\frac{z}{m}$ nouam conſtantem C iungo. Prodit A $\frac{z^2}{m^2}$ + B $\frac{z}{m}$ + C, functio quadratica eiusdem z.

Quadra-

Quadratica hac functione denuo in $\frac{z}{m}$ ducta, atque facta $A\frac{z^3}{m^3} + B\frac{z^2}{m^2} + C\frac{z}{m}$ quantitate conſtante D adiuncta, cubica eiusdem variabilis z functio oritur iſta, $A\frac{z^3}{m^3} + B\frac{z^2}{m^2} + C\frac{z}{m} + D$.

Atque hac via pergendo, functiones cuiuscunque ordinis variabilis aſſumtae z producentur, quas generaliter exhibet formula iſta:

$$\frac{Az^n}{m^n} + \frac{Bz^{n-1}}{m^{n-1}} + \frac{Cz^{n-2}}{m^{n-2}} + \text{etc.} + \frac{Nz^{n-n}}{m^{n-n}};$$

in qua quaelibet litterarum A, B, C . . . N, et nihilum notare poteſt, et quantitatem negatiuam. Si nihilum notauerit harum litterarum aliqua, terminus, quem afficit, e functione euaneſcet, qua re ſaepe functio ad gradum inferiorem deprimitur.

Si ponatur $A\frac{z^n}{m^n} + B\frac{z^{n-1}}{m^{n-1}} + C\frac{z^{n-2}}{m^{n-2}} + D\frac{z^{n-3}}{m^{n-3}}$ $+ \text{etc.} + N\frac{z^{n-n}}{m^{n-n}} = y$; poterit aequatio haec lineam definire A B C D, cuius puncta E ad baſin rectilineam F G; per applicatas referuntur inuicem parallelas E H $= y$, quae a baſi illa abſcindunt partes I H $= z$, quarum omnium idem in eadem F G eſt initium I. Haec *curua* A B C D dicitur eſſe *generis Parabolici*. Tab V. Fig. 1.

Si m ſumatur aequalis vnitati, vel ſi generatim ponatur $\frac{z}{m} = x$, aequatio haec paullo ſimplicius ſcribitur ita: $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3}$ $+ \text{etc.} + Nx^{n-n} = y$, vnde mox apparet, huic

 linea-

linearum generi et rectam ſubeſſe. Si enim fiat $n=1$, aequatio fit $Ax+B=y$, quae vtique lineam rectam exhibet.

Omnibus autem lineis generis parabolici commune eſt, quod vna cum baſi ſua FG, a dato in hac puncto I, vtrinqe in infinitum excurrant, ductu nuſpiam interrupto, ſed tamen ſimplici. Quaecunque enim ſumatur x, aliqua ſemper, per quamlibet aequationum, quae ſubſunt generali $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+$ etc. $=y$, reperitur y, ſed vna plures nunquam. Quaelibet ergo recta alicui applicatarum EH in plano figurae parallela, curuam ſecat; ſed ſemel tantum, et in vnico puncto.

Quae autem prodit y, cum et affirmatiua eſſe poſſit et negatiua, pro magnitudine atque conditione conſtantium A, B, C, atque ipſius variabilis x: linea generis parabolici vel ad hanc, vel ad illam baſeos ſuae FG partem cadere poterit, vel partim ad hanc, partim ad oppoſitam. Poſterius ſi contingat, baſis a linea neceſſario ſecatur.

Verum, quibus punctis linea baſin ſecat, vel vtcunque cum hac concurrit, ad ea eſt $y=0$; et, ſi ad aliquod baſeos punctum ſit $y=0$, baſis apud illud punctum vel ſecatur a linea, vel contingitur. Cum ergo conſtet, plures in functione quacunque valores quantitatis variabilis, quibus functio conuertitur in nihilum; vel quod eodem redit, plures aequationis $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+$ etc. $+Nx^{n-n}=0$ radices, eſſe non poſſe, quam vnitates ſunt in exponente altiſſimae poteſtatis eius variabilis n: totidem locis, quot vnitates hic exponens n conti-

continet, baſis a linea ſecari poterit, pluribus nunquam ſecabitur, vel contingetur; quamuis ſecari, vel contingi poſſit locis paucioribus.

Hinc ſequitur, harum linearum ſimpliciſſimam, quae exprimitur aequatione $A\frac{z}{m}+B=y$, baſin ſecare non niſi ſemel poſſe, eiusque adeo flexum nullum eſſe, qui ſi foret, poſſet vtique baſin bis minimum ſecare. Ergo hoc quoque indicio linea recta proditur.

Curua autem hac aequatione expreſſa $A\frac{z^2}{m^2}+B\frac{z}{m}+C=y$, cum bis tantum baſim ſecare poſſit, vnum habet flexum, plures vno non habet. Si enim bis terue flexa eſſet, poſſet et baſin ter ſecare, vel quater. Eſt haec curua Apollonii Parabola, quod ex aequatione facile perſpicitur.

Curua $A\frac{z^3}{m^3}+B\frac{z^2}{m^2}+C\frac{z}{m}+D=y$ duos admittit flexus, quia baſin ter ſecare poteſt, non plures. Ea, quam exprimit aequatio $A\frac{z^4}{m^4}+B\frac{z^3}{m^3}+C\frac{z^2}{m^2}+D\frac{z}{m}+E=y$, quatuor locis cum baſin ſecare poſſit, poteſt ter flexa eſſe. Et generatim numerus flexuum, quos admittit curua quaeuis generis parabolici, ſemper vnitate minor eſt exponente ſummae dignitatis, ad quam abſciſſa in eius aequatione adſcendit, id eſt, ſi exponens hic ſit n, eſt numerus flexuum $n-1$.

Reperitur autem aequatio, per quam puncta flexuum horum exhibentur, facile. Sit curua ABCDE apud puncta B, C, D eo modo flexa, quem hic conſideramus. Punctum ſcilicet, quod lineam ABCDE Fig. 2.

mo-

motu ſuo deſcribit, apud B, C, D directionem mutet ita, vt cum ante receſſerit a baſi FG, iam ad eam accedere incipiat, vel ab ea recedere, cum ante acceſſerit. Manifeſtum eſt, dum ita motus mutatur, punctum illud ſecundum directionem baſi parallelam incedere debere, atque rectas, quae curuam apud puncta B, C, D contingunt, baſi parallelas fieri. Vnde ſequitur, ad haec puncta dy prae dz euaneſcere. Quare ſi differentialis ſumatur aequationis, quae curvam exponit, deleaturque dy, reliqua autem diuidantur per dx, aequatio quaeſita in promptu eſt.

Sumatur loco aequationis quae curuam ABCDE exprimit, vniuerſalis haec: $A\frac{z^n}{m^n}+B\frac{z^{n-1}}{m^{n-1}}+C\frac{z^{n-2}}{m^{n-2}}$ $+\text{etc.}+M\frac{z}{m}+N=y$, erit aequatio quaeſita:

$$\frac{n}{m^n}Az^{n-1}+\frac{n-1}{m^{n-1}}Bz^{n-2}+\frac{n-2}{m^{n-2}}Cz^{n-3}+\text{etc.}+\frac{1}{m}M=o$$

per cuius radices puncta dantur H, I, K, a quibus ſi applicatae ordinentur HB, IC, KD, curua in punctis flexuum B, C, D ſecatur.

Fig. 3. Sit iam ABCDE curua, per harum aequationum priorem expreſſa, ad baſin IG, et principium abſciſſarum I ita ſumtum, vt ſi in ea aequatione y ponatur eſſe o, radices aequationis

$$A\frac{z^n}{m^n}+B\frac{z^{n-1}}{m^{n-1}}+C\frac{z^{n-2}}{m^{n-2}}+\text{etc.}+M\frac{z}{m}+N=o$$

omnes affirmatiuae fiant, quod efficere ſemper licet. Dica-

Dicatur aequatio haec Φ, ea vero, per quam puncta flexus B, C, D exhibentur, poſterior ſcilicet ante hanc poſitarum, ſit Ψ. Erunt radices aequationis Φ hae quatuor I F, I H, I K, I G; aequationis autem Ψ radices erunt tres iſtae I L, I M, I N. Manifeſtum autem eſt, puncta, quibus radices iſtae finiuntur F, H, K, G, atque L, M, N, alterne in baſi I G poſita eſſe. Quare radicibus vnius harum aequationum datis, dantur limites, inter quos continetur quaelibet radicum aequationis alterius. Sic radix I F aequationis Φ continetur inter terminos o et I L, eiusdem aequationis radix I H, maior eſt quam I L, minor autem quam I M, radix autem eius maxima I G intra terminos I N et ∞ continetur. Contra aequationis Ψ radix minima I L intra terminos I F et I H cadit, media I M intra I H et I K, maxima I N intra I K et I G. Sed haec obiter.

Porro, quaeuis linea generis parabolici, dum ita ſecundum baſin in infinitum excurrit, ſimul ab hac in infinitum recedit. Nam in aequatione $A z^n + B z^{n-1} + C z^{n-2} + \text{etc.} = y$, vbi z in ingentem magnitudinem creuit, ſiue poſitiua ſit, ſiue negatiua, inferiores eius dignitates z^{n-1}, z^{n-2} etc. prae ſumma z^n euaneſcunt, mutaturque aequatio in iſtam: $A z^n = y$, quae partes lineae extremas tanto accuratius exhibet, quo maior eſt z. Atqui in hac aequatione creſcente z neceſſario et y creſcit, fitque tandem omni dabili maior.

Ramus autem curuae generis parabolici in infinitum excurrens vterque ad eandem baſeos partem

cadit, ſi exponens n par ſit: ſin exponens hic fuerit impar, alter lineae ramus ad vnam baſeos partem in infinitum excurrit, alter ad alteram. Si enim in aequatione pro ramis iſtis $Az^n = y$, numerus n par ſit, eſt z^n ſemper quantitas affirmatiua, ſiue z affirmatiua ſit, ſiue negatiua. Ergo et Az^n vel affirmatiua erit, vel negatiua, prout A affirmatiua, vel negatiua eſt, ad quamcunque partem a principio ſuo abſciſſae protendantur. Hinc et applicatae y ad hos ramos omnes ad eandem baſeos partem cadent. Contra ſi n impar fuerit, z^n affirmatiua erit ad z affirmatiuas, et negatiua ad z negatiuas. Ergo et Az^n, et huic aequalis y, ad ramos in infinitum excurrentes ab vna parte principii affirmatiua erit, ab altera negatiua.

Poteſt ergo linea generis parabolici in cuius aequatione n numerus par eſt, baſin ſuam plane non ſecare, quo caſu omnes radices aequationis, quae ex illa deriuatur, poſito $y = 0$, impoſſibiles ſunt. Impar autem ſi fuerit exponens iſte n, baſin ſemel minimum a linea ſecari neceſſe eſt, atque vnam minimum aequationis, quae per ſuppoſitionem $y = 0$ oritur, radicem eſſe realem.

Hae ſunt proprietates harum linearum palmariae. Quod ad deſcriptionem attinet, motum excogitare, quo ſatis accurate deſignari poſſint omnes, admodum difficile iudico, quare id neque tentaui. Verum puncta linearum huius generis reperiuntur facilius, quam quis ſperauerit, quorum ſi ſat magnus ſit numerus, quae per ea deſcribitur curua, a vero aberrare vix

poteſt.

poteſt. Eſtque puncta illa reperiendi methodus vbique fere eadem, quicunque ſit ordo, quem exponens *n* indicat. Eſt enim in eo ſolo aliqua diuerſitas, quod ſaepius faciendum eſt, ſi *n* plures vnitates contineat, quod ſit minus ſaepe, ſi is numerus *n* minor eſt.

Declarabo rem exemplo lineae ex genere para bolico cubicae, quae aequatione $A\frac{z^3}{m^3}+B\frac{z^2}{m^2}+C\frac{z}{m}+D=y$. definitur. Abſciſſas affirmatiuas ab earum principio ſumam verſus dextram, negatiuas verſus ſiniſtram; angulum applicatarum rectum faciam, neque enim, vt is obliquus fiat, cum radices quaeruntur, opus eſt; ipſas autem applicatas affirmatiuas ſupra baſin locabo, negatiuas infra.

Sit baſis MN, in eaque principium abſciſſarum O. Tab. V. Fig. 4. Per hoc punctum rectam PO baſi perpendicularem facio, cum generatim augulus PON angulo applicatarum aequalis reddi debeat. Iam ſi linea aequationis, quam deſignat D, poſitiua ſit, eam a puncto O in rectam OP pono ſupra baſin in OD; ſi ſit negatiua, eam ab eodem puncto in OP infra baſin transfero. Ex puncto D in eandem lineam OP pono lineam aequationis C, pariter verſus ſuperiora in DC, ſi affirmatiua ſit, ſed verſus inferiora, ſi ſit negatiua Similem in modum a puncto C lineam aequationis B in CB pono, verſus ſuperiora, ſi affirmatiua ſit, ſed verſus inferiora, ſi ea B ſit negatiua. Tandem a puncto B in BA lineam aequationis A pono ſimili lege: verſus ſuperiora ſcilicet, ſi affirmatiua ſit, et verſus inferiora, ſi ſit negatiua. Punctis ita in OP repertis,

 litteras,

litteras, quemadmodum in Figura apparent, ordine adſcribo.

Deinde OQ Parametro m aequalem facio, atque per Q rectam duco QR, initio ductae OP parallelam: atque, his ita praeparatis, accedo ad inueſtigandam y ad datam vel aſſumtam z.

Sit z ea $=$ OS. Duco ST pariter ad OP parallelam, perque A ago baſi parallelam Aa. Connecto Ba et noto punctum b, in quo recta haec Ba productam ST ſecat. Per punctum b iterum parallelam baſi ago pc, et connecto Cc, punctum vero d, in quo recta haec Cc eandem ST ſecat, noto. Per hoc enim punctum d, ſi iterum recta traducatur qe baſi parallela, connectaturque De, erit f punctum, in quo haec De productam ST ſecat in curua conſtruenda, atque Sf erit y ad aſſumtam z.

Ducatur enim et per f recta rf baſi parallela. Erit primo $Aa : pb = AB : pB$, id eſt, per ea, quae aſſumta ſunt, $m : z = A : pB$, ergo $pB = A\frac{z}{m}$, et $pC = pB + BC = A\frac{z}{m} + B$. Porro $cp : dq = pC : qC$, id eſt, $m : z = A\frac{z}{m} + B : qC$, ergo $qC = A\frac{z^2}{m^2} + B\frac{z}{m}$, et hinc $qD = qC + CD = A\frac{z^2}{m^2} + B\frac{z}{m} + C$. Praeterea vero $eq : fr = qD : rD$, ſiue, $m : z = A\frac{z^2}{m^2} + B\frac{z}{m} + C : rD$, ergo $rD = A\frac{z^3}{m^3} + B\frac{z^2}{m^2} + C\frac{z}{m}$, et hinc $fS = rO = rD + DO = A\frac{z^3}{m^3} + B\frac{z^2}{m^2} + C\frac{z}{m} + D$.

Eſt ergo haec fS aequalis y quaeſitae.

Eadem conſtruendi ratio et ad eas abſciſſas obſeruabitur, quae vel negatiuae ſunt, vel parametro OQ

OQ maiores, ad quas punctum S extra ſpatium OQ cadit, ad hanc illam ve partem. Sed producendae iam erunt Ba, Cc et reliquae huius generis lineae ad eandem partem, ad quam cadit S, et per id punctum ducta ST. Rectarum autem iſtarum Ba, Cc, De, tanto plures erunt, quo plura ſunt puncta A, B, C, D etc. quae aequatio ſuppeditat.

Verum quaecunque curuarum, quae aequatione

$$A\frac{z^n}{m^n}+B\frac{z^{n-1}}{m^{n-1}}+C\frac{z^{n-2}}{m^{n-2}}+D\frac{z^{n-3}}{m^{n-3}}+\text{etc.}+N\frac{z^{n-n}}{m^{n-n}}=y$$

continentur, conſtruenda ſit, erit numerus punctorum A, B, C ſemper aequalis numero terminorum, qui in priori eius aequationis membro ineſſe poſſunt; ſiue exponenti ſummae dignitatis z vnitate aucto, $n+1$. Poſſunt autem duo, vel plura, horum punctorum in vnum coaleſcere, quod contingit, ſi aliqua quantitatum A, B, C, D, etc. vel duarum plurium ve cum ſignis ſuis coniunctarum ſumma fiat nihilum. Verum hoc caſu, punctorum, quae ita coaluerunt, non minus ratio habenda eſt, quam ſi diſcreta forent Qua in re tanto minus erit errandi periculum, ſi puncto, quod pro duobus aut pluribus eſt, omnes eae litterae A, B, C, adſcribantur, quae punctis adſcribenda fuerant, quae ita coaluerunt.

Sit reperiundum punctum curuae

$A\frac{z^5}{m^5}$ * * $+D\frac{z^2}{m^2}$ * $+F=y$, ad abſciſſam $z=$OS. Fig. 5.
Reliquis ergo, vt dictum eſt, factis, fiat OF aequalis lineae F aequationis. Deinde, quia terminus, qui vltimum F proxime praecedere debebat in aequatione,

$E\frac{z^2}{m}$ deficit, eſtque adeo E = o, apud punctum F figurae etiam littera E ſcribatur, atque punctum EF habeatur pro duplici. Hinc ab E in ED transferatur linea aequationis D, puncto autem D et litterae C, B adſcribantur, quia termini $B\frac{z^4}{m^4}$, $C\frac{z^3}{m^3}$, qui terminum $D\frac{z^2}{m^2}$ praecedere debebant in aequatione, hic ambo deficiunt, habeaturque punctum DCB pro triplici. Tandem ex B in BA ponatur linea aequationis A.

Si iam ad abſciſſam $z = OS$ reperienda ſit *y*, ducatur A*a* baſi MN parallela, deinde B*a*, iterum *bc* baſi parallela, tum C*c*, porro *de* parallela baſi, deinde D*e*, et *fg*, hinc E*g*, tum *bi*, tandemque F*i*, quae productam ST ſecabit in puncto curuae quaeſito *k*, ad quod ſcilicet eſt applicata $Sb = y$. Non ſubiungo demonſtrationem, quae facile peti poteſt ex iis, quae generatim ſunt oſtenſa.

In conſtructione hac multitudinem linearum iure quis culpauerit, quibus ſi plura quaerenda ſint curuae puncta, totam breui chartam oppleri neceſſe eſt, ingenti cum confuſione. Sed facile eſt rei remedium, de quo cogitandum vtique fuit, ſi non in ſola contemplatione ſubſiſtere, verum propoſitum plane perficere vellem. Et primo quidem recta B*a* eadem eſt pro qualibet applicata, quam vbi ſecat, in eum locum cadit punctum *b* Poteſt ergo recta haec B*a* vtrinque in infinitum produci, quo facto, ſimul atque ducta fuerit ST, punctum *b* praeſto erit. Reliquarum autem rectarum *bc*, B*c*, *de*, C*c*, etc. deſcriptio plane euitabitur hunc in modum:

Fig 4. et 5.

Cape

Cape tabulam rectangulam, qualem ad manus eſſe figuras cum cura deſcripturo alioquin opus eſt, et regulam aſſerculo inſtructam tranſuerſo, eum in finem, vt ſi aſſerculus hic margine tabulae applicetur, omnes lineae, ſecundum aciem regulae ductae parallelae fiant: qua quidem regula cum architectonibus paſſim vti ſolemus. Praeterea aciculam para, manubrio inſertam. Ita inſtructus, ductis ope regulae illius marginibus tabulae applicatae, rectis MN, PO, QR, atque in OP punctis A, B, C, D etc. legitime diſpoſitis, regula baſi MN parallela ad punctum A applicata, colloca acus apicem in *a*, et duc B*a* vtrinque infinitam. Deinde ad aſſumtum OS duc ST et produc. Habebis *b*. Regula baſi parallela ad *b* applicata, acum ſiſte in *c*, applica regulam ad acum *c* et ad punctum C. Deinde acum iuxta regulam transfer in *d*. Applica regulam baſi parallelam acui huic, deinde hanc iuxta regulam transfer in *e*. Iterum regulam et acui huic applica et puncto D, atque ita perge vsque ad punctum vltimum. Erit *d* figurae 4. vel *k* figurae 5. punctum curuae quaeſitum. Admodum expeditus hic labor eſt, et errori parum obnoxius.

Caeterum omnis curua generis parabolici tranſibit per punctum *a*, perque punctorum in rectam OP translatorum illud, quod terminum aequationis conſtantem finit, qui in figura 4. eſt D, in figura autem 5, F Vtrumque facile patet, ſi in aequatione fiat primo quidem $z = m$, deinde vero $z = 0$. Eſt enim ad applicatam in QR ſumtam $z = m$, quo poſito applicata haec

haec prodit $= A + B + C + D$ etc. $= OA = Qa$. Ad applicatam autem in OP ſumtam cum ſit $z = 0$ deſtructis reliquis, quod in aequatione per z non afficitur, ſolum relinqui neceſſe eſt.

Haec eſt curuarum iſtarum conſtructio, quam qui tenet, radices aequationum facile reperiet. Sit data aequatio haec: $16x^4 - 28x^3 - 8x^2 + 27x - 9 = 0$, cuius quaeruntur radices. Facio ex menſura quacunque conuenienti $A = 16$; $B = -28$; $C = -8$; $D = -27$; $E = -9$; a quo labore ſuperſedere potuiſſem, ſi loco numerorum ipſae rectae A, B, C, etc. per aequationem datae fuiſſent. Sumta deinde pro baſi infinita F G, et puncto O pro abſciſſarum atque radicum principio, per O duco rectam baſi perpendicularem, in eamque colloco ordine retrogrado, $OE = E = -9$; $ED = D = 27$; $DC = C = -8$; $CB = B = -28$; $BA = A = 16$.

Fig. 6.

Deinde Parametrum ſumo OQ pro arbitrio, niſi quod aliquod compendium in eo ſit, ſi vel vnius, vel decem, aut centum partium eius menſurae ſumatur, e qua lineae A, B, C et reliquae deſumtae ſunt. Generatim autem paruam potius, quam magnam, ſumere conuenit, ne ſcilicet aliquae radicum extra planum tabulae cadant. Per Q punctum rectam duco QT ad OA parallelam, in eamque transfero $Qa = OA$, ducta per A baſi parallela. Erit a punctum curuae, quae eadem tranſibit per E, vti dictum eſt. Reliqua curuae puncta vt reperiam, per B et a rectam pono infinitam, atque, ducta quacunque recta ad baſin per-

perpendiculari, eius partem inter curuam et baſin interceptam reperio, quemadmodum oſtenſum eſt. Deſcripta curua apparent, aequationis $A\frac{z^4}{m^4} + B\frac{z^3}{m^3} + C\frac{z^2}{m^2} + D\frac{z}{m} + E = o$ radices, $z - OX = o$; $z - OY = o$; $z - OZ = o$; et $z + OV = o$, quia ſcilicet curua baſin ſuam apud puncta X, Y, Z et V ſecat, quorum tria priora ad dextram rectae OA partem cadunt, vltimum ad ſiniſtram. Erit ergo $z = OX$; $z = OY$; $z = OZ$, et $z = -OV$.

Iam vero, ſi in aequatione propoſita $16x^5 - 12x^4 + 36x^3 + 19x^2 - 18x - 9 = o$, ponatur eſſe $x = \frac{z}{m}$, aequationem illam conuerti in eam, quae per curuam conſtructam exhibetur, et vltro patet, et initio obſeruatum eſt. Erit ergo quoque $x = \frac{OX}{m}$ prima radix huius aequationis; $x = \frac{OY}{m}$ erit eius radix altera; $x = \frac{OZ}{m}$ tertia, omnes affirmatiuae, tandem $x = \frac{OV}{m}$ radix aequationis quarta erit, ſed haec negatiua. Quae quidem radices, ſi per numeros exhibendae ſint, vel diuidendi erunt numeri, quibus radices iſtae exhibentur, per ſcalam ab initio vſurpatam, per numerum earundem partium, quem continet Parameter OQ, vel rectae OX, OY, OZ, OV, non ex ea ſcala, per quam exhibitae ſunt OD, OC, ſed ex ipſo parametro *m*, ſiue OQ pro vnitate ſumpto, menſurandae.

Eſt in hac methodo radices reperiundi ea inſignis commoditas, quod non opus ſit curuam deſcribere integram. Poſitis legitime punctis A, B, C, D, ac reliquis,

reliquis, quemadmodum dictum eſt, praeparatis, ſi rectae, per quas puncta curuae determinantur, obiter ducantur in aere, vt earum veſtigium nullum relinquatur, facile apparet, an curua in loco quouis dato vehementer diſtet a baſi F G, vel ei propinqua ſit. Illis ergo eius partibus, quae a baſi remotae ſunt, neglectis, hae tantum, quibus eam baſin ſecturam eſſe ſperari poteſt, cum cura elaborandae erunt. Sic autem repertae radices deinde calculo magis elimabuntur, quantum opus eſt.

DE

DE PROBLEMATIS QVIBVSDAM ISOPERIMETRICIS.

Auctore

PAVLLO FRISIO.

Theoria omnis curuarum eodem ambitu comprehenſarum, et proprietates quaslibet maximi, aut minimi prae ſe ferentium, a Geometris celeberrimis *Bernoullio*, *Taylero*, *Hermanno*, et potiſſimum *Mac-Laurino* et *Eulero* in tanta luce nunc temporis videtur poſita, vt eorum lucubrationibus vix quidquam amplius adiungi poſſit. Nihilominus tamen, cum in problematis huius generis reſoluendis quaedam mihi compendia ſeſe obtulerint, non ſine aliqua calculi et temporis oeconomia, animum ſubiit, ea breuiſſime exſcribere, quaecunque ſint, et Academiae communicare.

Principio ſi curuae AH, ſemiordinata CT ponatur $=y$, abſciſſa PC$=x$, CD$=dx$, CB$=-dx$, et ſubſtituatur in aequatione $x+dx$, ac deinde $x-dx$, loco x, prodibit DF$=y+dy+\frac{1}{2}d^2y+\frac{1}{6}d^3y$ etc. et BG$=y-dy+\frac{1}{2}d^2y-\frac{1}{6}d^3y$ etc. quaecunque demum ſit ipſa aequatio, et quocumque ex loco ſupputentur abſciſſae x. Hoc dato alia non pauca conſequentur theoremata. Ex. gr. cum dy fluxionem primam ſemiordinatae exprimat, quae ſcilicet ducta tangente definitur, puncta E, et F infra, aut ſupra tangentem cadent, Tab. VI. Fig. 1.

 et

et curua propoſita ATH erit verſus axem AE concaua, aut conuexa, prout altera ſemiordinatae fluxio d^2y aut negatiuum, aut poſitiuum valorem aliquem prae ſe feret. Inde etiam fluunt vulgares radii, et coradii oſculatoris formulae, et ad aſſequendas alias curuarum cuiuſcunque ordinis proprietates ampliſſimus patebit aditus.

At vero binos caſus, qui maxime ad rem noſtram faciunt, euoluere, et ſingillatim conſiderare opus eſt. Prima ſemiordinatae fluxio dy euaneſcere aliquando, et aliquando infinita eſſe poterit, exprimi ſcilicet fractione, cuius numerator ad denominatorem nullam finitam rationem habeat. In primo caſu ſi fluxionum aliarum ſimili modo euaneſcentium numerus par fuerit, ſemiordinatae maximum, aut minimum habebitur: Maximum vtique, ſi fluxio, poſt euaneſcentes omnes ſuperſtes, ſit negatiua: Minimum, ſi poſitiua. In caſu altero euaneſcet ſubtangens curuae, congruet ſemiordinatae tangens, et fiet axi perpendicularis. Erit etiam ſemiordinata immediate ſubſequens $=y+\frac{1}{0}+\frac{1}{2}d^2y$ etc. et quae antecedet immediate $=y-\frac{1}{0}+\frac{1}{2}d^2y$ etc. ſi ambae ſcilicet ad eundem ramum curuae ATH pertineant, nec maiores ſimul, nec ſimul minores erunt ſemiordinata intermedia y. In eodem igitur curuae ramo, facta dy infinita, maximum aliquod, aut minimum ſemiordinatae nunquam haberi poterit.

Poterit tamen ſemiordinata diuerſis ramis eiuſdem curuae aliquando interiacere. Ramos diuerſos voco

eos,

eos omnes, in quibus coordinatarum relatio eodem ſpecierum ordine, eademque aequatione exprimitur, ſignis tamen negantibus, aut affirmantibus diſſimili. Ex centro circuli ex. gr. perpendiculari ad diametrum erecta, quae prodit maxima ſemiordinata, in eodem circuli ramo vtrinque producto eſt: vtrinque enim ſemiordinatae valor quantitate vnica exprimitur $V(2ax-x^2)$, aut $V(a^2-x^2)$, quemcunque demum valorem obtineant abſciſſae x. At vero in Parabola cubica GAM, cum facta $CE=a$, et abſciſſis a puncto C ſupputatis prodeat $(y-a)^3=a^3-2a^2x+ax^2$, ſiue $y=a+a^{1:3}(\pm a\pm x)^{2:3}$, ſuperioribus ſignis ad ramum GA, et inferioribus ad AM pertinentibus, ramos ipſos inter ſe inuicem diſtinguere neceſſe erit. In priori ramo ſemiordinata quaelibet proxime antecedens erit $=a+a^{1:3}(a-x-dx)^{2:3}$ $=a+a^{1:3}(a-x)^{2:3}+\frac{2}{3}a^{1:3}(a-x)^{-1:3}dx$ etc. $=y+dy-\frac{1}{2}d^2y$ etc. In ramo altero ſemiordinata proxime ſubſequens erit $=y+dy-\frac{1}{2}d^2y$ etc. Itaque in rami vtriusque confinio A ſemiordinata EA omnium minima euadet. In aliis curuis vtrinque axi accedentibus, in quibus ſcilicet negatiua eſſet dy, iisdem factis ſuppoſitionibus ſemiordinata maxima haberetur. At quamdiu ad eundem ramum pertineant ſemiordinatae, nunquam fient maximae, aut minimae, vbi euaneſcat denominator illius fractionis, quae primam ſemiordinatae fluxionem exprimit: Id quod generale nobis principium ſuppeditabit, et ad enodanda quaeuis iſoperimetrorum problemata maxime idoneum: Quantitates ſcilicet creſcentes quomodocunque, aut decreſcentes euadere maximas, aut minimas, non poſſe, niſi prima earum-

Tab. VI. Fig. 2.

dem fluxio euaneſcat. Poſſunt enim quantitates omnes ſemiordinata curuae alicuius exprimi.

Tab. VI. Fig. 3. Hoc poſito quaeratur curua AHE, quae proprietatem aliquam maximo, aut minimo gradu exhibeat. Sint bina elementa abſciſſae BC, CD, ſemiordinatae MG, NT, perimetri GT, TF, productaque CT in P, ex terminis G et F ducantur duo alia alterius curuae elementa GP, FP, prioribus vtcumque proxima. Primo, cum extremorum punctorum locus H, E non detur, proprietas eadem maximi, aut minimi quaeſitae curuae conuenire debet, quamcunque exiguam portionem GTF puncta intercipiant. Deinde ex iis, quae modo diximus, conſequitur, proprietatem ipſam non poſſe elementis ſingulis BGTC, CTFD conuenire, niſi etiam elementis aliis BGPC, CPFD ita conueniat, vt differentia omnis euadat nulla. Denique ſi radiis FT, GP deſcribantur circulares arcus TO, Po, ob ſimilitudinem triangulorum TNF, POT, et GMT, ToP erit $PO = \frac{NT.TP}{TF}$, et $To = \frac{MG.TP}{GT}$. Datis hiſce omnibus, ſi intelligamus elementa BGTC, CTFD retinere proprietatem ſuam, dum abeunt in elementa proxima BGPC, CPFD, aequationem huius formae habebimus, $X - X + dX.TP = 0$, et quaeſitam eruemus curuae aequationem $dX = 0$, ſiue, quod eodem recidit, $X = C$.

Antequam vlterius progrediamur, demus exemplum aliquod, atque illud quidem tritiſſimum, quo curua HTE eius naturae et indolis requiritur, vt ex H ad E vsque corpus minimo tempore deſcendat. In hoc caſu, cum quantitas $\frac{GT}{\sqrt{AB}} + \frac{TF}{\sqrt{AC}}$ vbique minima eſſe debeat,

debeat, fiet iuxta dicta $\frac{GT}{\sqrt{AB}} + \frac{TP}{\sqrt{AC}} = \frac{GP}{\sqrt{AB}} + \frac{PF}{\sqrt{AC}}$ $= \frac{GT - To}{\sqrt{AB}} + \frac{TF + PO}{\sqrt{AC}}$, et deletis aequalibus, ſupererit $\frac{PO}{\sqrt{AC}} - \frac{To}{\sqrt{AB}} = \frac{NT.TP}{TF.\sqrt{AC}} - \frac{MG.TP}{GT.\sqrt{AB}} = \frac{d.MG.TP}{GT.\sqrt{AB}} = o$. Id indicabit fluentem ipſam $\frac{MG}{GT.\sqrt{AB}}$ conſtanti quantitati aequalem eſſe, et in vulgari cycloide FRG, habebit Tab. VI. locum, in qua eſſe nouimus $Nn : NQ = CM : MR$ Fig. 4. $= PM : PR = \sqrt{PC} : PR$, ſi in plano inclinato corpus a B ad G vsque tranſire debeat, perinde erit: Fig. 3. Quippe adhuc conſtans manebit vis, qua in plano inclinato corpus ad deſcenſum vrgebitur, atque ad abſolutam vim grauitatis erit in conſtanti ratione altitudinis plani ad eius longitudinem.

Licet autem Cl. *Eulerus* reliqua maximorum, minimorumque et iſoperimetrorum problemata, aucto numero conditionum propoſitarum, difficiliora euadere exiſtimauerit, vt quoniam bina elementa curuae ſingulis proprietatibus ſingillatim exhibendis ſufficiunt, binis ſimul componendis, non niſi terna, et plura pluribus eſſent ſatis; ſaepiſſime animaduerti, ex curuis omnibus, quae proprietates A, B, C, D etc. aeque habeant, eadem methodo, ac pari facilitate eas curuas decerpi poſſe, quae proprietates alias F, G, H etc. maximo gradu, aut minimo prae ſe ferant, quaecunque ſit proprietatum propoſitarum complexio, et numerus. Si enim ſingulae proprietates exhibendae eſſent ſingillatim, haberi poſſent eadem methodo aequationes totidem huius generis $\overline{X - X + dX}.TP = o$, $\overline{Y - Y + dY}.TP = o$, $\overline{Z - Z + dZ}.TP = o$

$TP = 0$, etc. Quoniam igitur proprietates omnes in vna ſimul curua eſſe debent, compoſitis aequationibus, prodibit $dX + dY + dZ$ etc. $= 0$, aut, niſi aequationum termini iam homogenei inter ſe ſint, $dX + a\,dY + b^2 dZ$ etc. $= 0$, vel denique $X + aY + b^2 Z$ etc. $= C$.

Problematum exempla mutuemur ab ipſo *Eulero*, et inquiramus curuam, quae inter omnes iſoperimetricas maximam ſuperficiem complectatur. Si ſola prior conditio ſeruanda eſſet, haberetur $GT + TF = GP + PF = GT - To + TF + PO$, et erueretur inde $\frac{NT.TP}{TF} - \frac{MG.TP}{GT} = \frac{d.MG}{GT}\, TP = 0$. Altera etiam proprietas, ſi ſola eſſet, exhiberet $AB.\,MG + AC.\,NT = AB.\,\overline{MG - TP} + AC.\,\overline{NT + TP}$, ſiue $d.\,AB.\,TP = 0$. Itaque proprietatibus compoſitis, et facta $AB = x$, $BC = dx$, $BG = y$, $MG = -dy$, $HG = s$, $GT = ds$, emerget $\frac{a\,dy}{ds} = x \pm b$, quae eſt ſemper aequatio ad circulum. Quod ſi vero quaeratur curua, quae inter omnes iſoperimetricas circa axem AH conuerſa generet maximum ſolidum, noua haec proprietas dabit eodem modo, $d\,AB^2.\,TP = 0$, et aequationem ſuppeditabit $a^2 dy = x^2 ds \pm b^2 ds$, quae exprimet naturam curuae elaſticae. Si curua ea eſſe debeat, quae circa axem AH conuerſa maximum ſolidum et minimam ſuperficiem ſimul gignat, prodibit primo $AB.\,GT + AC.\,TF = AB.\,\overline{GT - To} + AC.\,\overline{FF + PO}$, ac deinde $\frac{d.\,AB.\,MG}{GT}.\,TP = 0$, et nouae curuae aequatio fiet $a\,x\,dy = x^2 ds \pm b^2 ds$, quae in aequationem ad circulum degenerabit, ſi ſit $b = 0$, ad catenariam vero, ſi a ſit infinita, et $b^2 = ac$. Si denique ex cuiuis omnibus iſo-

peri-

perimetricis ea requiratur, quae centrum grauitatis habeat ab axe AH maxime remotum, ſiue in qua ſit maxima quantitas omnis AB. ET, ſeruatis conditionibus ſingulis, prodibit $ady + xdy = bds$, quae erit rurſus aequatio ad Catenariam.

Tranſeamus ad ſuperiorem problematum horum claſſem, atque inquiramus curuam, quae ex omnibus iſoperimetricis maximam aream complectatur, et ſua circa axem AH reuolutione generet maximum ſolidum. Illico habebimus $x^2ds + bxds - a^2dy = c^2ds$. Quod ſi ex curuis omnibus eiusdem longitudinis, eiusdemque areae, ea excerpenda ſit, in cuius perimetro graue corpus celerrime deſcendat, eruetur $xds - ady - \frac{bdy}{\sqrt{x}} = cds$. Pariter ſi ex curuis omnibus eiusdem areae ea requiratur, quae circa axem AH conuerſa generet idem ſolidum, ac tale inſuper, vt motum ſecundum axis directionem patiatur, minimam reſiſtentiam, ad tuendam hanc vltimam conditionem eſſe oportebit $\frac{AB.BC^2}{ET^2} + \frac{AC.CD^3}{TF^2} - \frac{AB.BC^2}{\overline{GT-To}^2} + \frac{AC.CD^2}{\overline{TF+PO}^2}$, adeoque etiam $\frac{d.xdydx^2}{do^4}.TP$, et conditionibus ſingulis retentis, $ax + x^2 - \frac{bxdydx^2}{ds^4} = c^2$. Si ſumma omnium AB. ET maior eſſe debeat, quam in aliis curuis omnibus eiusdem longitudinis, eiusdemque areae, erit $ax + x^2 - \frac{bxdy}{ds} = c^2$. Congruunt aequationes iis omnibus, quas plura elementa curuae conſiderando, in medium protulit *Eulerus*.

Addamus exemplis hiſce alia quaedam. Decreſcat vis, qua ſe attrahunt puncta omnia in ratione duplicata auctarum diſtantiarum, et requiratur curua QHE, quae Tab. VI. Fig. 5.

maxime omnium attrahat corpuſculum L in axe HL conſtitutum. Erit attractio elementorum GF, TF ſecundum directionem axis ipſius exercita $\frac{GT.LR}{GL^3} + \frac{TF.LS}{TL^3}$ $= \frac{\overline{GT - To}}{EL^3} LR + \frac{\overline{TF + PO}}{TL^3} LS$. Inde eruetur $\frac{d.LR.MG}{GL^3.GT}$. TP $= \frac{d.\overline{ndy + ydy}}{(\overline{n+y}^2 + x^2)^{3:2} ds}$ TP $= 0$, facta ſcilicet LA $= n$. Si vero quaeratur curua, quae non ipſa quidem, ſed ſuperficies revolutione circa axem genita attractionem maximam exerceat, erit $\frac{d.\overline{nxdy + xydy}}{(\overline{n+y}^2 + x^2)^{3:2} ds}$. TP $= 0$. Si denique totum ſolidum maximam attractionem exercere debeat, quoniam attractio circuli radio RG deſcripti eſt $1 - \frac{LR}{LG}$, erunt elementa attractionis maximae $MG - \frac{MG.LR}{LG} + NT - \frac{NT.LS}{LT}$ $= MG - TP - \frac{\overline{MG - TP}}{LG} LR + NT + TP - \frac{\overline{NT + TP}}{LT} LS$, vnde emerget $\frac{d.\overline{n+y}.TP}{\sqrt{(\overline{n+y}^2 + x^2)}} = 0$. Poterunt hae proprietates cum ſingulis ſuperioribus ad libitum componi. Si eius indolis curua eſſe debeat ex. gr. vt circa axem LH conuerſa generet ſolidum, quod prae aliis aequalibus maxima attractione polleat, aequatio curuae habebitur $\frac{b^2 n + b^2 y}{\sqrt{(\overline{n+y}^2 + x^2)}} = c^2 - x^2$.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DISSERTATIO

DE QVIBVSDAM CIRCA LENTES CAVSTICAS ET SPECVLA VSTORIA EMENDATIS ET NOVITER INVENTIS (*a*)

Auctore *IO. ERN. ZEIHER.*

Effectus radiorum ſolarium ſpeculis cauſticis, aut lentibus, coactorum, ſine dubio maxime mirandi ſunt; ſimul vero dolendum eſt, phyſicorum plurimos hiſce organis carere. Specula cauſtica quidem adhuc, ſed non ſine magnis impenſis, haberi poſſunt, lentes vero trium, aut quatuor pedum, quales Dom. de *Tſchirnhauſen* olim confecit, vix a priuato poſſidentur; dum earum vix quinque aut ſex ſuperſunt, quae aut principum aut aliis technophylaciis publicis repoſita adſeruantur: (*b*) cui accedit, quod furnos et machinas nouis fundendis et poliendis neceſſarias, nemo priuatus ſibi facile compparauerit. Neque ex ſolo vitro, maio-

 res

(*a*) In haec cogitata incidi, antequam, quae D. de *Buffon* in his praeſtitit, didiciſſem. Optimum ergo duxi, ſi cogitata mea illo ordine, quo ſe conſequuta ſunt, recenſerem, Domini de *Buffon* vero inuenta, vbi occaſio eſſet, in notis adducerem.

(*b*) Vnam poſſedit *Lehmannus*, olim Phyſicae Profeſſor Lipſienſis, qui plus fere ſumtuum, quam priuati, et non adeo diuitis, rationes ferrent, naturae inueſtigandae impendit. Illa lens extat adhuc Lipſiae apud *Lehmanni* filium, aequo pretio vendenda.

res aut perfectiores, quam *Tſchirnhauſius* dedit, elaborari poſſe videntur.

Interim magnae eſſet vtilitatis, ſi inter phyſici cuiusuis ſupellectilem lens trium aut quatuor pluriumue pedum reperiretur. Tunc enim alii hac, alii alia occaſione experimenta inſtituendi oblata, lentibus propriis opportunitatem ſubminiſtrantibus, magnus nouorum inueniendorum aperiretur campus. Haec effecerunt, vt de mediis, ſpeculorum cauſticorum, inprimis vero lentium, vſum magis communem reddendi cogitarem.

Primo ſpecula, minoribus impenſis, quorum effectus tamen pro ratione magnitudinis et impenſarum inſignis eſſet, perficienda meditabar. Eo me ducebat *Kircheri* idea, ſpecula talia ex planis componendi, et paruum quoddam tentamen rei ſic inſtituebam: (c)

Pluribus ligni fruſtis ita coniunctis, vt figuram ſemel inductam mutare non poſſent, totam compagem ſecun-

(c) Fortuito cum D. de *Buffon* in eadem cogitata incidi, etſi ad alium ſcopum collimant. Ille enim de ſpeculis in longinquum focum proiicientibus cogitauit, Archimedea, quae narrantur, reſtituturus, aut potius primo exhibiturus; ego autem, quae metallicis ſpeculis ex maſſa continua elaboratis magna impenſa obtinentur, facilius conficere, ſicque vſum ſpeculorum cauſticorum magis communem reddere volui. Inuenta Dom. de *Buffon* v. in Commentariis Acad. Reg. Scient. Pariſ. 1747. 1748.

ſecundum arcum circuli, cuius radius erat digitorum rhenanorum triginta ſex, torno excauari curabam. Latitudo erat digitorum quindecim, craſſities trium. Superficiei ad craſſitiem circiter lineae inducebam maſſam ex farina, creta, fuligine, aqua mediante commixtis. Hac plane ſiccata, aliud adhibebam lignum, capulo, quo teneri poſſet, inſtructum, latitudine, quae circiter duas tertias latitudinis ligni eius haberet, cui adiungi ſpeculum debebat, conuexitatem vero, concauitati alterius illius ligni, et ſpeculi ipſius, congruentem. Hoc inſtrumento ligneo conuexo ſuperficiem maſſae, cauo inductae, terebam, donec ſuperficies polita ſatis et perfecta erat.

Deinde ex ſpeculis planis ſecari curabam quadrata exigua, quorum latera digitum dimidium rhenanum aequabant, quibus cauitatem illam obducebam, ita ſpeculum cauum ex planis compoſitum obtinens. (*d*)

Cum

(*d*) Reperit Dom. de *Buffon* (Comment. Acad. Scient. Pariſ. 1747. pag. 83. ed. Pariſ.) ſpecula vitrea, mediocri diligentia elaborata, lucem fortius reflectere, ſpeculis metallicis optimis, imo melius compoſitione illa, qua ad Teleſcopia catadioptrica vtuntur. Ad vtendi igitur ſcopum metallicis vitrea praefert. Vt caua ſpecula ex planis vitreis componeret, varia ingenioſiſſime excogitauit. Speculum diſtantiae focalis inſignis quaerens, plana vitrea 158. quodlibet latitudinis digit. 6. altitudinis 8. excedens coniunxit, ſicque lignum ad diſtantiam ped. 168. incendit, ſtannum, plumbum, argentum, ad diſtantias pedum 150, 130, 60, liquauit. Deinde aliud ſpeculum ex 192. planis coniunxit, quorum

Cum hoc ſpeculo varia experimenta inſtitui, idque pro ratione magnitudinis ſuae egregios effectus edere reperi, licet nec ſuperficies ipſa ſatis ex voto formata eſſet, nec ſpecula omnia angulis ſuis ſuperficiem

---

quorum 20 effectum ſatis inſignem ad diſtantiam 120 pedum, 80 ad pedes 240, et 160 ad pedes 360 ediderunt. De ſuſtentaculo hoc tantum monet, quaquauerſum verti poſſe, ſpeculum vero quodlibet ſeorſim poſſe moueri. Ego de ſuſtentaculo, cuiuis tali ſpeculo compoſito apto, cogitaui, quo pondus nimium machinae non daretur, ſpecula vero omnia ſimul verti poſſint. Id ſic crederem effici poſſe. Fiat crux lignea quatuor aequalium brachiorum, ſingulis brachiis ad extrema ſua in angulos rectos curuatis; huic aſſeres duo flexiles, vbique aequalis craſſitiei et longitudinis, ita imponantur, vt ſingula extrema aſſerum ſingulis extremis inflexis crucis incumbant. Iungantur vero extremis crucis inflexis retinacula, ſub quibus antrorſum et retrorſum duci poſſint aſſeres elaſtici, non tamen decidere. Aſſeribus elaſticis imponantur ſpecula plana, ſic vt exacte omnia in plano eodem ſita ſint. Iam aſſeres hi ita ſibi imponantur, vt ſe decuſſent, non vero inſeri debet vnum alteri, aut alio modo coniungi, ſed ſimpliciter ſibi ſuperimponi. In ea parte, qua ſibi mutuo incumbunt, cochlea applicatur, qua magis minusue ad brachia crucis vrgeri poſſunt. Hac cochlea curuari poterunt aſſeres, et ſpecula plana ante in directum poſita curuedinem efficient pro diuerſo cochl ae ſitu maiorem, vel minorem. Illud par extremorum crucis reflexorum, quibus ſuperior aſſer incumbit, reliquum par excedere debet craſſitie aſſeris inferioris, vt curuedines aſſerum in ſuperficiebus parallelae ſitae ſint; nam aequali extremorum illorum inflexorum crucis longitudine inferior aſſer, ſiue cruci proprior, exteriore magis curuaretur. Equidem curuatura aſſerum in rigore circularis non erit, ſed ita comparata, vt radius eius oſculi circa medium maior ſit, quam verſus extrema, elaſticae ſcilicet ſpecies, ſed hoc ipſum proficit magis, quam obeſt. Specula decet laxius aſſeribus iungi, vt paulisper verti ad hoc vel illud latus poſſint. His omnibus ita perfectis, cochlea, de qua dixi, magis minusue circumuol-

ciem ſphaericam contingerent, hincque radii multum aberrarent, et non ſatis in vnum focum colligerentur. Quibus non obſtantibus, momento temporis flammam in charta candida excitaui, ſtannum in laminas tenues malleo diductum perforaui, aqua in vaſculo vitreo vt ebulliret effeci, laminas aurichalceas candere vidi, et quae reliqua ſunt; licet illa ſpeculi aberratione certo certius dimidium radiorum perdatur.

Inuentum etiam quoddam magni *Iſaaci Newtoni* ruminaui, qui ſpeculum vſtorium compoſitum Societati Regiae Anglicanae obtulit, *Derhamo* in Aſtrotheologia L. 7. C. 1. p. 166. verſ. germanicae memoratum. Conſtat machina ex cauis ſpeculis ſeptem, quorum quodlibet habet latitudinem digitorum duodecim, atque ita

---

cumuoluatur, machina ſoli opponatur, et obſeruetur, quantum a ſe diſtent ſuperficies lucidae, radios a ſingulis ſpeculis reflexos continentes. Quae ſi non omnes ſibi congruant, hoc vel illud ſpeculum, a quo reflexi radii a reliquis ſecedunt, tam diu vertere licet, donec omnes coincidant, in eoque ſitu ſpecula firmare. Lignum vero, etſi vbique aequaliter craſſum, non tamen aequali elaſticitate gaudet, igitur ſi hic defectus obſeruetur, auferendo debito loco aliquid craſſitiei, mederi illis poſſet. Si curvedo verſus extrema nimis inſenſibilis fit, poſſent aſſeres in medio craſſiores fieri, quam verſus extrema, ſic reperiretur tandem curuedo, in qua diſpoſita ſpecula plana radios ſingula in quauis diſtantia ad eundem locum reflecterent, et in machina ſemel ita coordinata nihil ſupereſſet, quam vt cochleae ope diſtantia focalis mutaretur, quae mutatio ab infinita ad paruos pedes pertingere poſſet.

ita coordinata ſunt, vt radii illorum omnes in vnum idemque punctum reflectantur; inſignis proinde effectus.

Ita compoſitum ſpeculum plus praeſtare poſſe ſimplici certum videtur, ſi in vtrumque radii ſolares eodem numero incidunt, aberratio quoque euitatur, inſignis futura, ſi ſpeculo vnico ſuperficies dari debeat ſeptem illis aequalis; (*e*) denique minus plurium ſpeculorum coniunctorum pondus eſt, quam vnius ſimplicis, quod ſi magnum eſſe debeat, tenue fieri non poteſt.

Minora haec ſpecula componi poſſent ex ſpeculis vitreis planis exiguis, quae ſingula ad magnitudinem accederent eam, quae eſt foci ſpeculi maioris totius, ſi ſuperficies eſſet continua: ſic impenſae minuuntur, effectus vero, niſi multum fallor, maior adhuc erit, quam metallici, qualia vulgo fabricantur. Maiora ſpecula vitrea continua efficiendi aliam methodum, eamque faciliorem, indicabo, vbi de lentibus egero.

Venio nunc ad ea, quae circa lentes reperi. *Hertelius* in libro de poliendis vitris, (Anweiſung zum Glaſ-

(*e*) Praeterea, cum paralleli, axi verſus centrum ſolis directo, ii tantum radii incidant, qui ex centro ſolis exeunt, reliqui angulis diuerſis, maximo ſemidiametro ſolis apparenti aequali, ad axem inclinentur, horum a latere venientium, alia eſt reflexio, quam expendunt D. de *Buffon* et *Caſſini* Comment. Acad. Pariſ. 1747. pag. 32. et p. 104. Cel. *Kaeſtnerus* in Optices Syſtemate quod germanice edidit (Vollſtändiger Lehrbegriff der Optic) Catoptricae analyticae cap. 1. Prop. cor. 4. concurſum reflexi radii cum axe ex angulo incidentis cum axe definire docuit.

Glasſchleiffen) p. 51. maſſam vitri in fumo fluentis annulo ferreo excipi iubet, vt pondere ſuo in ſuperficiem cauam inflectatur; duas eiusmodi ſuperficies iungi et aquam intromitti. Sed nec magna poſſunt fieri haec vitra, nec radii deſiderati, imo ne quidem ſphaerica fient, ſed catenariae formam adſectabunt. Ego vero methodum inueni, tabulas politas planas ſpeculares cuiuscunque magnitudinis in meniſcos curuedinis ſphaericae exactae et deſideratae mutandi. (f)

Initio ſumebam catinum, quo ad vitra optica polienda vti ſoleo, radii digitorum ſex, chordae circiter quinque digitorum; tunc fruſtum vitri ſpecularis rotundatum, cuius latitudo dimidio circiter digito minor erat latitudine catini, catino impoſitum, reponebam ſub tegula illa ſemicylindrica, qua in chymia Metallurgica vtimur, Muffel Germanis dicta; poſtea igne tegulam circumdedi, et vitrum molleſcens ad cauum catini ſe accommodaſſe, ex luce, quam ſuperficies ſphaerica reflectebat, intellexi. Superiorem tegulae partem carbonibus liberaui, vt paullatim refrigeſceret; ſed cum alius catinum ex tegula tolleret, antequam ſatis refriguiſſet, cauſſae illi tribui, quod vitrum rimam ageret. Hoc autem vitrum fortuito initio ſtatim debitum calorem erat conſequutum, debitumque tempus in

 igne

(f) D. de *Buffon* (Comment. Acad. Scienc. 1748. p. 307.) tabulis vitreis regularem curuedinem ſe conciliaſſe ſcribit, methodum vero, qua id peregerit, non indicat. Eo magis ergo meam hic docendam putaui, inprimis cum rem magni momenti D. de *Buffon* exiſtimet.

igne remanſerat, ſuperficiei catini perfecte ſe applicaverat, puritate, quam habebat, cum infra catinum illud reponerem, nihil imminuta. Equidem catini ipſius figuram, ob expanſionem, quam metalla in igne patiuntur, paulisper mutatam eſſe, credibile eſt, ſed praeſenti ſcopo id haud officere videtur.

Huius exigui tentaminis ſucceſſu erectus, maius experimentum capere decreui. Catinum cupreum, ſedecim digitos rhenanos latum, ad curuaturam ſphaerae, cuius radius eſſet digitorum triginta duorum, primum malleo, deinde accuratius torno, elaborari iubebam; tunc laminarum duarum, digitos quatuordecim et dimidium latarum, ex vitro ſpeculari Veneto ſectarum, vnam, cum catino, ad digiti dimidii craſſitiem exterius luto tecto, lateribus tribus impoſui. Ita vero lateres ordinaueram, vt ſub catino, in illis requieſcente, carbones incendi poſſent. Aliis lateribus catinum circumdabam, qui digitis duobus altiores erant margine catini, ſed ab eo ipſo margine paululum diſtabant, vt carbones interiici poſſent. Lateribus imponebam tegulam (Muffel) ſphaerice fornicatam, qualis imponi ſolet teſtis, in quibus argentum plumbi vitreſcentis ope depuratur, (Abtreibeſcherben) carbones vero circumponebam. Equidem vitrum molleſcens pondere ſuo curuabatur, calor autem ad latera, praecipue ad foramina tegulae, quae aer perflat, nimius erat, et in medio iuſto minor, carbonibus ſuperius incumbentibus, ob altiorem tegulae fornicem, nimium a vitro remotis. Margo igitur vitri liqueſcebat, medium

vero

vero non exacte ſuperficiei catini ſe applicabat, ſed veſiculis aereis occupabatur. Tunc quidem ignarus horum phaenomenorum, interitum vitri mei portendentium, ignem ſuperius, quantum licebat, augebam, vitrum poſt aliquod tempus debitam formam conſequuturum exiſtimans; perſiſtebant vero veſicae. Deinde carbones paulatim amouens, tantum modo ignis reliqui, vt ne nimis ſubito refrigeſceret. Sed poſtea vitrum catino adcretum, et rimis innumeris diſcerptum reperi, vt, quo a catino ſepararetur, malleo in puluerem eſſet contundendum, catinus vero denuo elaborandus.

Haec eam ob cauſſam retuli, vt intelligatur, quanti interſit, ignem aequali vi applicari, ne vitro circa margines liqueſcente, et ipſum perdatur, et catinus ipſe, quod in magnis catinis non ſine inſigni detrimento fieret, nouo labore in priſtinam formam eſſet reducendus.

Sequentia tentamina, cum vitris minoribus, quibus ad feneſtras vtimur, inſtitui, catinum minorem prius memoratum adhibens, ne enchireſes nimiis ſumtibus addiſcerem.

Loco tegulae argillaceae, tegmem ex lamina ferrea confeci, extremum eius in marginem non nimis altum inflectens, anterius vero apertura conuexa illud inſtruens, vt fieri ſolet in tegulis argillaceis; ſuperiorem partem planam effeci, vt carbones vitro ſatis propinqui eſſent, reliqua, vt ante, peregi, id potiſſimum agens, vt vitro calor aequabilis tribueretur, aut maior potius medio vitri, quam margini.

 Sic

Sic ſatis bene molleſcens vitrum cauo catini ſe applicabat, ſed, dum refrigeſceret, rimam agebat, idemque fatum plura vitra experta ſunt, dum plura experimenta inſtituebam.

Hoc incommodum euitaturus varia tentaui, quorum illud tantum deſcribam, quod ſemper poſtea ex voto ſucceſſit.

Circa lateres ponebam cineres per cribrum actos, vt ſimul incaleſcerent, et cum vnum vitrorum illorum debitam formam eſſet adſequutum, carbones quantoçyus a ſuperiore tegminis ferrei parte rémouebam, omnia vero cineribus calidis tegebam, nihil aperti relinquens; ſic vitrum integrum ſeruaui. Haec plus quam decies cum vitris minoribus, felici ſemper euentu, repetii.

Poſt haec ſecurior ad maiora progrediebar. Catinum ferreum, decem circiter digitos latum, quantum fieri poterat, ſecundum arcum circularem malleo elaborabam; omiſſa vero tritura, quia non opus erat rem exactiſſime perfici. Deinde ex vitro, quo ad feneſtras vtimur, fruſta octo digitos lata ſecabam, reliqua, vt ante, peragens, ſicque omnia probe ſucceſſerunt. Eorum bina coniunxi, quorum effectus etiam non contemnendus fuit, etſi propter catinum minus accuratum focus bene terminatus et coactus non eſſet. Tandem priorem catinum maiorem cupreum rurſus adhibui, in eo vitrum Venetum alterum, digitos fere quindecim rhenanos latum, curuabam, cui ſimile periiſſe antea retuli, egregio cum ſucceſſu, quantum exactitudo catini

tini cuprei admittebat. Hoc vitrum, alii plano, etiam Veneto, iungens, lentem digitos quindecim latam obtinui, bonos ſatis effectus edentem, ſed effectibus lentis aequalis ex vitro ſolido conſtantis inferiores; cuius rei cauſſa eſt, quod catinus, ob tenuitatem laminae cupreae, quae eum conſtituebat, ſatis exacte in ſuperficiem ſphaericam malleo deduci non poterat, figuram etiam in igne mutauerat. Igitur vitri figura, catini figurae ceterum congruens, accurata tamen non erat, vnde imagines diſtorquet, focum vero non ſatis terminat, nec ſatis cogit.

Huic malo facile mederi poſſumus catinis ferreis craſſioribus, operaque omni adhibita, vt tritura debitam formam et cauitatem conſequatur; multitudo vitrorum, qui in tali catino formari poſſunt, impenſas facile reſtituet.

Expertus ſum negotium quoque in catinis argillaceis ſuccedere.

Iam de his dicam, quae vt omnia bene cedant, obſeruari debent, prouti pluribus tentaminibus illa didici.

Si vitrum alicuius momenti formari debet, fruſtulum eius vitri antea igni exponendum eſt, donec candeſcat, quod, ſi polituram et perſpicuitatem ſeruet, operationi idoneum eſt. Accidit enim mihi, dum vitrum ſpeculi Veneti, quod ea parte, vbi craſſities vitri menſurari ſolet, nigrum erat, formabam, vt illud polituram omnem perderet, ſuperficiem nactum, ſuperficiei vitri ruditer triti ſimilem.

Recepta-

Receptaculi eius, in quo vitrum reponitur, vt tegulae argillaceae, aut tegminis ferrei, ſuperior ſuperficies non nimis a fundo remota eſſe debet, ita tamen, vt per aperturam anteriorem totum vitrum ſpectari poſſit. Hac ratione carbones incumbentes melius agunt in vitrum, illudque citius in medio, quam ad margines calefaciunt. Curandum quoque eſt, vt vitrum totum aequaliter candeſcat, rubrum colorem aequalem vbique exhibens. Nam ſi color eius in medio obſcurius rubeat, circa marginem vero albidior ſit, in periculo vitrum verſatur.

Quam primum vitrum ab igne rubet, ſollicite ad curuaturam, quam molleſcens conſequitur, attendendum eſt. Illa facile percipitur ex reflexione lucis et imaginum ſuperficiei ſuperioris tegulae, carbonum, etc. a vitro ſpeculi ad inſtar caui factae.

Magni vero refert, momentum exacte notare, quo vitrum ſuperficiei catini perfecte ſe applicauit, tuncque ſtatim remoueri ignem omnem ſupra vitrum, maximam quoque partem ignis ad latera, deinde omnia quantocyus cinere calido contegi, ne vllibi apertura remaneat.

Hoc momentum obſeruare, vſu demum addiſcimus.

Si nimis diu requieſcat vitrum, aliquid ſcoriae (Zunder) eius, quod a catino candeſcente ſecedit, adhaeret, et vitrum turpat; partes etiam vitri ex materia tenaciore conſtantes, vti nodi etc. calore nimium durante emergunt, exactitudini ſuperficiei obſunt, vnde

vnde patet, quanti interſit, momentum temporis, de quo dixi, accurate obſeruare,

Praeſtat citius, quam ſerius, vitrum refrigeſcere; nam poſito etiam, iſtud catinum in medio nondum attigiſſe, figura tamen ſphaerica, etſi minus conuexa, erit praeditum. Si vero medium planius eſſet marginibus, repeti poſſet operatio.

Dum auſertur ignis, et vitrum cineribus contegitur, inferius non omnes carbones auferendi ſunt, ne vitro ſubito nimis calor omnis ſubtrahatur rimasque agat.

Sic igitur duobus vitris formatis, aut vno ſaltim, ſi habeatur praeterea planum eiusdem latitudinis, iungantur illa ope picis in aqua non ſolubilis, addatur epiſtomium, et includantur annulo ligneo, quo ad vſum aqua repleri poſſint. (*g*)

Ad lentes permagnas, v. g. pedes octo, decem, duodecim, latas, formandas, quatuor portiones ſuperficiei ſphaericae formari poſſent, arcubus duobus metallicis ſe decuſſantibus in medio iungendae.

Ex

(*g*) Ex vitris curuatis, cauo medio aqua repleto, lentes vſtorias conficere docet D. de *Buffon* (Comment. Acad. Scienc. 1748. p. 308.) Ex vocibus *travaillées regulierement*, quibus vtitur, inferri poſſe videtur, vitra curuata ab ipſo poliri. Suadet etiam, vt ſalium pluribus generibus, vno poſt alterum in aqua ſolutis, denſitas eius et refractio augeatur.

Ex vitris hiſce in ſuperficie poſteriori amalgamate obductis, egregia ſpecula vſtoria poſſent parari (*b*).

(*b*) D. de *Buffon* l. c. p. 307. variis modis cochleae, quam tabubulae in medio perforatae applicat, ope, deinde aeris, ſulphure accenſo abſorbendi, pauliſper curuare tabulas vitreas docet, vt ad magnam diſtantiam radios reflexos colligant, ipſe vero enchireſium harum incommoda quaedam indicat, inprimis quod tabulae facile frangantur. Remedia, quibus incommoda haec tollere ſtudet, ingenioſe excogitata eſſe non nego; mihi tamen nimiam operam nimiasque impenſas poſtulare videntur, ne dicam dubitare me, an ſemper ſint ſucceſſura. Sulphur, vt aerem poſt ſpeculum abſorbeat, accendere vult ipſo ſpeculo, medio in lentis conuexae figuram trito, cum, quantum ego video, facilius id applicata lente vſtoria minore vulgari effici poſſit; neque ad curuandas cochlea tabulas non perforatas, aeris auxilium tam operoſe eſt aduocandum. Vnum ex mediis facilioribus idem obtinendi, tale mihi eſſe videtur. Priſma quadrangulare tenue ferreum vtroque extremo incuruetur, in medio vero habeat foramen, cui inducta eſt cochlea foemina. Huius priſmatis extrema inflexa ad annulum, cui ſpeculum incumbit, firmentur ſic, vt ſpeculi ſuperficiei anteriori incumbat, foramen vero medio ſpeculi reſpondeat. Igitur lamina craſſiore aurichalcea centro ſpeculi impoſita, cochlea vero mare, per foramen adacta, curuari ſpeculum ſenſim poteſt. Iactura aliqua fit, ſed exigua, lucis, ferro partem ſpeculi tegente; haec iactura, vt quantum fieri poteſt diminuatur, craſſities priſmatis ferrei exigua ſit, latitudo paulo maior; applicetur vero ſpeculo ſic, vt craſſities ſit ſpeculo parallela, latitudo perpendicularis. Sic foramine per latitudinem tranſeunte, ſatis firmitatis chochleae adigendae ſupererit, radii autem a craſſitie pauciores impediantur.

Huius rei experimentum cepi tale: Tabulam ex vitro ſpeculari veneto, diametri dig. rhen. viginti duorum, craſſitiei linearum duarum, annulo circumdedi, ſuppoſui vero cochleae iis ſimili, quae ad ſigilla cerae imprimenda adhiberi ſolent, deinde vitrum cochlea medio eius imminente, tantum curuaui, quantum

ferri

ſerri poſſe a vitro credidi; atque ita reperi medium lineas rhenanas duas protruſum. Repetii experimentum, et vitrum ita flexum, dies plures detinui, nullo eius damno. Hanc vitri curvaturam, ſi, quod in rigore non eſt, circularem fingamus, pertinebit illa ad radium pedum triginta, datura ſpeculum diſtantiae focalis quindecim. Haec quidem curuatura, pro ratione magnitudinis tabulae, *Buffoniana* multo maior eſt. Cum hoc vitro, in parte poſteriori non obducto, nulla tentamina inſtituere potui.

Speculorum vitreorum ſegmenta longa, ſed exiguae latitudinis, inſigniter incuruari ſe patiuntur, et hinc componi poſſent ſpecula vſtoria, ſuſtentaculo adhibito, quale antea, cum de ſpeculis planis ad modum D. de *Buffon* coniungendis agerem, deſcripſi.

PHAENOMENORVM IRIDIS SEV ARCVS, COELESTIS. DISQVISITIO.

Auctore

SIM. KOTELNIKOW.

1.

Quantum ſtudia mathematica et phyſica, poſt inventum Calculum differentialem et integralem incrementi ceperint, rerum mathematicarum peritis non ignotum eſt, praeſertim ſcientia motus, quae eſt ita difficilis, vt ſine his calculis ad plurima problemata nequidem acceſſus pateat, nunc vero ad tantum perfectionis gradum perducta eſt, vt alias intricatiſſima problemata, facili labore reſolui poſſint. Vſus igitur eorum coniunctim per totam matheſin latiſſime patet, nam per plurima phyſica problemata ita ſolui ſolent, vt vterque in ſubſidium vocetur. Sed de calculo differentiali iure dici poteſt, quod, ſi excipias ea, quae per methodum ordinarium maximorum et minimorum ſolui ſolent, pauciſſima reſtabunt, quae teſtificari poſſent, eum ſine integrali etiam aeque facile adplicabilem eſſe. Neque tamen negari poteſt, dari, extra methodum maximorum et minimorum, problemata, quae ope eius reſolui queant. Ecce tale exemplum in diſquiſitione proprietatum Iridis, ſeu arcus coeleſtis.

coeleſtis; vbi traditur methodus facilis, amplitudinem Iridis, poſitionem, latitudinem, ordinem colorum etc. inueſtigandi.

2. Sed antequam aggrediar calculum, principia, quibus ille innititur, paucis explicabo. Vetus opinio eſt Iridem oriri a pluuia, aut quibuscunque aqueis vaporibus craſſioribus, radiis ſolaribus illuminatis; nam et Lucretius, de Rer. natur. L. 6.

Hinc vbi ſol radiis tempeſtatem inter opacam
Aduerſa fulſit nimbrorum aſpergine contra,
Tum color in nigris exiſtit nubibus arqui.

Radii ſolares in guttas aqueas incidentes infringuntur, et ſic in colores ſeparati ad oculos deiiciuntur; effectum eorum, quem Iridem vocamus, producendo. Ex opticis conſtat, radios ſolares recta progredi a ſole, et inter ſe parallelos eſſe, propter tam magnam eius a terra diſtantiam; quod etiam in dioptrica perpetuo ſupponi ſolet. Simili modo hic radios ſolis non ſolum ad guttas aqueas peruenire parallelos, ſed et poſt refractionem ita ad oculum deferri debere, vt eiusdem coloris ſint inter ſe paralleli, hoc eſt, ea lege progredi, vt rubri cum rubris, caerulei cum coeruleis etc. ſemper inter ſe eandem diſtantiam ſeruent. Quod et natura rei poſtulare videtur; nam ſi illud non eſſet, radii poſt refractionem ſeparationemque iterum confunderentur, neque deſideratum effectum in oculo producere poſſent.

3. His principiis ſtabilitis id lucramur, vt angulus SGO, nempe, quem radii in guttam aqueam incidentes, et iſti, qui poſt quotcunque reflexiones, quae potiſſimum hic conſiderari debent, ex gutta iterum Tab. VII. Fig. 1.

 egre-

egrediuntur formant, maneat conſtans. Quem angulum in poſterum vocabo breuitatis gratia *angulum amplitudinis*, nam quo maior eſt hic angulus, eo amplior Iris videtur, id eſt, ſub maioris circuli arcu. Vt autem clarius percipiatur, quid per angulum amplitudinis intelligam, ſit S corpus luminoſum, ABC guttula aquea, incidat radius SA in eam in A, qui ibi refractus progrediatur in B, ex B reflectatur in C, ex C in D, ex D in E, ex E in F etc. et poſt has reflexiones tandem egreſſus ex guttula perueniat ad oculum O, ſecundum rectam FO. Producantur iam rectae OF et SA donec concurrant in G, et prodibit angulus OGS, qui vocatur mihi *angulus amplitudinis*; ſeu, quod perinde eſt, ſi ex centro C ducantur rectae CM et CN, radiis FO et AS parallelae, erit angulus NCM = SGO; angulum NCM vocabo in poſterum *angulum amplitudinis*.

Tab. VII. Fig. 2. 4. Conſideremus nunc ſimpliciſſimum caſum, quo radii ſolis non reflexi in gutta aquea iterum eiiciuntur. Sit C gutta aquae, quam ſuppono ſphaerica eſſe figura; nam et re vera nullam aliam in aere libero accipere poteſt. Incidat in eam radius Solis SD in D vtcunque, duc ex centro C radium CDB; erit PDB angulus incidentiae. Radius SD, ingrediendo in guttam in D, refringetur ad perpendiculum CD, et pergendo ad alteram partem guttae in E, formabit cum eo angulum refractionis CDE, vbi egrediendo refringetur a perpendiculo CEA, et perueniet ad oculum, quem ſtatuo in O.

5. Quia

5. Quia guttula aquae eſt figura ſphaerica, erit CED = CDE, ſed ſin. SDB : ſin. CDE = ſin. OEA : ſin. CED, ergo SDB = OEA. Ducantur ex C rectae CN et CM, parallelae ipſis DS et EO, erit MCN angulus amplitudinis. Ponatur angulus incidentiae SDB = Φ, ang. refractionis = θ et angulus amplitudinis = ζ. Cum ſinus anguli incidentiae ad ſinum anguli refractionis habeat rationem conſtantem, ponamus eam eſſe $1 : m$ et erit:

ſin. Φ : ſin. $\theta = 1 : m$

hinc ſin. $\theta = m$ ſin. Φ.

6. Denotet π arcum 180°, qua littera in poſterum ſemper vtemur; nam ea in determinationem anguli ζ ingreditur. Quia angulus SDB = OEA = NCD = ACE = Φ, et angulus CDE = CED = θ, erit DCE = $\pi - 2\theta$. Ergo angulus amplitudinis ζ erit $= \pi + 2\theta - 2\Phi$. Habemus itaque duas aequationes ſin. $\theta = m$ ſin. Φ et $\zeta = \pi + 2\theta - 2\Phi$, ex quibus anguli θ, Φ et ζ determinari debent.

7. Quamuis duas aequationes et tres indeterminatas quantitates habeamus, tamen, quia ζ ſemper a θ et Φ pendet, poſſumus omnes tres determinare, eliminando ζ per differentiationem; nam ſupra oſtendimus hunc angulum ζ debere eſſe conſtantem, ideoque eius differentiale $= 0$.

8. Cum aequationes inuentae ſin. $\theta = m$ ſin. Φ et $\zeta = \pi + 2\theta - 2\Phi$ ſint verae, erunt etiam earum differentiales $d\theta$ coſ. $\theta = m\, d\Phi$ coſ. Φ et $d\theta = d\Phi$ verae. Ex quibus habetur coſ. $\theta = m$ coſ. Φ, et hinc tang. θ

= tang.

$= \tang \Phi$ ergo $\theta = \Phi$, qui valor anguli θ ſi in aequatione $\zeta = \pi + 2\theta - 2\Phi$ ſubſtituatur, prodibit $\zeta = \pi$. Vnde patet rectas CN et CM cum rectis DS et EO coincidere, et radium ſolis SDEO recta per centrum guttae tranſire debere. Quod oſtendit, nullam hoc caſu iridem oriri poſſe.

9. Hic notari debet, quod quamquam aequatio inter coſinus ex differentiali verae aequationis finitae ſin. $\theta = m$ ſin. Φ deducatur, tamen prorſus falſa produiſſe videtur. Nam, quia $\Phi > \theta$, debet eſſe coſ $\theta >$ coſ. Φ; hic vero reperitur coſ $\theta <$ coſ. Φ. Sed ſi ad concluſionem reſpiciamus, patebit, aequationem coſ. $\theta = m$ coſ. Φ etiam habere locum; nam $\theta = \Phi = o$ repertum eſt, ideoque tota aequatio coſ. $\theta = m$ coſ. Φ euaneſcit. Forte hic alicui dubium oriri poteſt, quod ab aequalitate tangentium ad aequalitatem angulorum concluſionem fecimus; ſed hoc dubium tollitur, ſi attendamus ad id, quo neque θ neque $\Phi >$ recto eſſe poteſt. Pergamus itaque ad alios caſus perſequendos.

Tab. VII. Fig. 3. 10. Ex Optica conſtat radios ſolis SD in guttam C in D incidentes in ingreſſu refringi ad perpendiculum CB, et ad alteram partem in E delatos non omnes exire, ſed partem eorum reflecti in A, ita vt angulus incidentiae DEC ſit aequalis angulo reflexionis CEA. Ponamus ergo radios poſt hanc vnicam reflexionem in E, ex gutta in A exire; radii in exitu iterum refringentur, ſed a perpendiculo CAa, quia ex denſiori medio in rarius tranſeunt, et peruenient ad oculum O ſecundum rectam AO, ita vt angulus OAa ſit aequalis SDB, quod ex proprietate circuli et ratione anguli incidentiae et refractionis perſpicitur.

11.

11. Quia ſin. SDB : ſin. EDC $= 1 : m$, erit iisdem denominationibus retentis ſin. $\theta = m$ ſin. Φ vt ſupra; et hinc $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{m \text{ coſ.} \Phi}{\text{coſ} \Phi}$. Hac aequatione in poſterum, tamquam canonica, ſemper vtemur; nam ea exprimit relationem incrementorum, angulorum incidentiae et refractionis. Ducantur porro rectae CN et CM, ipſis SD et AO parallelae, erit MCN angulus amplitudinis, qui inuenietur, vt ſequitur. Cum lineae CN, DS et CM, AO ſint inter ſe parallelae, erit angulus SDB $=$ NCD $=$ MCA $=$ OA$a = \Phi$ et DEA $= 2\theta$; nam vertex eius eſt in peripheria, et inſiſtit arcui DA, quare arcus DA $= 4\theta$, vnde ſi ſubtrahatur 2Φ, habebitur angulus amplitudinis $\zeta = 4\theta - 2\Phi = 2(2\theta - \Phi)$.

12. Inuenta modo aequatio $\zeta = 2(2\theta - \Phi)$ differentietur, et prodibit propter quantitatem conſtantem ζ, quae differentiale non habet, ſequens differentialis aequatio, relationem inter $d\theta$ et $d\Phi$ exprimens, $2d\theta = d\Phi$, ſeu $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{1}{2}$. At eſt $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{m \text{ coſ.} \Phi}{\text{coſ.} \theta}$; vnde obtinetur haec aequatio finita relationem angulorum θ et Φ continens, nempe coſ. $\theta = 2m$ coſ. Φ.

13. Habemus itaque duas aequationes finitas pro duabus variabilibus θ et Φ, quae ſunt

ſin. $\theta = m$ ſin. Φ, et coſ. $\theta = 2m$ coſ. Φ.

Ex quibus eliminando alterutram, inuenietur tam θ, quam Φ, in numeris abſolutis expreſſae. Sume quadrata vtriusque aequationis, et habebis ſin. $\theta^2 = mm$ ſin. Φ^2 et coſ $\theta^2 = 4mm$ coſ. Φ^2, quae ſi addantur, erit mm ſin. $\Phi^2 + 4mm$ coſ. $\Phi^2 =$ ſin. $\theta^2 +$ coſ. $\theta^2 = 1$. Sed eſt coſ. $\Phi^2 = 1 -$ ſin. Φ^2, quo ſubſtituto elicietur ſin.

 $\Phi = \surd$

$\Phi = \sqrt{\frac{4mm-1}{3mm}}$ et coſ. $\Phi = \sqrt{\frac{1-mm}{3mm}}$, vnde tang. $\Phi = \sqrt{\frac{4mm-1}{1-mm}}$, tang. $\theta = \frac{1}{2}$ tang. Φ et $\zeta = 2(2\theta - \Phi)$

14. Vt autem formula $\sqrt{\frac{4mm-1}{1-mm}}$ maneat realis, neceſſe eſt, vt ſit $4mm > 1$ et $mm < 1$; quod ſi eueniret, et foret $4mm$ et $mm > 1$, vel tantum $4mm < 1$, tunc formula foret imaginaria, ideoque nullam iridem videremus. Hoc eueniret, ſi illae guttae, in quas radii ſolares incidunt, eſſent ex fluido aere leuiori. Veluti, quando in aqua radii ſolis incidunt in bullulas aereas aſcendentes, animalia aquatica nullam iridem tunc vident. At ſi multitudo exiguorum globulorum vitreorum in aqua penderet, tunc ſimili modo, vt in aere, iris oriretur.

Tab. VII. Fig. 4. 15. Non abſimili modo inueniuntur anguli θ et ζ, ſi radii ſolis poſt duas reflexiones ad oculum perveniant. Sit ſol in S et guttula aquae in C, in eamque incidat faſciculus radiorum ſolis SD, et poſt duas reflexiones E et A perueniat ad oculum O, ea lege, vti ſupra commemoraui. Erunt ſubtenſae DE, EA, AB inter ſe aequales, ergo arcus BEAD $= \pi + 6\theta$, hinc BD $= \pi - 6\theta$. Ducantur ex centro C rectae CM, CN, ipſis BO, DS parallelae, vt habeatur angulus amplitudinis MCN $= \zeta$; cuius menſura eſt arcus mB + BD + Dn. Sed mB $=$ D$n = \Phi$, vnde $\zeta = \pi - 6\theta + 2\Phi = \pi - 2(3\theta - \Phi)$.

16. Sumatur differentiale aequationis inuentae $\zeta = \pi - 6\theta + 2\Phi$, et prodibit $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{1}{3}$; at §. 11. invenimus $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{m \text{ coſ.} \Phi}{\text{coſ.} \theta}$, ex quibus habetur haec aequatio: coſ. $\theta = 3m$ coſ. Φ, et ex natura refractionis iſta: ſin. θ

ſin. $\theta = m$ ſin. Φ. Eliminetur iam alterutra incognitarum, vt ſupra fecimus, et elicies ſin. $\Phi = \sqrt{\frac{9mm-1}{8mm}}$ et coſ. $\Phi = \sqrt{\frac{1-mm}{8mm}}$, vnde tang. $\Phi = \sqrt{\frac{9mm-1}{1-mm}}$ et tang. $\theta = \frac{1}{3}$ tang. Φ, quibus inuentis erit $\zeta = \pi - 2(3\theta - \Phi)$.

17. Expediuimus caſum, vbi radii poſt duas reflexiones, perſequemur etiam eum, quo radii poſt tres reflexiones E, T, A ad oculum perueniunt. Si haec figura attente conſideretur, patebit, arcum DF eſſe $=$ BF $= 4\theta$, ergo BFD $= 8\theta$. Concipiantur ex centro C rectae CM, CD radiis BO, DS parallelae; erit NCM angulus amplitudinis. Et quia rectae CM et BO, CN et DS ſunt inter ſe parallelae, erit arcus $Bm = Dn = \Phi$. Si ergo hi duo arcus ex arcu BFD afferantur, reſtabit arcus mFn, id eſt angulus amplitudinis, et habebimus $\zeta = 8\theta - 2\Phi = 2(4\theta - \Phi)$. Tab. VII. Fig. 5.

18. Sumatur differentialis aequationis $\zeta = 8\theta - 2\Phi$, et obtinebit $\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{1}{4} = \frac{m\, coſ.\, \Phi}{coſ.\, \theta}$, vnde coſ. $\theta = 4m$ coſ. Φ, et ex natura refractionis ſin. $\theta = m$ ſin Φ, vnde tang. $\theta = \frac{1}{4}$ tang Φ. Reſtat tantum, vt tang. Φ inueniatur, quod fiet eliminando ſinum et coſinum anguli θ Hocque modo inuenietur ſin. $\Phi = \sqrt{\frac{16mm-1}{15mm}}$, coſ. $\Phi = \sqrt{\frac{1-mm}{15mm}}$. Ergo tang. $\Phi = \sqrt{\frac{16mm-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{4}$ tang. Φ et $\zeta = 8\theta - 2\Phi$, vt iam inuenimus.

19. Examinemus porro caſum, vbi radius poſt quatuor demum reflexiones, E, F, G, B, ad oculum O deferatur. Quaeratur primum arcus DA, ſic arcus mn, qui eſt menſura anguli amplitudinis MCN, facile inuenietur; nam eſt $= 2\Phi - AD$. Quia ſubtenſae DE, EF, FG, GB, BA ex natura circuli et lege reflexio- Tab. VII. fig. 6.

 nis

nis ſunt inter ſe aequales; erunt etiam arcus, quos ſubtendunt, item DG, EB, FA, atque etiam GE, BF inter ſe aequales. At eſt $DG = DE - GE = \pi - 6\theta$, qui cum GB, BA et AD conſtituit totum circulum; quare habemus $3\pi - 10\theta + AD = 2\pi$, vnde $AD = 10\theta - \pi$. Ergo $\zeta = \pi - 10\theta + 2\Phi = \pi - 26\theta - \Phi$.

20. Inuenta hac aequatione $\zeta = \pi - 10\theta + 2\Phi$, ſi calculus vt ſupra inſtituatur, reperietur tang. $\Phi = V \frac{25mm - 1}{1 - mm}$; quia ſin. $\Phi = V \frac{25mm - 1}{24mm}$ et coſ. $\Phi = V \frac{1 - mm}{24mm}$, tang. $\theta = \frac{1}{5}$ tang. Φ, quibus inuentis erit $\zeta = \pi - 10\theta + 2\Phi = \pi - 2(5\theta - \Phi)$.

Tab. VII. Fig. 6. 21. At ſi poſt quinque reflexiones, E, F, G, H, B radius ſolis ad oculum O perueniat, erit arcus $AD = 12\theta$, et propterea angulus amplitudinis $\zeta = 12\theta - 2\Phi = 2(6\theta - \Phi)$. Vnde reperitur ſin. $\Phi = V \frac{36m^2 - 1}{35m^2}$ coſ. $\Phi = V \frac{1 - mm}{35m^2}$, quare tang. $\Phi = V \frac{36mm - 1}{1 - mm}$ et tang. $\theta = \frac{1}{6}$ tang. Φ.

22. Poſt ſex reflexiones E, F, G, H, I, B, erit $\zeta = \pi - 14\theta + 2\Phi = \pi - 2(2\theta - \Phi)$, quia $\zeta = 2\Phi - AD$ et $AD = 14\theta - \pi$; quare tang. $\Phi = V \frac{49mm - 1}{1 - mm}$, tang. $\theta = \frac{1}{7}$ tang. Φ.

23. Ex huc vsque praemiſſis ſatis patet, quomodo iſta formularum inueſtigatio, pro angulis Φ, θ, et ζ, vlterius continuetur. Hoc tantum notandum eſt, vt figurae quam fieri poteſt commodiores delineentur, ne lex formularum turbetur. Nam antequam calculus in numeris abſolutis perficiatur, non apparet, quomodo figurae delineari debeant. Quam ob rem quaelibet figura

gura ita accommodanda eſt, vt lex quaedam in progreſſione anguli ζ continuo obſeruetur. Expreſſio iſtius anguli talis eſt, vt ſit $\zeta = p\pi + q\theta + r\Phi$, et lex, quam nos hic obſeruamus, eſt eiusmodi, vt coefficiens p euaneſcat, ſi numerus reflexionum ſit impar, et fiat $= 1$, ſi par. Coefficiens q eſt ſemper numerus par poſitiuus, ſi numerus reflexionum impar, negatiuus, ſi par; at r eſt negatiuus pro numero reflexionum impari, poſitiuus pro pari, et ſemper binario aequalis.

24. Sequens tabula exhibet formulas continentes valores angulorum Φ, θ et ζ, ſecundum numeros reflexionum diſpoſitas, vbi in prima columna numeri reflexionum, in ſecunda tangentes angulorum incidentiae, in tertia tang ang. refractionis et in quarta valores angulorum amplitudinis praeſentantur.

1; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{4m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{2}$ tang. Φ; $\zeta = 2(2\theta - \Phi)$

2; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{9m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{3}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(3\theta - \Phi)$

3; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{16m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{4}$ tang Φ; $\zeta = 2(4\theta - \Phi)$

4; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{25m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{5}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(5\theta - \Phi)$

5; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{36m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang $\theta = \frac{1}{6}$ tang. Φ; $\zeta = 2(6\theta - \Phi)$

6; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{49m^2 - 1}{1 - mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{7}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(7\theta - \Phi)$

etc.

25. Si has formulas conſideres, videbis coefficientes ipſius tang. Φ progredi in ſerie harmonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, etc. vbi tantum primus terminus $= 1$ deeſt. Sed ex analogia patet, poſt o refractiones debere eſſe tang. $\Phi = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{1 - mm}}$, tang. $\theta =$ tang. Φ, vbi tang. $\Phi = \sqrt{-1}$ eſt imaginaria. Quod egregie cum

veritate conſentire videtur, nam, nullus datur angulus incidentiae, vt poſt o refractiones iris prodire poſſet, quare etiam tangens illius anguli debet eſſe imaginaria. Quod attinet ad angulum ζ ille ſecundum analogiam debet eſſe $= \pi - 2(\theta - \Phi)$, quod vel ex hoc verum eſſe perſpicitur, quod calculus oſtendit $\theta = \Phi$ ideoque $\zeta = \pi$.

26. Vt autem formulam generalem ex particularibus deducere queamus, inuentas formulas ſupra, tam pro pari, quam impari numero reflexionum, ſigillatim conſideremus.

Formulae pro pari reflexionum numero:

0; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta =$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(\theta - \Phi)$

2; tang. $\Phi = \sqrt{\frac{9m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{3}$tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(3 - \theta\Phi)$

4; tang $\Phi = \sqrt{\frac{25m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{5}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(5\theta - \Phi)$

5; tang. $\Phi \sqrt{\frac{49m^2-1}{1-mm}}$; tang. $\theta = \frac{1}{7}$ tang. Φ; $\zeta = \pi - 2(7\theta - \Phi)$

etc.

Ex contemplatione harum formularum perſpicitur, coefficientes ipſius tang. Φ eſſe eos terminos ex ſerie harmonica, quorum denominatores ſunt numeri impares, coefficientes ipſius θ ipſos hos denominatores, et coefficientes litterae m^2 ſub ſigno radicali eorum quadrata. Quam ob rem, ſi p denotet numerum quemlibet integrum affirmatiuum, erit $\frac{1}{2p+1}$ coefficiens indeterminatus ipſius tang Φ; hinc tang. $\Phi = \sqrt{\frac{mm(2p+1)^2-1}{1-mm}}$; tang θ $= \frac{1}{2p+1}$ tang. Φ et $\zeta = \pi - 2(\theta(2p+1) - \Phi)$, denotante $2p$ numerum reflexionum.

Form-

Formulae pro impari reflexionum numero.

1. $\tang.\Phi = \sqrt{\frac{4m^2-1}{1-mm}}$; $\tang.\theta = \frac{1}{2}\tang.\Phi$; $\zeta = 2(2\theta - \Phi)$

3. $\tang.\Phi = \sqrt{\frac{16m^2-1}{1-mm}}$; $\tang.\theta = \frac{1}{4}\tang.\Phi$; $\zeta = 2(4\theta - \Phi)$

5. $\tang.\Phi = \sqrt{\frac{36m^2-1}{1-mm}}$; $\tang.\theta = \frac{1}{6}\tang.\Phi$; $\zeta = 2(6\theta - \Phi)$

7. $\tang.\Phi = \sqrt{\frac{64m^2-1}{1-mm}}$; $\tang.\theta = \frac{1}{8}\tang.\Phi$; $\zeta = 2(8\theta - \Phi)$

etc.

Vti ſupra pro pari numero reflexionum coefficientes ipſius tang. Φ erant termini ſeriei harmonicae ex locis imparibus, ſimili modo hic, vbi numeri reflexionum ſunt impares, coefficientes ipſius tang. Φ ſunt termini eiusdem ſeriei ex locis paribus, ita vt ſi ponatur numerus reflexionum indeterminatus $= 2p + 1$, denotante p numerum integrum affirmatiuum, erit $\tang.\Phi = \sqrt{\frac{4(p+1)^2 mm - 1}{1-mm}}$; $\tang.\theta = \frac{1}{2(p+1)}\tang.\Phi$ et $\zeta = 2(2\theta(p+1) - \Phi)$.

27. Cum formulae $2(2\theta - \Phi)$, $2(4\theta - \Phi)$, $2(6\theta - \Phi)$ etc. exhibentes valores anguli ζ, pro numero impari reflexionum, ſint complementa ad duos rectos, poſſumus aſſumere pro iis $\pi - 2(6\theta - \Phi)$ $\pi - 2(4\theta - \Phi)$, $\pi - 2(6\delta - \Phi)$ etc. Propterea, quod calculus ob hanc rem non perturbatur, at lex progreſſionis melius perſpicitur, ita vt ſi ponamus numerum reflexionum $= p$, erit $\tang.\Phi = \sqrt{\frac{m^2(p+1)^2-1}{1-m^2}}$ $\tang.\theta = \frac{1}{p+1}\tang.\Phi$; $\zeta = \pi - 2(\theta(p+1) - \Phi)$, quae formulae pro pari et impari reflexionum numero valent. Iuuat interdum tamen meminiſſe, quod pro ζ eo caſu, quo p eſt impar, eius complementum aſſumſimus.

28. Con-

28. Conſideretur nunc formula, qua exprimitur tangens anguli incidentiae, et patebit, creſcente numero reflexionum p, creſcere tangentem anguli Φ, ideoque etiam ipſum angulum, qui fit maximus, quando $p = \infty$. Ponatur ergo $p = \infty$, erit tang. $\Phi = \infty$, hinc $\Phi = 90°$. Quod oſtendit angulum Φ tum fore recto aequalem, quando numerus reflexionum eſt infinitus; nunquam igitur maiorem recto euadere poſſe, continuo tamen creſcere, creſcente p.

29. Quia angulus incidentiae Φ maior recto eſſe non poteſt, at vero $(p+1)\theta$, creſcente numero p, creſcit in infinitum, exceſſus ergo eius ſupra Φ tam poteſt euadere magnus, vt $\pi - 2(\theta(p+1) - \Phi)$ fiat negatiuum et multo maius π. Hoc eſt angulus ζ, ſecundum formulam $\pi - 2(\theta(p+1) - \Phi)$ inuenietur tandem negatiuus et maior π. Sed id nullam difficultatem in applicatione formulae parit; nam ſi datis angulis Φ et θ numero reflexionum p figura conſtruatur, ſtatim patebit, qualis angulus ζ debeat eſſe. Vel etiam ſi angulus ζ reperiatur negatiuus, et maior bis recto, ad eum addantur tot bis recti, quot ſufficiunt, ad illum affirmatiuum, et duobus rectis minorem, efficiendum.

30. Si radius ſolis incidat in guttam aquae in D, et poſt numerum reflexionum p iterum egrediatur, quaeritur conſtructio geometrica anguli incidentiae, refractionis et amplitudinis. Quia guttulam aquae ſupponimus figuram habere ſphaericam, concipiatur circulus maximus per punctum D tranſiens; per hoc punctum et centrum circuli C ducatur recta indefinita aCb; ſuper ea capiatur $CB = \sqrt{(1-mm)}$ et in puncto

punĉto B erigatur perpendicularis $B\beta = \sqrt{(mm(p+1)^2-1)}$, in eaque capiatur Bg, quae ſit ad totam $B\beta$ vt 1 ad $p+1$. Iungantur punĉta C et β, ſeu ex centro C ducantur per punĉta β et g reĉtae $CF\beta$ et Cgn, quae ſecabunt circumferentiam in F et n. Capiatur $Ff = EF$ et $nr = nE$, iungantur punĉta r et D et ducatur per f et D reĉta fDS; erit rDE angulus refraĉtionis et aDS incidentiae, ſole in S exiſtente.

31. Conſtruĉto tali modo angulo incidentiae et angulo refraĉtionis, adplicetur chorda Dr in circulo EDf, vicibus $p+1$, hocque modo determinabitur punĉtum, vbi radii poſt numerum reflexionum p ex gutta aquea iterum exeunt; ſitque illud punĉtum A. Ex centro C per A producatur reĉta CAH arbitrariae longitudinis, et fiat ſuper AH centro A verſus regionem reĉtae DS, angulus $HAO =$ ang. aDS, hoc modo determinabitur locus oculi O. Si porro ex centro C ducantur reĉtae CM, CN, reĉtis AO, DS parallelae, erit MCN angulus amplitudinis.

32. Sit guttula aquae quaecunque G, et angulus amplitudinis, quem conſtruximus pro p reflexiones SGO, exiſtente ſole in S, patet oculum in reĉta GO conſtitui debere, ex quo fit, vt ſpeĉtator videat punĉtum coloratum G ſecundum direĉtionem OG. Concipiatur ex S per oculum O reĉta SOo indefinita, erit $GOo = OGS + OSG$, ſed angulus OSG, propter antam ſolis a terra diſtantiam, ita eſt paruus, vt prae OGS negligi queat, et propterea erit $oOG = OGS$. Ergo angulus GOo erit angulus amplitudinis; ab eo Tab. VII. Fig. 9.

 enim

enim amplitudo Iridis pendebit. Nam quo maior iſte angulus, eo ſub maioris circuli arcu Iris apparebit.

33. Cum ſit, vt angulus G*O*o pro quauis ſpecie Iridis maneat conſtans, ſpectantes ex O videbunt quaqua verſus puncta colorata G, *g*, *g* etc. a recta SO*o* angulo GO*o* diſtantia, quae ſpeciem circuli varie colorati efficient. Circulus hic erit baſis coni, cuius axis eſt recta, ex ſolis centro per oculum ſpectatoris tranſiens, et vertex in ipſo oculo. Ex quo fit vt nunquam duo ſpectatores ſimul eandem, et in eodem loco videre poſſint; ſed quilibet ſpectantium, quotquot ſint, aliam inque alio loco conſpicit. Mutato itaque loco ſpectatoris, locus Iridis mutatur.

34. Falluntur ii, qui dicunt, quo pluuia ſpectatori proprior eſt, eo baſis coni erit circulus minoris radii, adeoque arcus apparebit minor et vice verſa. Quamuis hoc verum ſit, quod accedente pluuia, baſis fit re vera circulus minoris radii, inde tamen non ſequitur arcum minorem adparere debere. Nam adparitio magnitudinis obiecti ab angulo optico pendet, prouti angulus opticus augetur, vel minuitur. Hic vero iſte angulus manet idem, ex quo non poteſt fieri, vt Iris minoris maiorisue circuli arcus, accedente et recedente pluuia, adpareat.

35. Duo caſus hic conſiderandi ſunt, alter quando angulus SG*o* minor recto, alter quando ille rectum excedit. Primo caſu Iris ita videbitur, vt ſol a tergo ſpectatoris exiſtat, at ſecundo medium locum inter ſolem et ſpectatorem tenebit. Ducta concipiatur per oculum ſpectatoris

toris recta horizontalis Hh, et ſit angulus $SGO = \delta$. Patet exiſtente ſole ad altitudinem δ Iridem videri non poſſe, at apparere eam incipere, quando ſolis altitudo ſit $< \delta$ et eo ſub maiore circuli arcu, quo differentia inter altitudinem ſolis et δ maior euadit; at euaneſcente altitudine ſolis, hoc eſt, quando ſol in horizonte verſatur, Iridem ſemicirculi ſpeciem repreſentare debere. Si vero δ fuerit maior recto, et angulus $GOo = \pi - \delta$, tunc fieri poteſt, vt totam Iridem videamus, quae ſpeciem circuli repraeſentabit.

36. Ex formulis noſtris, $\text{tang.}\,\Phi = \sqrt{\frac{mm(p+1)^2 - 1}{1 - mm}}$ et $\text{tang.}\,\theta = \frac{1}{p+1}\,\text{tang.}\,\Phi$, ſi eas ad caſus particulares adplicare velimus, conſtruendi ſunt primum geometrice anguli Φ et θ, vt §. 30. et 31. docuimus, ex quo innoteſcet, ad quam regionem angulus ζ conuergit. Tum demum quaerendi ſunt eorum valores in numeris abſolutis. Conſtructioni iſtorum angulorum tabula ſequens inſeruiet, vbi in prima columna ſunt numeri reflexionum, in ſecunda valor formulae $\sqrt{(mm(p+1)^2 - 1)} = Q$, in fractionibus decimalibus. Valor vero ipſius $\sqrt{(1 - mm)} = 0.2$;

N. ref.	Q	N. r.	Q	N. r.	Q	N. r.	Q
1	1. 1	4	3. 6	7.	5. 9	10.	8. 2
2	2. 0	5	4. 4	8.	6. 7	11.	9. 0
3	2. 8	6	5. 2	9.	7. 4	12.	9. 7

37. Si iam conſtructio figurarum ex formulis inuentis modo ſupra tradito ſucceſſiue inſtituatur, patebit eas ita comparatas eſſe, vt formulae exprimentes valo-

res anguli ζ'; ex quo poſitio Iridis cognoſcitur, ſequenti modo determinentur, vt ſit:

pro numero reflex. $1, \zeta' = 4\theta - 2\Phi \quad = 2(2\theta - \Phi)$

$$2, \zeta' = \pi - 6\theta + 2\Phi = \pi - 2(3\theta - \Phi)$$
$$3, \zeta' = 2\pi - 8\theta + 2\Phi = 2\pi - 2(4\theta - \Phi)$$
$$4, \zeta' = 3\pi - 10\theta + 2\Phi = 3\pi - 2(5\theta - \Phi)$$
$$5, \zeta' = 4\pi - 12\theta + 2\Phi = 4\pi - 2(6\theta - \Phi)$$
$$6, \zeta' = 5\pi - 14\theta + 2\Phi = 5\pi - 2(7\theta - \Phi) \text{ etc.}$$

Ex his facile perſpicitur, ſi $\zeta > \frac{1}{2}\pi$, Iridem inter ſolem et ſpectatorem adparere debere; at ſi $\zeta > \frac{3\pi}{2}$, vel $\zeta > 2\pi$, et exceſſus eſt minor $\frac{1}{2}\pi$, Iris ita videbitur, vt ſol a tergo ſpectatoris exiſtat, quod ex ſequenti tabula clarius patebit, vbi omnes caſus in his formulis contenti exponuntur.

Caſus, quibus ſpectator medium locum tenet.	Caſus vbi Iris medium locum tenet.
$\zeta > 0\pi$	$\zeta > \frac{1}{2}\pi$
$\zeta > \frac{3}{2}\pi$	$\zeta > \pi$
$\zeta > 2\pi$	$\zeta > \frac{5}{2}\pi$
$\zeta > \frac{7}{2}\pi$	$\zeta > 3\pi$
$\zeta > 4\pi$ etc.	$\zeta > \frac{9}{2}\pi$ etc.

ſeu quod eodem redit, omittendo $0\pi, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ etc.

Iris in medio $\zeta > \frac{1}{2}\pi$; $\zeta > \frac{5}{2}\pi$; $\zeta > \frac{9}{2}\pi$; $\zeta > \frac{13}{2}\pi$; etc.

Spect. in medio $\zeta > \frac{3}{2}\pi$; $\zeta > \frac{7}{2}\pi$; $\zeta > \frac{11}{2}\pi$; $\zeta > \frac{15}{2}\pi$; etc.

38. Inuenta hoc modo poſitione Iridis, quantitas anguli amplitudinis ζ ex his formulis determinabitur

Pro

Pro numero reflex. $1, \zeta = 2(2\theta - \Phi)$
$2, \zeta = \pi - 2(3\theta - \Phi)$
$3, \zeta = 2\pi - 2(4\theta - \Phi)$
$4, \zeta = 2(5\theta - \Phi) - \pi$
$5, \zeta = 2(6\theta - \Phi) - 2\pi$
$6, \zeta = 3\pi - 2(7\theta - \Phi)$
$7, \zeta = 4\pi - 2(8\theta - \Phi)$
$8, \zeta = 2(9\theta - \Phi) - 3\pi$
$9, \zeta = 2(10\theta - \Phi) - 4\pi$ etc.

Ex quibus facile patet, quomodo illae vlterius progrediantur.

39. Ex his formulis particularibus iam facile generales deduci poſſunt. Nam numeris reflexionum $1, 4, 5, 8, 9$ etc. reſpondent valores anguli ζ reſpectiue $2(2\theta - \Phi)$, $2(5\theta - \Phi) - \pi$, $2(6\theta - \Phi) - 2\pi$, $2(9\theta - \Phi) - 3\pi$, $2(10\theta - \Phi) - 4\pi$, etc. at numeris reflexionum $2, 3, 6, 7$ etc. reſpondent ſequentes ipſius ζ valores $\pi - 2(3\theta - \Phi)$, $2\pi - 2(4\theta - \Phi)$, $3\pi - 2(7\theta - \Phi)$, $4\pi - 2(8\theta - \Phi)$ etc. Vnde colligitur, ſi numerus reflexionum quicunque datus, cuius index eſt n, ſit huius formae $1 + \frac{2(n-1)}{1} - \frac{2A(n-2)}{2} + \frac{4B(n-3)}{3} - \frac{8C(n-4)}{4} + \frac{16D(n-1)}{5} -$ etc. vbi $A = \frac{n-1}{1}$, $B = \frac{A(n-2)}{2}$, $C = \frac{B(n-3)}{3}$ etc., quam breuitatis gratia P vocabo, fore $\zeta = 2((1+P)\theta - \Phi - (n-1)\pi$. Si vero numerus reflexionum datus in hac forma $Q = 2 + \frac{n-1}{1} + \frac{2A(n-2)}{2} - \frac{4B(n-3)}{3} + \frac{8C(n-4)}{4} - \frac{16D(n-5)}{5} +$ etc. vbi $A = \frac{n-1}{1}$, $B = \frac{A(n-2)}{2}$, $C = \frac{B(n-3)}{3}$, etc. ſit contentus, et eius index $= n$, erit $\zeta = n\pi - 2((1+Q)\theta - \Phi)$.

 40. Vt

40. Vt igitur pro dato numero reflexionum angulus ζ inueniatur, videndum primo eſt, in qua forma datus numerus contineatur, et cui indici reſpondeat, quod facile perficitur, ſubſtituendo pro n numeros integros affirmatiuos 1, 2, 3, 4, 5 etc. Nam inuento tali modo indice et forma numeri reflexionum dati, angulus ζ, ex formulis paragrapho praecedente traditis, facillime reperitur, poſtquam anguli Φ et θ ex formulis tang. $\Phi = \sqrt{\frac{mm(p+1)^2-1}{1-mm}}$ et tang. $\theta = \frac{1}{p+1}$ tang. Φ determinati ſunt.

Exempl.

Sit numerus reflexionum datus $= 1$, erit $p = 1 = P$ et $\pi = 1$, quia numerus datus eſt formae P. Ergo $\zeta = 4\theta - 2\Phi$. At eſt pro radiis rubris $m = \frac{81}{108}$ et pro violaceis $m = \frac{81}{109}$. Erit pro radiis rubris $\frac{mm(p+1)^2-1}{1-mm} = \frac{14580}{5103}$ et pro violaceis $= \frac{mm(p+1)^2-1}{1-mm} = \frac{14363}{5320}$.

Pro radiis rubris

log. 14580 = 4.1637575	log. tang. Φ = 10.2279659
log. 5103 = 3.7078256	log. 2 = 0.3010300
log. $\frac{14580}{5103}$ = 0.4559319	log. tang. θ = 9.9269359
log. tang. Φ = 10.2279659	Ergo $\theta = 40°.12', 10''$
Ergo $\Phi = 59°.23'.24''$	
Hinc $\zeta = 42°.21'.42''$.	

Pro radiis violaceis

log. 14364 = 4.1572452	log. tang. Φ = 10.2156668
log. 5320 = 3.7259116	log. 2 = 0.3010300
log. $\frac{14363}{5320}$ = 0.4313336	log. tang. θ = 9.9146368
log. tang Φ = 10.2156668	Ergo $\theta = 39°.24'.18''$.
Ergo $\Phi = 58°.40'.52''$.	
Hinc $\zeta = 40°.15'.28''$.	

Exempl.

Exempl.

Sit datus numerus reflexionum $p = 2$, erit tang. $\Phi = \sqrt{\frac{9mm-1}{1-mm}}$ et tang. $\theta = \frac{1}{3}$ tang. Φ. Et quia numerus datus reflexionum in forma Q continetur, erit $p = Q = 2$ et $n = 1$, hinc $\zeta = n\pi - 2((1+Q)\theta - \Phi) = \pi - 2(3\theta - \Phi)$. Eſt vero pro radiis rubris $m = \frac{81}{108}$ et pro violaceis $m = \frac{81}{109}$ erit pro rubris $\frac{9mm-1}{1-mm} = \frac{47385}{5103}$ et pro violaceis $\frac{9mm-1}{1-mm} = \frac{47168}{5320}$.

Pro radiis rubris.

log. 47385 = 4.6756409	log. tang. Φ = 10.4839026
log. 5103 = 3.7078256	log. 3 = 0.4771213
log. $\frac{47385}{5103}$ = 0.9678153	log. tang. θ = 10.0067813
log. tang. Φ = 10.4839026	Ergo $\theta = 45°.26'.51''$.
Ergo $\Phi = 71°.49'.55''$.	

Hinc $\zeta = 50°.58'.44$

pro violaceis.

log. 47168 = 4.6736475	log. tang. Φ = 10.4738679
log. 5320 = 3.7259116	log. 3 = 0.4771213
log. $\frac{47168}{5320}$ = 0.9477359	log. tang. θ = 9.9967466
log. tang. Φ = 10.4738679	Ergo $\theta = 44°.47'.7''$.
Ergo $\Phi = 71°.26'.9''$	

Hinc $\zeta = 54°.9'.36''$.

Tabula,

Tabula, quae exhibet angulos incidentiae, refractionis, amplitudinis, pro datis numeris reflexionum, ab 1 vsque ad 8.

Pro radiis rubris

N. refl.	Φ	θ	ζ
1.	59°.23′.27″	40°.12′.10″	42°.1′.52″
2.	71.49.55	45.26.51	50.58.44
3.	76.50.16	46.54.40	138.35.12
4.	79.37.47	47.32.11	136.6.16
5.	81.25.40	47.52.22	51.37.4
6.	82.41.12	48.3.53	32.28.9
7.	83.37.14	48.11.23	116.12.20
8.	84.20.28	48.16.29	158.7.53

Pro radiis violaceis

N. refl.	Φ	θ	ζ
1.	58°.40′.52″	39°.24′.18″	40°.15′.28″
2.	71.26.9	44.47.7	54.9.36
3.	76.33.20	46.16.57	142.51.4
4.	79.24.30	46.55.29	130.25.50
5.	81.14.42	47.15.39	44.38.24
6.	82.32.55	47.27.39	40.46.44
7.	83.29.9	47.35.19	125.33.14
8.	84.13.19	47.40.3	169.34.16

41. Ex his iam facillime omnia, quae adhuc requiruntur ad Iridem pro dato reflexionum numero diſtincte cognoſcendam, deduci poſſunt. Nam ex datis angulis Φ et θ inuenitur ζ tam pro rubri, quam violacei coloris radiis, et ex angulis ζ, latitudo Iridis, ordo colorum et eius poſitio reſpectu oculi ſpectatoris,

toris, vti ſequentes tabellae repraeſentant. In his tabellis litera r deſignat colorem rubrum, v violaceum, et $\frac{r}{v}$ denotat, quod in Iride color ruber ſupremum, violaceus infimum teneat locum et vice verſa. S denotat locum ſolis, O locum oculi ſpectatoris et I locum Iridis, ita vt S. O. I ſignificet ſolem a tergo ſpectatoris eſſe, ſeu ſpectatorem debere inter ſolem et Iridem ſtare. At S. I. O denotat, Iridem medium locum inter ſolem et oculum ſpectantis tenere.

N. refl.	Latitudines Iridis
1.	1°.46′ 24″
2.	3. 10. 52
3.	4 27 52
4.	5 40 26
5.	6 58 40
6.	8 18 35
7.	9 20 44
8.	11 26 23

N. refl.	Ordo colorum	N. refl.	Ordo colorum
1.	$\frac{r}{v}$	5.	$\frac{r}{v}$
2.	$\frac{v}{r}$	6.	$\frac{v}{r}$
3.	$\frac{v}{r}$	7.	$\frac{v}{r}$
4.	$\frac{r}{v}$	8.	$\frac{v}{r}$

N. refl	Poſit. Irid.	N.r.	P. I.	N.r	P. I.	N.r.	P. I.
1.	S. O. I	3.	S.I.O.	5.	S.O.I	7.	S.I.O
2.	S. O. I	4.	S.I.O	6.	S.O.I	8.	S.I.O

42. Cum amplitudo Iridis ſinui anguli ζ ſit proportionalis, creſcente igitur ſinu anguli ζ, creſcit amplitudo Iridis et vice verſa, hoc eſt, Iris eo ſub maioris circuli arcu adparebit, quo maior erit ſinus anguli ζ. Erit ergo ampliſſima, quando $\zeta = \frac{1}{2}\pi$; nam tum ſit ſin. ζ maximus. Quo propius igitur angulus ζ ad

ad duos rectos accedit, eo *minor* euadit amplitudo Iridis. Omnes Irides, quorum angulus amplitudinis ζ maior eſt recto, in ea regione, in qua ſol verſatur, conſcipientur, eae vero quorum $\zeta < \frac{1}{2}\pi$ in regione oppoſita apparere debent. Si angulus ζ eſt $> \frac{1}{2}\pi$, et ſol in horizonte verſatur, Iris ſpeciem ſemicirculi, et ſi ille ad altitudinem ζ aſcendat, totius circuli imaginem refert. At exiſtente $\zeta > \frac{1}{2}\pi$, nunquam Iris maior ſemicirculo videtur, et creſcente altitudine ſolis, diminuitur; prorſus tandem diſparet, ſi ſol ad altitudinem ζ aſcenderit.

43. Duae igitur tali modo ſpecies Iridum ſtatui poſſent, altera vbi angulus $\zeta < \frac{1}{2}\pi$, altera quando ille $> \frac{1}{2}\pi$. Irides primae ſpeciei ita ſunt comparatae, vt creſcente altitudine ſolis arcus ille, ſub quo adparent, diminuatur. At ſecundae ſpeciei tales ſunt, vt arcus iſte creſcente altitudine ſolis augeatur; illae in regione ſoli oppoſita, hae vero in eadem, vbi ſol verſatur, conſpiciuntur. Commode characteres earum a numero reflexionum ſumi poſſunt. Nam omnes reflexionum numeri pro Iride primae ſpeciei in hac forma continentur $1 + \frac{n-1}{1} + \frac{2(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} - \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}$ $+ \frac{8(n-1)\ldots(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{16(n-1)\ldots(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{32(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \text{etc.}$ At pro Iride ſecundae ſpeciei in iſta $3 + \frac{n-1}{1}$ $+ \frac{2(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} - \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{8(n-1)\ldots(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ $- \frac{16(n-1)\ldots(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{32(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ etc. Vel ſi ponatur $1 - \frac{2(n-3)}{3} + \frac{(n-3)(n-4)}{3} - \frac{2(n-3)(n-4)(n-5)}{3\cdot 6}$ $+ \frac{2(n-3)\ldots(n-6)}{3\cdot 5\cdot 5} - \frac{4(n-3)\ldots(n-7)}{3\cdot 5\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{etc.} = R$, numeri

numeri reflexionum pro Iride primae ſpeciei in hac forma continebuntur: $n + (n-1)(n-2)R$, et pro Iride ſecundae ſpeciei in iſta: $2 + n + (n-1)(n-2)R$. Series iſta R ita continuatur; terminus antecedens multiplicatur per 2, ad numerum abſolutum vltimi factoris in numeratore additur vnitas, per hunc nouum factorem terminus praecedens multiplicatur et diuiditur per numerum abſolutum in nouo iſto factore contentum *v. g.* vt inueniatur terminus $\frac{2(n-7)(n-4)(n-5)}{3 \cdot 5}$, eius praecedentem $\frac{(n-3)(n-4)}{3}$ multiplico per 2 et habeo $\frac{2(n-3)(n-4)}{3}$, ad numerum abſolutum vltimi factoris $n-4$ addo vnitatem, et obtineo nouum factorem $n-5$, per $n-5$ multiplico numeratorem, et per numerum eius abſolutum 5 denominatorem, et prodit terminus ſequens $\frac{2(n-3)(n-4)(n-5)}{3 \cdot 5}$. Ita ſi velis ſcire numerum reflexionum pro Iride primaria, pone $n = 1$, pro ſecundaria $n = 2$ et ita porro.

44. Iris primaria primae ſpeciei ſaepe in coelo conſpicitur, ſecundaria vero raro, at de tertiaria dubito, num eam aliquis obſeruauerit. Ea oritur poſt quinque reflexiones et ſex refractiones. Celeberrimus *Muſchenbroekius* ait, in Lapponia obſeruatam fuiſſe, inter ſecundariam et primariam ſitam, iisque non concentricam. Sed eam obſeruationem ſuſpectam eſſe ex eo patet, quod omnes Irides in eadem regione coeli conſpicuae ſunt inter ſe concentricae, nam axes conorum in quibus videntur, per centrum ſolis et oculum ſpectatoris tranſeunt, ita vt omnes iſti coni vnum eundemque axem habeant, praeterea Iris haec eſt fere eptem gradus lata, et angulus amplitudinis eius vno

 tantum

tantum dimidio gradu angulum amplitudinis ſecundariae excedit, quam ob rem cum ſecundaria confundi debet, ita vt ſecundaria ſupra tertiariam depingatur. Sed et in eo celeberrimus vir peccare videtur, quod aſſerit, eam poſt tres reflexiones oriri debere.

45. Quod attinet ad Irides ſecundae ſpeciei, eae propter ſolis ſplendorem videri non poſſunt. Haec ſpecies Iridum obſeruari ſolet noctu circa lumen candelarum, praeſertim in Balneis et aliis locis vaporibus aqueis valde inquinatis. Poteſt etiam talis Iris ad ſolis ſplendorem obſeruari, ſi poſt eam exiſtat aliquod aedificium non multum luminis reflectens.

DESCRIPTIO

DESCRIPTIO AC EXPLICATIO
NOVORVM QVORVNDAM EXPERIMENTORVM ELECTRICORVM.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

§. 1.

Transmiſerunt ad Academiam, A. R. S. 1755. Reuer. Patres Soc. I. qui *Pekini* commorantur, praeter alia, experimenti quoque cuiusdam electrici, ab ipſis inſtituti, hiſtoriam, cuius ſumma huc redit:

Lamina ex vitro cryſtallino conſtans, ſupra chartam aliquoties complicatam poſita, pelle ouina pilis orbata, tamdiu fricabatur, vsquedum electricitatem ſat fortem conſecuta eſſet. Adplicabatur tum haec lamina pyxidi ligneae, vitro tectae, acum magneticam, obſeruandae declinationi adaptatam, continenti, ea ratione, vt vitrum, quo capſula cooperta erat, fere contingeret; quo facto ſequentia obſeruabantur phaenomena:

1) Acus magnetica, libere ſtilo ſuo incumbens, ad vitrum pyxidem tegens confeſtim ſurſum abrepta, laminae huic quaſi agglutinabatur, ac vltra 2 vel 3 horas conſtanter adhaerebat.

2) Poſt hocce temporis interuallum acus ſponte decidebat, non vero paulatim, ſed cum impetu quodam, et poſt aliquot vibrationes ſuper ſtilo ſuo factas, ad quietem ſitumque conſuetum redibat.

 3) Attol-

3) Attollebatur tunc lamina pyxidi impoſita, et dicto citius acus denuo ſurſum rapiebatur, vitroque, quo pyxis tecta erat, denuo agglutinabatur, nec ante 2 vel 3 horarum decurſum decidebat. Quodſi vero

4) interea lamina primum commemorata denuo pyxidi imponebatur, ſtatim acus recidebat, confeſtim vero rurſum attrahebatur, denuo ſublata lamina. Ita ſemper eueniebat, quoties lamina pyxidi vel admouebatur, vel attollebatur, ac vel centies repetere hoc experimentum licebat.

Mirandi iure ſunt, quos hic recenſent Rev. Patres electricitatis effectus. Admodum enim paradoxum videtur, quod electricitas, quae poſt longioris temporis decurſum penitus exſtincta videbatur, momento quaſi, idque ſine vlla noua frictione, aut excitatione, per ſolam laminae a pyxide remotionem, reſuſcitata fuerit; quodque iunctis denuo vitris ſtatim rurſus exſtingui potuerit.

§. 2. Quam primum experimenti huius ad me peruenit notitia, perſpexi ſtatim, mirabiles ipſius euentus ſponte quaſi, ex Theoria Electricitatis *Francklinianae*, (quae, quod nulli hypotheſi innitatur, ac vnica ſit, quae phaenomenis ex aſſe ſatisfacit) mea quidem ſententia ſola vera exiſtimanda eſt, profluere, atque ex ipſa tam clare concipi, vt omnes, quae experimentum comitantur, circumſtantiae, vel a priori innoteſcere potuerint. Excitatus proinde fui, ad rem vlterius tam ratiociniis, quam nouis quibusdam, quae imaginatus ſum, experimentis, examinandam, qui labores cum

memoria

memoria non prorſus indigni videantur, ſcripto comprehendere ipſos conſtitui.

§. 3. Recenſionem primum experimentorum inſtituam, quibus obſeruationes Rev. Patrum occaſionem praebuerunt, quo poſtea, quae de cauſa horum phaenomenorum meditatus ſum, eo melius explicare queam. Sunt autem, a me inſtituta experimenta, ſequentia:

Exper. I.

Repetendum mihi videbatur experimentum Pekinenſe, quapropter laminam vitream A B, fulcris ligneis C, D, pollicem circiter altis, impoſui, ac aliquid pulueris leuioris infra laminam hinc inde diſperſi. Accepta tunc altera lamina, priori ſimili, attritu panni lanei electricam hanc feci, ac ſupra priorem poſui. Obſeruaui tunc Tab. VIII. Fig. 1.

1) per aliquot minuta, puluerem infra laminam diſperſum attrahi ab ipſa, atque repelli, vti fieri ſemper ſolet, ſi corpus electrificatum pulueri appropinquatur.

2) Elapſo hoc tempore electricitatem penitus exſtingui, vt nulla vlterius attractio, aut repulſio, ſit obſeruabilis.

3) Separaui tunc laminam electrificatam a lamina A B, ſtatimque, dum hoc fieret, reſuſcitabatur electricitas, lamina A B denuo conſuetas attractiones ac repulſiones electricas exercente.

4) Ceſſantibus etiam his phaenomenis, admota denuo lamina electrificata ad laminam A B, totum hacte-

hactenus deſcriptum experimentum, non accedente noua frictione, aliquoties repeti potuit.

Exper. II.

Ipſam laminam AB electricam factam, poſui ſuper fulcra C, D, vbi conſueto more in puluerem agebat. Ceſſante hac actione, quod poſt aliquot minuta fiebat, laminam digito, aut alio corpore non per ſe electrico, in ſuperiori ſuperficie contingebam, ac reſuſcitabatur electricitas, ea in regione, qua tangebatur lamina, ſic vt lamina conſueta electricitatis ederet phaenomena, puluerem ſubſtratum attrahendo et repellendo.

Exper. III.

Tab. VIII. Fig. 2. Regulae orichalcicae AB, vitreis fulcris impoſitae, iuxta quam pendebat libere filum lineum madefactum CD, admoui tubum vitreum, aut cylindrum ex ſulphure fuſum, electrificatum, ab extremitate A, ad diſtantiam 10 aut 12 pollicum, ac

1) obſeruaui, filum lineum ſtatim attrahi a regulae extremitate B; per aliquot momenta huic cohaerere, mox vero ſeparari, ac in ſitum verticalem redire.

2) Si tunc tubum per aliquot pollices propius admouebam, denuo idem eueniebat, ſicque experimentum repeti aliquoties poterat, vsquedum tubus, extremitatem regulae fere contingebat.

3) Lente tunc retrahebam tubum per aliquot pollices, ac filum denuo attrahebatur, mox vero ad ſitum verti-

verticalem redibat. Vlterius remoto tubo idem rurſus eueniebat, vnde etiam hoc phaenomenon aliquoties obſeruare licebat, vsquedum tubus ad diſtantiam initialem 10 aut 12 pollicum rurſum remotus erat.

Exper. IV.

Loco fili linei, hactenus vſurpati, ſuſpendebam particulam ſuberis vtcunque ſphaericam, magnitudinis lenticularis, ex filo tenuiſſimo ſerico, probe exſiccato, ac inſtituto, vt prius, experimento, admotoque tubo vitreo electrificato ad extremitatem regulae A, in diſtantia 10 circiter pollicum Tab. VIII. Fig. 3.

1) pendulum CD attrahebatur ab extremitate B, ſtatim vero rurſus ab ipſa ſeparabatur, neque. vt filum lineum, ad ſitum verticalem redibat, ſed vltra ipſum repellebatur.

2) Tubo vitreo propius admoto, repulſio conſtanter augebatur, retracto vero tubo rurſum imminuebatur, vsquedum vltra 10 pollices, ſiue diſtantiam initialem, remotus eſſet, tum enim tandem repulſio mutabatur in attractionem, pendulum vero attractum a regula ſtatim rurſus ſeparabatur, ac in ſitum verticalem redibat, vlterius neque attractum, neque repulſum. (a)

Exper.

(a) Magna in hoc ac ſequenti experimento cautio adhibenda eſt, ſi rite ſuccedere debeant. Praecipue cauendum eſt, ne anguli ſolidi, a planis regulam terminantibus, incluſi, ſint admodum acuti, ſed ſi fieri poſſit aliquantum rotundati. Si hoc non attenda-

Exper. V.

Idem experimentum inſtitui, adhibendo cylindrum ſulphureum, loco tubi vitrei, et omnia eueniebant, vt in experimento praecedente.

Exper. VI.

Regulae orichalciceae ſaepius dictae, prope quam ſuſpenſum erat pendulum deſcriptum, admouebam tubum vitreum electrificatum, ad diſtantiam 3 vel 4 pollicum, ab extremitate A, ſimul vero extremitatem B digito contingebam. Retracto tum primum digito

1) Pendulum nec attrahebatur, nec repellebatur. Remoto autem quoque tubo, ſtatim attrahebatur, ac poſtea repellebatur.

2) Cum tubum rurſus admouebam, continuo decreſcebat repulſio, vsquedum tubus fere ad diſtantiam initialem denuo admotus eſſet. Poſtea repulſio tranſibat in attractionem, qua facta pendulum rurſus repellebatur.

3) Retrahebam tunc tubum, et ſucceſſiue repulſio rurſus imminuebatur, ac in attractionem mutabatur, qua facta pendulum denuo repellebatur.

4) Sub-

attendatur, poſtquam facta ſunt, quae num. 2. praecepi, non omnis repulſio ceſſat, ſed pendulum, poſt vltimam attractionem, aliquantum, debiliter tamen, repellitur. Rei huius rationem infra tradam. Optimum eſſet, adhibere huic experimento, loco regulae, cylindrum laeuigatum metallicum, hemiſphaerio, eiusdem cum cylindro baſeos, vtrinque terminatum.

4) Subſtituebam tunc cylindrum ſulphureum tubo vitreo, ac obſeruabam, admoto eo, vti in num. 2. cum tubo vitreo factum erat, repulſionem eo magis creſcere, quo magis admotus erat cylinder, decreſcere vero, quo magis remouebatur.

Exper. VII.

Repetito eodem experimento, ſed loco cylindri vitrei, ſulphureo in vſum vocato, euentus quoad num. 1 et 2 prorſus idem manebat. In num. 3 vero tubus vitreus idem praeſtabat, quod cylinder ſulphureus in antecedente.

Exper. VIII.

Dum pendulum in experimento IV a regula repellebatur, repellebatur quoque a tubo vitreo electrificato ipſi admoto, attrahebatur vero a cylindro ſulphureo. Contrarium fiebat in experimento V.

Exper. IX.

In experimento VI, dum pendulum repellebatur a regula, ſub circumſtantiis num. 1. adductis, repellebatur a cylindro ſulphureo, attrahebatur a vitreo. Sub circumſtantiis num. 2. repellebatur a vitreo, attrahebatur a ſulphureo. Sub circumſtantiis num. 3. vero rurſus a ſulphureo repellebatur, a vitreo attrahebatur. In experimento VII ſemper contrarium accidebat.

Exper. X.

Tubum vitreum electrificatum admoui extremitati fili orichalcei, craſſitiei, qualis eſt calami anſerini,

quod ex altera parte acuminatum erat, ac cuſpide ſua intrabat in campanam vitream, aere vacuam. Admoto tubo, erumpebant ex cuſpide, larga materiae electricae flumina, lucentia, diuergentia, ac ad diſcum metallicum, cui impoſita erat campana, progredientia. Retracto tunc tubo, cuſpis denuo lucebat, non autem tam larga luce, ſed multo minori, ſcintillam viuidam quaſi referente.

Exper. XI.

Loco tubi vitrei in praecedente experimento, adhibui ſulphureum, qui eadem producebat, aſt ordine inverſo, phaenomena; admoto nempe cylindro ſcintil.a, remoto ipſo, larga, de quibus locutus ſum, flumina adparebant.

Exper. XII.

Summo apici barometri lucentis admoui cylindrum vitreum, aut ex ſulphure fuſum, electrificatum, ad diſtantiam 8 circiter pollicum. Obſeruaui tunc

1.) Spatium a mercurio vacuum viuido lumine totum repleri, quod vero mox exſtinguitur.

2.) Promoto vlterius tubo verſus barometrum vno alteroue pollice, denuo ſimile fulgur videri.

3.) Repeti poſſe hoc experimentum, vsquedum cylinder barometro fere contiguus ſit factus.

4.) Retracto tum tubo per aliquot pollices, barometrum denuo lucem edere, idemque fieri repetitis vicibus, vsquedum cylinder ad 7 vel 8 digitos a barometro remotus eſſet.

4.) Ex-

4.) Fxperimenta haec omnia ex Theoria Electricitatis *Franckliniana* optime explicari poſſunt, ac tanquam totidem probationes veritatis huius theoriae, cum qua tam apte conſentiunt, habenda ſunt. Quo hoc commonſtrem, opus erit, vt quid euenire debeat ſecundum hanc theoriam, ſi duo corpora, quorum vnum eſt electrificatum, alterum in ſtatu naturali conſtitutum, ſibi inuicem appropinquantur, generatim prius exponam. Supponamus igitur corpori B in ſtatu naturali conſtituto, nullumque corpus non per ſe electricum immediate contingenti, appropinquari corpus A, quod itidem non niſi fluidi electrici quantitatem naturalem continet. (*b*) Cum particulae corporeae, quae corpus A conſtituunt, materiam electricam in B contentam attrahant; particulae vero fluidi electrici in A contenti, aequali vi ipſam repellant, ob vires ſe mutuo deſtruentes nullus effectus producitur Sumatur autem in A fluidi electrici copia vltra naturalem augeri, ac ob auctam repulſionem, quae in B continetur materia electrica, a ſuperficie *ab*, propelli debet, verſus ſuperficiem *cd*, ex qua, ſi nullum adſit impedimentum, libere emanabit; ſi vero huic effluxui obex ponatur, quod fit, ſi corpus B vbiuis aere; aut corpore quocunque alio per ſe electrico, quae quippe admodum difficulter materiam electricam in ſe recipiunt, contingatur; fluidum electricum verſus *cd* pro-

Tab. VIII. Fig. 4.

Fig. 5.

(*b*) In figuris, quae huc pertinent, corpus, aut corporis pars, lineis ſe interſecantibus denigrata, indicat fluidum electricum ibi abundare; punctis notata, deficere; omnino alba, exacte adeſſe copiam naturalem huius fluidi.

propulſum, ac cedere neſcium, comprimetur. Circa *ab* itaque fluidi electrici copia imminui, circa *cd* vero augeri debet, vnde corpus B, eum, quem exhibet Fig. 5. ſtatum aſſumere debet, i. e. inter *ab* et lineam quandam *ef* fluidum electricum minorem, inter *ef* vero et *cd* maiorem acquirere debet denſitatem, quam in ſtatu naturali, vbi aequaliter adhuc per totum corpus diſtributa erat, habuerat. (*c*)

5) Si iam ſuperficies *cd* a corpore quodam non electrico contingatur, aut quod eodem recidit, aer ipſam contingens remoueatur, vtroque caſu, materia electrica in parte *efcd* accumulata, ſe vel in corpus contingens, vel per vacuum, in proxima corpora non per ſe

(*c*) Si rem exactius conſideremus, facile concipimus, denſitatem fluidi electrici in corpore B contenti fore difformem, ita, vt ſi Tab. VIII. Fig. 14. recta *bd* craſſitiem corporis B repraeſentet, ac huic applicentur in quouis puncto *r* ordinatae *rs*, differentiae, quae intercedit inter denſitatem, quam habet in eo corporis loco cui punctum *r* reſpondet, materia electrica, ac denſitatem naturalem, proportionales, cadentibus ordinatis negatiuis verſus ſiniſtram, poſitiuis verſus dextram; ſint puncta omnia *s* in curua quadem *qsfp*, rectam *bd* alicubi vt in *f* interſecante, eaque proprietate donata, vt ſit ſpatium *bqf* aequale ſpatio *fdp*. Naturam huius curuae hactenus determinare non licet ſpecialius, nec licebit, niſi tam felices ſint aliquando naturae ſcrutatores, vt legem, ſecundum quam creſcunt ac decreſcunt repulſiones et attractiones electricae, detegant. Id interim facile patet, quo maior ſit intenſitas repulſionis, eo magis ſimul creſcere ordinatarum magnitudinem, punctumque interſectionis propius ad *d* accedere. Sed inquiſitionibus huiusmodi, cum in hac noſtra diſquiſitione parum praeſtare queant vtilitatis, immorari. conſultum non duco. Sufficit, breuiter haec monuiſſe, ſimulque in iis, quae hic, ac in ſequentibus protuli, me ſummam ac geometricam exactitudinem, prouti hic inutilem, non quaeſiuiſſe, lectoribus indicaſſe.

ſe electrica., diſtribuere debet, vsquedum eiusdem ſit inibi denſitatis, quae eſt in corpore contingente. Tum igitur corpus eum adipiſcitur ſtatum, quem exhibet Fig. 6; pars nempe *abef* minorem, pars vero *efcd* eandem circiter continet fluidi electrici copiam, qualem in ſtatu naturali habuerat. Facile vero patet, ſi capiatur iam ſumma fluidi electrici, in hocce ſtatu in B contenti, minorem eam fururam eſſe, quantitate naturali. Quanquam enim in parte *efcd*, copia naturalis adſit, in altera tamen parte *abef* defectus datur, vnde aggregatum hoc, quantitate naturali minus, non eſſe non poteſt.

6) Si iam ſupponamus remoueri corpus A, ceſſabit omnis repulſio, vnde fluidum electricum libertatem rurſus nanciſcitur, aequaliter ſe per corpus B diſtribuendi. Cum igitur iam fluidi electrici copia naturalis in B ſit imminuta, facta aequali diſtributione, quaeuis pars minorem, quam quantitatem naturalem, continebit, ac corpus totum, in ſtatum Fig. 7. tranſibit, ſeu negatiue electricum euadet.

7) Conſiderauimus hactenus caſum, vbi in corpore A, fluidi electrici copia vltra naturalem aucta erat; ſi vero iam ſupponamus, imminui ipſius copiam, infra naturalem, euentus contrarii erunt priorum. Si nempe primum et corpus A, et corpus B, in ſtatu naturali ſupponuntur, attractionis, quam corpus A in fluidum electricum in B contentum exercet, effectus, a repulſione, qua materia electrica in A contenta, in eam, quae in B continetur, agit, deſtruitur. Sublata autem quantitatis fluidi electrici aliqua parte ex A, ſeu Tab. VIII. Fig. 4.

A, ſeu corpore hoc negatiue electrico facto, ceſſante tunc repulſione, materia electrica attractioni verſus ſuperficiem *ab* obtemperare debet. Oritur hinc vero ſtatus, quem exhibet Fig. 8.; in ſpatio nempe *abef* materia electrica condenſatur, in ſpatio *efcd* rarior euadit.

8) Si iam, poſteaquam B hunc ſtatum conſecutum eſt, ſuperficies *cd*, aut corpore non per ſe electrico contingatur, aut aer hanc ſuperficiem ambiens removeatur, priori caſu ex corpore ſuperficiem contingente, poſteriori ex corporibus propinquis non per ſe electricis, per vacuum, materia electrica, in partem *efcd* tamdiu tranſibit, vsquedum aequilibrium ſit reſtitutum, i. e. vsquedum, vti in Fig. 9, pars *efcd* fluidi electrici copiam rurſus naturalem circiter nacta ſit. Hoc vero facto corpus B plus materiae electricae continere, quam in ſtatu ſuo naturali, manifeſtum eſt. Remoto itaque corpore A, vbi ob attractionem verſus *ab* iam ceſſantem, aequabilis fluidi electrici diſtributio per totum corpus facta eſt, in quauis parte corporis B, vti Fig. 10. exhibet, fluidum electricum abundabit, ſeu totum corpus poſitiue electricum euadet.

9) Supra a me expoſita phaenomena, ex hactenus explicatis, feliciſſime deducuntur, nec vllum occurrit inter ipſa, cui cauſa ſufficiens aſſignari non poſſet. Brevis principiorum ad experimenta adplicatio luculenter hoc commonſtrabit; antequam vero tradere hanc aggrediar, in mentem hic lectoribus reuocandum erit, quod aliunde iam ſatis conſtat, nec cuidam cui experimenta electrica ſatis ſunt familiaria, ignotum erit,

1) Cor-

1) Corpora duo, quorum vtrumque eſt vel poſitiue, vel vtrumque negatiue electricum, ſe inuicem repellere; quae vero heterogeneam habent electricitatem, ſe mutuo attrahere. (d)

2) Vi-

(d) Quaeſtio hic oritur, an nunquam homogenee electrica ſe attrahant? ad quam omnino affirmatiue reſpondendum eſt. Propoſitionem enim meam non intellectam volo, niſi de eo caſu, vbi duo iſta corpora habent electricitatem aut poſitiuam, aut negatiuam, in gradu non admodum inaequali. Dari poſſe, niſi haec conditio adſit, inter homogenee electrica etiam attractionem, tam ex obſeruationibus conſtat, quam ſequenti demonſtratione euincitur. Sit gradus electricitatis in corpore A $= a$, in B $= b$, et repulſionis inter haec corpora quantitas $= \varphi$. Conſtat iam per experientiam, ſi $a = b$, dari repulſionem, ſi vero a manente conſtante, b imminuatur vsque ad o, repulſionem mutari in attractionem. Si itaque b ab a ad o vsque decreſcat, decreſcit interea φ a valore poſitiuo in ſui negatiuum, ſeu contrarium. Neceſſe igitur eſt vt inter iſtos 2 valores φ, quorum alter reſpondet $b = a$, alter $b = o$, fiat φ aliquando $= o$, vnde datur neceſſario valor quidam ipſius b, cadens inter a et o, cui $\varphi = o$ reſpondet. Sit hicce valor $= c$, ac pro omnibus valoribus ipſius b, qui cadunt inter c ac o, dabitur attractio. Interim, cum corpora heterogenee electrica ſe ſemper attrahant, totum ex repulſione formatur iudicium, an duo corpora ſint homogenee electrica. Vera enim eſt ſine exceptione propoſitio: quae ſe repellunt, ſunt homogenee electrica; aſt dantur caſus, vbi falſa eſt eius conuerſa: quae homogenee electrica ſunt, ſe repellunt.

Addo iam, dum ſub prelo ſudat haec diſſertatio, me phaenomeni, de quo hic loquor, cauſas, atque vniuerſam attractionis et repulſionis electricae theoriam, in ſecundo capite *Tentaminis mei Theoriae electricitatis et magnetiſmi* explicaſſe, ad quem itaque librum lectores ablegandi ſunt.

2) Vitrum, (*e*) corporaque huius generis, frictione, poſitiuam, ſulphur vero, caeteraque corpora reſinoſa, negatiuam adquirere electricitatem.

§. 10. Facile iam concipitur, cur in experimento *Pekini* inſtituto, dum tabula cryſtallina frictione electrificata, pyxidi magneticae imponebatur, acus magnetica, ſurſum rapi debuerit. Manifeſtum enim eſt, ex §. 4. vitri, quo pyxis cooperta erat, ſuperficiem inferiorem poſitiue electricam factam fuiſſe, vnde corporis poſitiue electrici edere phaenomena, acumque attrahere debuit. Attractionem hanc ſequi debuiſſet repulſio, ſed obſtitit tam acus magnitudo, quam paruus punctorum, in quibus acus laminam contingebat, numerus, quo minus hoc ſtatim fieret. Ob figuram enim acus, ac praecipue, ob impoſitum ipſi capitellum, non niſi in duobus punctis *a* et *b*, laminam contingere potuit. Tab. VIII. Fig. 9 Tranſiit itaque in acum primo quidem ſtatim momento, quae circa *a* et *b* haerebat, abundans materia electrica; ſed quantitas iſta iuſto minor erat, quam vt totam acus ponderoſae maſſam, ad repulſionem vsque, electricam reddere potuiſſet. Conſtanter itaque acus attrahi debebat, vsquedum ſufficientem electricitatis gradum nacta eſſet, quem vero non niſi admodum lento gradu, conſequi potuit. Cum enim materiam electricam non niſi per puncta A et B recipere poterat, neceſſe erat, vt materia electrica ex caeteris laminae parti-

(*e*) Intelligendum hic eſt vitrum politum. Attritum nempe, vsque dum polituram ac pellueiditatem amiſerit, (mattgeſchliffen Glas) vt ex Cantoni experimentis conſtat, frictione ordinario modo inſtituta, fit negatiue electricum.

partibus, in viciniam punctorum A et B, inde vero in acum ipſam, tranſiret. Conſtat autem, cum vitrum ſit corpus per ſe electricum, fieri hunc tranſitum materiae electricae, ex vna ipſius parte in alteram, admodum difficulter, lentoque gradu. Mirum itaque non eſt, ſat longum tempus, et vel duas horas, neceſſarias fuiſſe, antequam acus ad repulſionem vsque electrica facta fuerit. Poſtquam autem hunc gradum tandem conſecuta eſſet, cum impetu, vti factum eſt, repelli debebat; ſic enim ſemper fieri ſolet, ſi corpus electricum, alia, quibuscum ſuam communicauit electricitatem, repellit corpora.

§. 11. Abrepta autem eſt interea inſignis fluidi electrici, ad ſuperficiem vitri pyxidem tegentis inferiorem propulſi, copia, dum partim in acum, partim lente in latera ac fundum pyxidis tranſiit, vnde, quod ex §. 5. patet, ſublata iam lamina pyxidi impoſita, vitrum pyxidem tegens negatiue electricum factum eſt. Attrahebat hinc denuo acum, quae repelli rurſus antea non poterat, quam notabilem amiſiſſet fluidi electrici copiam. Fieri autem hoc iterum non poterat, niſi admodum lente, cum tranſitus materiae electricae ex acu in vitrum per duo ſolum puncta *a* et *b* fieri poſſet, ac nunquam materiae electricae per vitrum diſtributio velox eſſe queat.

§. 12. Si vero interea lamina electrica pyxidi rurſum imponebatur, ob accedentem denuo repulſionem, pyxidem tegens vitrum in ſtatum, quem habuerat, antequam lamina remoueretur, reuerti debebat. Cum igitur in inferiorem ipſius ſuperficiem, materia ele-

ctrica rurſus condenſaretur, haec electricitatem negativam amittebat, acumque vlterius retinere non poterat. Exſtincta hinc videbatur electricitas, facile vero, ſublato vitro electrico, ablataque cum eo repulſione, reſuſcitari quaſi poterat.

§. 13. Coincidit cum hoc experimento, eorum, quae a me inſtituta ſunt, primum; quae enim hic occurrit diuerſitas, non niſi ex eo ortum trahit, quod, loco acus ponderoſae metallicae, puluerem leuiorem vitro ſubſtraueram. Quaeuis nempe pulueris huius particula, ob minimam materiae in ipſo contentam copiam, momento citius, ad primum laminae contactum fluido electrico replebatur, vnde ſtatim repulſa, ad tabulam, ſupra quam experimentum inſtituebatur, reverti debebat. Diſtributa autem in hancce materia electrica, in pulueris particula abundante, haec ſtatum naturalem mox acquirebat, vnde denuo attrahebatur, vsquedum poſt varios puluiſculi cuiusuis itus atque reditus, tanta materiae electricae, ad inferiorem vitri ſuperficiem propulſi, ablata eſſet copia, vt haec non niſi proxime quantitatem naturalem contineret, quo facto omnia phaenomena ceſſare debuerunt. Praeterea in toto hoc experimento nihil eſt, quod non iam antea ſufficienter ſit explicatum.

§. 14. Omnino rurſus ſimile eſt prioribus experimentorum meorum tertium, vbi loco laminae vitreae, regulam orichalceam, fulcris vitreis impoſitam, vſurpaui. Admouebam huic:

1.) cylindrum vitreum electrificatum, verſus extremitatem A, ad diſtantiam 10 circiter pollicum; mate-

materia itaque electrica verſus extremitatem B propulſa (§. 4.) poſitiue electricam hanc reddebat, quapropter filum lineum attrahebatur. Adhaerebat autem regulae hoc filum, vsquedum per iſtud, quae in extremitate B abundabat, materia electrica, eo ſe gradu diſſipare ac diffluere poterat, vt ipſa non niſi fluidi electrici quantitatem naturalem vlterius contineret, quo facto omnis ex electricitate actio ceſſabat, et filum in ſitum verticalem reuertebatur. Admoto tum

2) vlterius tubo ad diſtantiam v. c. 8 pollicum, creſcente tum repulſione, (creſcere enim repulſionem, vt et attractionem electricam, cum decreſcente diſtantia, ſatis conſtat, quanquam, ſecundum quam diſtantiae functionem fiat hoc incrementum, detectum nondum ſit) materia electrica denuo verſus B propellebatur; vnde eadem, quae antea, phaenomena oriri debebant, quae toties repeti poterant, quoties, admoto adhuc propius tubo, repulſionis intenſitas denuo augebatur. Retracto autem iam

3) tubo per aliquot pollices, quoniam in tota regula electrici fluidi copia infra naturalem imminuta erat, (§. 5.) ac ob decreſcentem tum repulſionem, materia electrica, in regula contenta, ſe expandendi libertatem nacta erat, ex parte verſus A ſe diſtribuere debebat. Cum igitur extremitas B ſic aliquid quantitatis naturalis amitteret, negatiue electrica haec facta, filum attrahebat. Tam diu autem regulae hoc cohaerebat, vsquedum per ipſum affluere tanta materiae electricae copia in laminae extremitatem B rurſus poterat, vt haec ſtatum naturalem nanciſceretur. Hoc

vero facto, vlterius nulla dabatur ex electricitate in filum actio. Plane idem accidebat toties, quoties tubus vlterius remouebatur, vnde, cur repeti potuerit experimentum, ſatis patet.

§. 15. In hoc experimento, ſi loco tubi vitrei, ex ſulphure fuſum cylindrum adhibebam, euentus inde plane non mutabatur. Aſt inde ad explicationis identitatem concludi non poteſt. Attritus enim cylinder ſulphureus, non, prouti vitreus, poſitiuam, ſed negatiuam, adipiſcitur electricitatem. Oppoſitum itaque hic habemus, prioris caſum, nec experimenti huius explicatio, ex principiis hactenus vſurpatis, ſed ex iis, quae §. 7 et 8 expoſita ſunt, petenda eſt. Fit autem hoc tam facile, vt nemini, qui hactenus propoſita nota ſibi reddiderit, negotium faceſſere queat, vnde labore hoc me ſuperſedere poſſe exiſtimo.

§. 16. In experimento IV, vbi loco fili linei, particulam ſuberis, ex filo ſerico ſuſpenſam, adhibebam, ea ſolum ex ratione euentus aliquantum diuerſus prodibat, quod pendulum ipſum electricitatem aſſumere, ac aſſumtam conſeruare poterat, id quod in filo lineo locum non habebat. Poſtquam itaque per repulſionem a tubo vitreo, regulae admoto, exercitam, extremitas B poſitiue electrica facta fuerat, pendulum attrahere, ſtatim vero cum ipſo electricitatem ſuam communicare, hinc ipſum repellere debebat. Admoto tum tubo propius, creſcebat repulſionis intenſitas, atque fluidum electricum tunc vi maiori verſus B vrgebatur, vnde magis ibi condenſatum, maiori ſemper vi pendulum repellebat.

pellebat. Retracto vero aliquantum tubo, ac decreſcente tum repulſione, fluidum electricum libertatem, ſe magis aequabiliter diſtribuendi, rurſus nanciſcebatur, vnde eius denſitas circa B aliquantum decreſcebat, ſimul vero intenſitatis vis, quacum pendulum repellebatur, minor fiebat. Remoto autem tubo ad diſtantiam longiorem, fluidum electricum, plenariam tum libertatem nactum, omnino, aut quam proxime ſaltem aequabiliter, per totam regulam ſe rurſus diſtribuebat, vt ſic extremitas B omnem fere electricitatem poſitiuam amitteret. Interea autem, quam ſemel acquiſiuerat, pendulum electricitatem conſeruabat, vnde ab extremitate B attrahebatur. Facta autem hac attractione, ac materia electrica abundante ex pendulo in regulam diſperſa, omnis electricitas ceſſabat. (*f*) Si, vti in experimento V. feci, cylinder ſulphu-

(*f*) Si anguli ſolidi regulae iuſto acutiores erant, non omnino, vt antea iam indicaui, electricitas ceſſabat, ſed poſt vltimam attractionem pendulum rurſus repellebatur. Cauſam agnoſcit hoc phaenomenon proprietatem cuſpidum, de quibus conſtat, ſi in corpore materia electrica abundat, ſponte ex ipſis fluidum electricum, non obſtante aere circumfluo, ſe diſſipare, aut, ſi deficit, per ipſas intrare. Si itaque anguli ſolidi regulae acutiores erant, aliquid materiae electricae circa B abundantis per ipſos diffluebat, vnde tunc, retracto tubo, tota regula non in ſtatum naturalem, vti debuiſſet, reuertebatur, ſed negatiue electrica fiebat. Hanc itaque negatiuam electricitatem cum pendulo attracto communicabat, hincque iſtud repellebat. Vere quoque in hoc caſu pendulum, ſupra allegata ratione examinatum, poſt vltimam repulſionem, a cylindro ſulphureo repellebatur, indicio, omnino, vt dixi, negatiue electricum factum fuiſſe. Facile haec, mutatis, quae mutanda ſunt, adplicantur ad ſequens experimentum V.

ſulphureus loco vitrei adhibetur, eadem quidem oriuntur phaenomena, aſt non eſt eadem ratio, rurſus ex §. 7 et 8 petenda, vnde vero cuiuis vel primo intuitu patet. (g)

§. 17. Dum in experimento VI. regulae tubum admouebam, condenſabatur quidem materia electrica verſus extremitatem B, aſt contactus digiti anſam ipſi praebe-

(g) Obtulit ſe mihi, dum ſcripto haec comprehendebam, idea noui cuiusdam huc pertinentis experimenti. Supponatur tubus vitreus electrificatus, non regulae, ſed pendulo appropinquari, ac per ſuperius expoſita ſatis patet, ſi *abcd* ſit globus ex filo ſerico ſuſpenſus, propelli debere materiam electricam in ipſo contentam a *d* verſus *b*, vnde pars eius regulae obuerſa *adc* poſitiue electrica euadet. Attrahi itaque debet globulus a regulae extremitate B, quae eodem hoc momento, ob repulſionem, quam tubus electrificatus exercet, negatiue electrica facta eſt. Dum vero globulus attractus regulam contingit, materia electrica, in parte *abc* accumulata, per regulam diſpergitur. Fit itaque tum globulus negatiue electricus, ac fortiter a tubo attrahitur. Inſtituto periculo, euentum theoriae omnino conſentire obſeruaui, modo debita cum cautione inſtituantur experimenta. Neceſſe enim eſt, vt particula ſuberis filo appenſa ſit, quantum fieri poteſt, ſphaericae, aut ſphaeroidicae figurae, nulloſque habeat apices, aut angulos, per quos materia electrica diffluere poſſit. Praeterea in aere ſicco experimentum inſtituendum eſt, aer enim humidus facile aliquam materiae electricae, ex globulo propulſae, partem in ſe recipit. Vtroque caſu pendulum fit negatiue electricum, quamuis regulam non contigerit, vnde ſtatim a tubo attrahitur. Eſt autem tum nunquam non attractio admodum debilis, et longe inferior ea, quae fit, ſi pendulum prius a regula attractum ſit. Si cylinder ſulphureus adhibeatur loco vitrei, idem contingit, aſt contraria de cauſa, phaenomenon.

Tab. VIII. Fig. 10.

praebebat, ſe per digitum diſtribuendi, vnde in hac extremitate, non niſi circiter copia materiae electricae naturalis ſupererat. (§. 5) Remoto itaque digito, in pendulum nulla dabatur actio. Aſt remoto tum tubo, fluidoque electrico aequaliter per regulam nunc diſtributo, negatiue electrica haec fiebat, ac hancce electricitatem cum pendulo attracto, ſtatim vero repulſo, communicabat. Si tunc tubum denuo magis magisque regulae admouebam, materia electrica verſus B magis magisque rurſum condenſabatur, vnde negatiua electricitas extremitatis huius decreſcebat, immo tandem in electricitatem poſitiuam tranſibat, quare pendulum initio minus repellebatur, tandem vero attrahebatur, ac poſtquam eam, quam iam habebat extremitas B, electricitatem poſitiuam nactum eſſet, denuo repellebatur. Retracto tandem tubo, ob continuo imminutam repulſionem, contrario ordine, extremitatis B electricitas poſitiua imminuebatur, ac in negatiuam rurſus tranſibat, vnde omnino et penduli repulſio decreſcere, ac in attractionem tandem mutari, debebat.

§. 18. Si vero, poſtquam facta erant, quae in experimento dicto num. 1 praecepi, cylinder ſulphureus, loco vitrei, regulae admouebatur, ob cylindrum hunc negatiue electricum, fluidum electricum continuo magis a B verſus A attrahebatur, quo magis tubum admouebam. Creſcebat itaque in extremitate B electricitas negatiua, ſimulque penduli repulſio, remoto autem tubo, decreſcebat. Euentuum experimenti VII. cauſam concipere iam quiuis faciliime poterit; vnde

peculiarem eius explicationem, ne taedium moueam lectoribus, non addo.

§. 19. Veritatem explicationis meae inſigniter comprobant, ac extra dubium omnino ponunt, experimenta VIII. atque IX. Demonſtrant enim, vere tunc pendulum, aut poſitiue, aut negatiue, electricum fuiſſe, cum ſecundum theoriam hactenus propoſitam, aut hanc, aut illam electricitatem, nanciſci debuerat. Eſt enim optimus modus, examen, quamnam oppoſitarum electricitatum poſſideat pendulum, inſtituendi, is, quem hic adhibui, vt quoque iam ſupra §. 9. indicaui. Vlterius circa experimenta iſta nihil monendum habeo; quiuis enim lectorum facillime per ſe comparationem inſtituere euentuum, cum ſupra traditis, ac, qui vbiuis ſe manifeſtat, detegere conſenſum poterit.

§. 20. Quam maxime notanda quoque ſunt experimenta X, XI, ac XII, quae itidem cum theoria penitus conſpirant. Iam diu obſeruatum eſt, quemcunque materiae electricae, ex vno corpore in aliud fientem actualem tra ſitum, modo aliquali fiat cum celeritate ac violentia, cum luce ſemper, ſecundum circumſtantias, magis minusue viuida, combinari. Debemus autem *Francklino* et aliis detectionem legum, ſecundum quas lucis huius apparentia, prouti materia electrica ex cuſpide metallica vel effluit, vel in illam influit, variatur. Conſtat nempe, fluidum electricum, dum ex cuſpide effluit, conum luminoſum, dum influit non talem conum, ſed ſcintillulam ſolum quaſi quandam, cuſpidi inſidentem, ſiſtere. Suppoſitis his experimentum X. exactius contemplemur.

§. 21.

§. 21. Intrabat in hoc experimento cuſpis in ſpatium aere vacuum, vnde nihil hic aderat, quod liberum materiae electricae ex cuſpide effluxum, aut in ipſam influxum, impedire potuiſſet. Dum igitur extremo fili metallici alteri, extra campanam prominenti, admouebatur tubus vitreus electrificatus, materia electrica, verſus cuſpidem propulſa, ibi non, vt alias, condenſabatur, ſed libere emanabat, ſeque in corpus proximum non per ſe electricum, diſcum nempe metallicum, recipiebat. Imminuebatur autem neceſſario ſic fluidi electrici, in filo contenti, copia, vnde remoto rurſum tubo, fluidoque electrico aequaliter ſtatim diſtributo, filoque iam negatiue electrico facto, rurſus materiam electricam ex diſco metallico attrahebat. Obtemperare huic attractioni poterat fluidum electricum, ob aeris abſentiam, vnde in cuſpidem ſtatim influebat, filumque in ſtatum naturalem rurſus reducebat.

§. 22. Fieri autem non poterat vterque tranſitus, ſine ſatis ſenſibili luce, quae ſecundum ſupra monita, admoto tubo, ad coni luminoſi, (h) remoto autem

 eo

(h) Primo quidem intuitu, vix vlla inter hoc phaenomenon, ac conſuetum conum luminoſum, intercedere videtur ſimilitudo. Loco enim huius coni, conſpiciuntur 3, 4 vsque ad 6, raro plures, luminis tractus, vacuum percurrentes, quorum quiuis digiti fere habet craſſitiem. Aſt coincidere nihilominus vere hoc phaenomenon, cum ſaepius dicto cono, ſequenti ratione conſtare poteſt. Admoueatur primum tubus filo metallico, antequam aer rarefactus eſt, et videbitur conus immutatus. Exhauriatur tum aliqua, modica tamen, aeris pars, ac denuo admoto tubo videbitur,

eo, ad ſcintillulae ſimilitudinem accedebat. Euidens iam quoque eſt, cur cylinder ſulphureus eadem, aſt ordine inuerſo, produxerit phaenomena. Fiebat enim, vt facile cuiuis patet, cuſpis vacuum intrans, ordine inuerſo, negatiue primum, deinde vero poſitiue electrica. Pertinet huc quoque experimentum XII. cum barometro lucente inſtitutum, vbi, admoto tubo vitreo, ex tubuli barometrici interna ſuperficie in vacuum propulſa materia electrica in mercurium ſe recipiebat, remoto autem ipſo, rurſus ex mercurio in vitrum tranſibat. Idem hoc euenire debebat, ſed ordine inuerſo, dum cylindrum ex ſulphure fuſum, loco vitrei, barometro admouebam.

§. 23. Nihil hactenus ad explicationem experimenti ſecundi faciens attuli, ſed ea propter hoc factum eſt, quia, praeter principia ſupra expoſita, alia quaedam adhuc praemittenda ſunt, priusquam eius rationem reddere queam. Ponamus laminam vitream *abcd* atteri in ſuperficie *ab*, ac cum inde fluidi electrici in hac ſuperficie augeatur copia, repulſionem haec conſuetam exercens, ac per vitrum ſe ſtatim diſtribuere non valens, materiam electricam in vitro contentam verſus *cd* propellet, ac, ſi cedere illa nequeat, ipſam verſus haec

Tab. VIII. Fig. 12.

bitur quidem rurſus conus luminoſus, ſed ex paucioribus iam ac craſſioribus radiis conſiſtens. Pergendo tunc porro in euacuatione, continuo radiorum ex cuſpide diuergentium, conum luminoſum conſtituentium, numerus imminuitur, ac craſſities cuiusuis radii augetur, vsquedum tandem in phaenomenon ſupra deſcriptum degeneret.

hanc partem condenſabit. Tota itaque lamina in ſtatum, quem Fig. 12. exhibet, redigetur. Intra *ab* nempe et *ef* materia electrica condenſata, inter *ef* et *gb* rarefacta, inter *gb* vero et *cd* rurſus condenſata erit. Quodſi iam ſuperficies *cd* a corpore non electrico contingatur, materia electrica, repulſione coacta, in corpus hoc contingens tranſibit, vsque ad aequilibrii cum corpore contingente reſtitutionem. Ortum hinc trahet ſtatus laminae, quem Fig. 13. exhibet, vbi inter *ab* et *ef* materia electrica condenſata, inter *ef* ac *gb* rarefacta, inter *gb* vero ac *cd* in ſtatu circiter naturali conſtituta eſt. Idem hic ſtatus ſucceſſiue inducitur laminae, ſi ipſa puluerem leuiorem attrahat atque repellat.

§. 24. Si nunc lamina in ſuperficie *ab* a corpore non electrico contingatur, pars fluidi, in *abef* condenſati, in hoc corpus contingens ſe diſtribuet; vnde, ob imminutam repulſionem, hinc materiam electricam in parte laminae *efcd* magis aequabiliter diſtributam, ſuperficies *cd*, minimum in ea parte, vbi contingitur, negatiue electrica euadens, corpora leuiora ipſi vicina attrahere debet.

§. 25. Qui, quae hactenus propoſui, paulo attentius conſiderare voluerit, eximium theoriae *Francklinianae* cum phaenomenis conſenſum non mirari non poterit. Phaenomena, quae hic protuli, tam paradoxa atque complicata primo videntur intuitu, vt ſperare ſufficientem ipſorum explicationem vix liceat. Nihilo minus

ex duabus his proprietatibus materiae electricae, quod eius partes ſe inter ſe repellant, a reliqua vero materia corporea, in mundo reperiunda, attrahantur, tam clare deducuntur, vt de veritate explicationis dubitare non liceat. Eſt hoc inſigne veritatis priuilegium, quod quae inde per ratiocinia deducuntur, experientiae nunquam non conſona inueniantur, quapropter, cum nouum hic dederim ſpecimen, accidere hoc, vt alias ſemper ſolet, Theoriae *Francklinianae*, in nouis quoque hic prolatis phaenomenis, iure de veritate ipſius vlterius dubitari non poſſe, videtur.

OBSER-

OBSERVATIO OPTICA
DE
MVTABILITATE DIAMETRI APPARENTIS FORAMINIS ANGVSTI, OCVLO PROPINQVI.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

1.

Cum nuper in inſtituendo experimento quodam occupatus, obiectum quoddam, per foramen paruum, in tenui lamina plumbea factum, cuius diameter decima lineae parte vix maior erat, oculo ſiniſtro contemplarer, obſeruabam fortuito, foramen iſtud, ſi dextrum oculum clauderem, maius, ſi ipſum aperirem, minus, videri, ſic vt alternis vicibus, oculo dextro clauſo atque aperto, alternis etiam vicibus foraminis diameter creſcere atque decreſcere videretur.

2) Inſigne paradoxum videbatur, obiecti cuiusdam diametrum apparentem augeri aut minui poſſe, quanquam vera ipſius diameter non ſolum, ſed et diſtantia ipſius ab oculo inuariata perſiſteret. Vlteriori itaque inquiſitione dignum videbatur phaenomenon, quapropter aliquoties tentamen repetens, ad omnes circumſtantias diligentius attendebam. Obſeruabam tum non ſolum, deſcriptum modo phaenomenon ſemper locum habere, ſed et ſimul annotabam

α) cam-

α) campum viſionis, quem per foramen ſaepius dictum conſpiciebam, vna cum apparente foraminis diametro minui atque augeri, prouti oculus dexter vel claudebatur, vel aperiebatur.

β) Si oculum dextrum, mediantibus palpebris, clauderem, augebatur quidem tam foraminis, quam campi viſionis, diameter, quodſi vero tum manu oculum adhuc obtegebam, vlterius rurſum diameter augebatur. Etiamſi quoque palpebram non deprimerem, ſed manu ſolum oculum obtegerem, nihilominus augmentum diametri inſequebatur.

γ) Exacte quidem menſurare, quantum ſit hoc diametri incrementum, aut decrementum, difficile admodum expertus ſum, reperi tamen, cum foramen dimidium circiter pollicem ab oculo remotum erat, tabula vero, quam adſpiciebam, tres circiter pedes ab oculo diſtabat, ſi diameter circuli, qui per foramen conſpiciebatur, dum apertus erat oculus dexter, ponatur $= 1$, eſſe tum diametrum circuli, qui conſpicitur ſi oculus dexter, mediante ſolum palpebrae depreſſione, claudatur, maiorem, quam $1\frac{1}{4}$, ſi vero manu praeterea oculus adhuc obtegatur, fieri tum diametrum hanc notabiliter adhuc maiorem, ita vt ſit fere $= 2$.

3) Quo cauſam phaenomeni ſatis iam deſcripti eruerem, operam dedi, vt, quanta eſſe debeat campi viſionis per foramen rotundum, oculo propinquum, diameter, inueſtigarem. Suppoſui itaque in figura adiecta,

recta, rectam AG deſignare oculi axin, BC diametrum pupillae, DF diametrum foraminis, IH vero denotare planum quoddam, ad axem viſionis AG perpendiculare. Facile iam patet, ſi per puncta B, et F ducatur recta BF, atque producatur vsque ad planum IH, cui in H occurrit, puncta omnia, inter G et H ſita, depingi debere in oculo, quae vero vltra H diſſita ſunt ab axe viſionis, ſui imaginem in oculi fundum proiicere non poſſe. Luminis enim radii, a puncto eiusmodi vltra H ſito emanantes, ac per foramen DF tranſeuntes, omnes prope pupillam tranſeunt, neque ipſam intrant, a reliquis vero punctis inter G et H ſitis exeuntes radii, minimum ex parte, a pupilla excipiuntur. Erit itaque recta GH, campi apparentis in plano IH diameter dimidia. Quodſi iam ponatur $AG = a$, $AE = b$, $AB = \omega$, $EF = r$, erit primum $AB + EF : AE = AB : AN$, hinc $AN = \frac{\omega b}{\omega + r}$, ac $GN = AG - AN = \frac{ar + a\omega - b\omega}{\omega + r}$. Quoniam autem porro $AN : AB = GN : GH$, erit $GH = \frac{ar + a\omega - b\omega}{b}$. Tab. VIII. Fig. 16.

4) Inuoluit formula haec quantitatem ω, ſiue ſemidiametrum pupillae, vnde patet, pendere diametrum campi viſionis, atque foraminis apparentem, ex pupillae apertura. Quoniam autem quantitas haec ω, ſola eſt, earum quae formulam ingrediuntur, in quam, quod in experimento ſupra deſcripto mutetur, ſuſpicio cadere poteſt, certi eſſe poſſumus, totum phaenomenon, non niſi a pupillae mutabilitate, pendere. Facile vero patet, generatim aucta pupillae apertura, augeri

ſimul GH. Quodſi enim ponatur tranſire ω in $\omega + e$, ſubſtitnto hoc valore loco ω, euadet GH in $\frac{ar + a\omega + ae - b\omega - be}{b}$ vnde erit augmentum, quo creſcit GH $= \frac{(a-b)e}{b}$, quae quantitas, cum ob $b < a$ ſit ſemper poſitiua, aucto ω, augeri ſimul GH luculenter patet.

5) Concludendum eſt ex his, ſi oculus dexter, aut palpebrarum ope claudatur, aut manu, vel corpore alio opaco obtegatur, in ſiniſtro tum oculo pupillae aperturam inſigniter augeri. Cum vero hoc ſit res, quae an ita ſe habeat, immediata experientia innoteſcere poteſt, ante ſpeculum tentamen inſtitui, atque obſeruaui, omnino verum eſſe, quod modo prolatae me docuerunt argumentationes. Dum enim oculum dextrum clauderem, admodum notabiliter dilatari in ſiniſtro pupillae aperturam, aperto vero rurſus ipſo, contrahi eam, percipere diſtincte potui.

6) Notiſſimum alias eſt, pupillam quantitati luminis in oculum incidentis, proportionaliter minui atque augeri, ita, vt aucto lumine contrahatur, imminuto augeatur; aſt apud omnes, qui mihi innotuere, ſcriptores opticos, propoſitionem hanc de eo ſolum oculo enunciatam, ſaltem intellectam, reperio, in quem lumen immediate incidit, nullibi autem, nexus eius, quem inter vtrumque oculum detexi, mentionem iniectam video, vnde obſeruationem hanc meam nouam haberi poſſe iudico.

7) Anato-

7) Anatomicis atque Phyſiologis, vnde oriatur conſenſus is, oculi vtriusque, vt mutatio in vno contingens, alterum quoque afficiat oculum, inueſtigandum relinquo Singularis autem, quae hinc elucet, naturae rerum, ſeu ſapientiſſimi potius auctoris ipſius, prouidentiae, mentio adhuc iniicienda videtur. Qui ſano gaudent vtroque oculo, tentamine inſtituto obſeruabunt, ſe vno oculo obiecta extra ſe poſita, non minori claritate conſpicere, quam ſi vtrumque adhibeant, ſaltem de me-met ipſo, hoc affirmare poſſum. Quaerenda eſt rei huius ratio ſine dubio in ea, quam expoſui, oculorum proprietate. Quodſi enim pupilla oculi alterius non immutata perſtaret, clauſo altero, dimidia ſolum quaſi claritate conſpici tum poſſent obiecta. Quo minus autem hoc fieret, quod ſaepius moleſtum foret, talem dedit natura oculis mechanismum, vt clauſo oculorum altero, alterius ſtatim pupilla tantum aperiatur, quo duplam minimum luminis quantitatem oculus recipere, atque ſenſatio eandem conſeruare queat, quam habuerat claritatem.

8) Supereſt, vt vnius adhuc, quod ſupra annotaui, phaenomeni rationem reddam. Si, poſtquam oculus dexter palpebrarum ope clauſus eſt, manu obtegitur, pupillae apertura in oculo ſiniſtro magis adhuc increſcit. Ortum hoc trahere inde iudico, quod palpebrae oculo obductae, non ſint penitus opacae, ſed, vt quaedam adhuc luminis fiat in oculum impreſſio, permittant. Si igitur manus oculo opponatur, excluſo

etiam hoc lumine, dextri oculi pupilla, et per conſenſum quoque ſiniſtri, magis adhuc augebitur. Eſſe vero palpebras non penitus opacas, facili experimento conſtare poteſt. Si enim palpebrae oculis obducantur, ac hi tunc lucenti obuertantur ſoli, tantam transmittere ipſas luminis quantitatem, quae moleſtam creare poteſt ſenſationem experimur. Patet idem quoque exinde, quod, ſi oculi clauſis palpebris obuertantur candelae, tum vero manus oculis opponatur, denſiores quaſi oriri tenebras obſeruemus.

ACVS

ACVS NOVAE DECLINATORIAE DESCRIPTIO

AVCTORE IO. ERN. ZEIHERO.

Quum pridem doctiſſimus ac amiciſſimus Collega, Dn. Aepinus, acum magneticam 5 pollices vix longam, eademque forma, quam Fig. 1. repraeſentat, elaboratam, me praeſente, limaturae ope examinaret, polos iſta quatuor, centraque tria magnetica oſtendebat. (vid fig. 2) Acus haec perticarum magneticarum ope de nouo fricabatur, et ita quidem, vt poli peruerterentur, priores conſequenter euaneſcerent, acusque nouos, et tantummodo duos, quorum centrum in medio acus eſſet, acquireret. Obtinebat quidem nouos, prioribus contrarios, ſed iterum quatuor polos. Experimento hoc plus decies reiterato, acus nouos quidem, prioribus contrarios, aſt quatuor ſemper polos obtinebat. Tab. IX. Fig. 1. Fig. 2.

Cauſa huius phaenomeni non alia eſſe poterat, quam quod hoc modo elaborata acus re vera duo chalybis fruſta, tenuis annuli ope inter ſe coniuncta, repraeſentet. Quodſi autem duas perticas chalybeas ope fruſtuli chalybis, ſeu ferri, reſpectu totius perticarum maſſae parui, inter ſe iungamus, pari modo quatuor acquirunt polos: quum e contrario, immediate ſe inter ſe contingentes, quaelibet vnicum modo habeat polum, ambaeque ſimul ſumtae vnicam modo repraeſentant perticam. In acu

modo deſcripta diſcrimen inter craſſitiem ambarum extremitatum, et annuli capitulum gerentis, amboque fruſta iungentis, valde erat magnum: nam crura acus capitulum verſus, tam ſecundum latitudinem, quam craſſitiem, valde diminuebantur, acusque capitulum adeo excauatum erat, vt annulus relictus craſſitie ſua craſſitiem papyri vix ſuperaret. Hinc apparet, quanti momenti ſit, ne acus medium, cui capitulum affigitur, nimis tenue elaboretur.

Experientiae iam enarratae anſam mihi praebuerunt, acum inueniendi, ab omnibus iis defectibus liberam. Experimenta circa magnetismum inſtituta docent, virgam chalybeam, quadrilateram, multo magis latam, quam craſſam, per totam longitudinem craſſitie aequabili, nullo loco interruptam, fortiſſime induratam (germ. Glashart), prae omnibus reliquis ad accipiendum ſummum magnetismum, eundemque conſeruandum, eſſe aptiſſimam. Si eiusmodi virga, perticarum magneticarum auxilio, ſecundum regulas requiſitas affricetur, nunquam plures praeter duos polos, nunquam puncta conſequentia ſic dicta accipiet, licet longitudine acus vulgares multum ſuperet; immo ſemper eſt in poteſtate noſtra, centrum eorum ita locare, vt lineam virgae medium tranſeuntem in duas aequales diuidat partes. Acus itaque, et qualitate et forma ad virgam iam memoratam accedens, omnibus aliis huc vsque cognitis, longe praeferenda erit.

Nunc

Nunc ſupereſt, vt dicamus, quomodo acus debeat ſuſpendi, ne eam in medio exſcindi ſit opus. Ad id vero obtinendum, ſequentem in modum peragere oportet. Fig. 3. repraeſentat acum nouam, prismaticam quadrangularem, latitudine craſſitiem ſuam quater ſeu quinquies circiter ſuperantem. Extremitates ſint acuminatae, vt gradus poſſint indicare, vel et tota acus parallelepipedi formam retinere poteſt, ſi cui animus eſt Nonio eam inſtruere, quod perinde erit. Fig. 4 et 5. ſunt anſae orichalceae, e quibus vna vel altera ad ſuſpendendam acum eligatur. Fruſtulum bibrachiale AB Fig. 4. duabus mediantibus cochleis tenuiſſimis, craſſitie vix ſextam latitudinis acus partem attingentibus, ad acus medium affigatur. Paruula iſta duo foramina, quibus cochleae 1, 2, inſeruntur perticae magneticae, nullum omnino detrimentum afferre poſſunt. Si quis vero hoc pertimeſceret, anſam Fig. 5. praeferre poſſet. Fruſtum hoc theca CD eſt inſtructum, cui inſeritur acus, et cochlea E mediante firmatur. F, *f*, eſt cochlea chalybea acumine indurato, cuius ope acus ſuſpenditur. Acum inter atque anſam trabecula traiicitur, achatae, aliusue ſilicis fruſtulo excauato inſtructum, cui cochleae acumen imponitur, acusque ſupra illud mouetur. Ope cochleae F punctum ſuſpenſionis plus minusue a centro grauitatis pro neceſſitate remouetur, vt acus plus minusue ad latera oſcillare queat. Fig 6. acum vna cum ſuo apparatu repraeſentat, quam Illuſtri Conuentui Academico nunc elaboratam ſiſto. Acus haec, cuius longitudo $7\frac{1}{4}$ poll. latitudo 4 lin. craſſities 1 lin. pedis

Tab. IX. Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

dis anglici eſt, frictione perticarum magneticarum eximia pollet vi, poloſque non niſi duos recte poſitos, centroque magnetico in acus medium rite cadente, obtinet. Fig. 7. repraeſentat limaturae ferri in charta acui impoſita diſperſae diſtributionem, e qua ſitus polorum et numerus apparet.

Tab. IX. Fig. 7.

Reiteratae obſeruationes cum acu hacce inſtituendae, praerogatiuam eius prae reliquis acubus huc vsque vſitatis oſtendent.

PHYSICA

PHYSICA.

NITRARIA
PLANTA OBSCVRA EXPLICATA

a

CAROLO LINNAEO.

Inter vulgo nota vegetabilia in hunc vſque diem vix alia obſcurior NITRARIA, Imperii Ruthenici planta, quam hic explicare conſtitui. Tab. X.

SYNONYMA.

NITRARIA Schoberi.

Caſia fructu nigro *Amman. Ruthen.* 178 *n.* 256. *Du Hamel. Arb.* 131.

Oſyris foliis obtuſis. *Hort. Vpſ.* 295. *Gmelin Sibir.* 2. *p.* 237. *t.* 98.

HISTORIA.

AMMANVS in *Stirpibus* rarioribus *Ruthenicis*, huius, quantum noui, mentionem fecit primus, cum deſcriptione a Gmelino miſſa, ſed absque flore.

Ego ante duodecim iam annos, e miſſis, per amicos Rutheni Botanicos ſeminibus, plantam obtinui laete virentem, ſed exſpectata diu effloreſcentia, genus prodere adhuc neſciam, dum 1748. hortum ederem Vpſalienſem, fide acquieſcens Ammaniana, ad Caſiam Tournefortii, quae mihi Oſyris dicitur, eam ablegaui.

In *Speciebus Plantarum* non auſus ſum plantam, nondum viſis floribus, genuinam Oſyridis ſpeciem conſtituere, quam verbo tantum tetigi p. 1022.

GMELINVS in *Flora Sibirica* proponit deſcriptiones *Stelleri*, *Schoberi*, *Lerchii* deſtitutas floribus, quos anxie per omnes amicos e loco natali quaeſiuit; de genere Oſyridis haeſitabat, cum obſeruaret, fructum non vmbilicatum fuiſſe vertice triangulo, Oſyridi proprio.

Du HAMEL in *Traité des Arbres* 1755. edito, nomina tantum Ammani et Gmelini habet, praeterea nihil.

Ne vero diutius, et vltra decennium, ſterilem hunc Hortus Vpſalienſis aleret hoſpitem, operam omnem in id conferebam, vt detracta larua flos prorumperet. Collocaui itaque diſtinctas huius ſpeciei plantas in diuerſo ſolo: alias in Caldario, in Tepidario, in Frigidario, ſub dio aprico, ſub vmbroſo alias, nec quidquam hiſce omnibus aliud profeci, quam quod intelligerem, plantam et ferre clima Indicum Caldarii, et gelidum noſtrum ſub dio, at vero minus vmbroſum amare. Altero anno alias in gleba poſui humoſa, alias in arenoſa, alias in argillacea, inque ſabulo calcareo alias; quas omnes placide ferebat iniurias etiamnum ſterilis, ſed arenoſo prae reliquis delectabatur, humidum humoſum in primis reſpuens. Tertio demum anno cum obſeruarem folia ſucculenta et ſubſalſa, nec non ſtaturam ſimilem maritimis plantis et ſalmis, ſuboſeci, eandem deſiderare ſolum ſalſum: his accedebat, quod *Schoberus* dixerat, plantam Nitrariam a locis vliginoſis, nitroſis vulgo ſalino muriaticis, et

et *Stellerus* notauerat, eandemo ccurrere ad locum falſum. Plantae itaque ſub dio naſcentis radicibus primo vere anni praecedentis adiiciebam libram dimidiam ſalis muriatici ſ. culinaris, aliis plantis adeo lethiferi, flocci pendens, vtrum vna ancipiti periret experimento, vel non, cum facile plures depactis taleolis recuperarem: at euentus ita ex voto ſucceſſit, vt inſequente anno 1758. primum proferret anxie quaeſitos et pro determinatione generis ſyſtematici deſideratos Flores, quos hic, vna cum totius Plantae deſcriptione noua, cum Botanico Orbe communicare operae pretium duco, ne planta haec barbaras inter et obſcuras ſeponatur.

DESCRIPTIO.

RADIX lignoſa, fibroſa, patula.

CAVLIS fruticoſus, ſeſqui-ſeu bipedalis, diffuſus, proſtratus, ramoſiſſimus, rimoſus, cinereus. *Rami* alterni, ſubadſcendentes, ramoſi, longitudine caulis, ſubincani, ad folia prominentes dentibus obtuſis, truncatis. Praeteritorum annorum ramuli ſaepe terminati apice arido, qui ſpinam fragilem mentitur.

FOLIA ramea, alterna, erecto-patula, ſeſſilia; *ſaepius* bina *diſtincta in quouis dente ramuli*; raro 3, 4 ſ. 5 ſed floralia et ſuperiora in *fertiliori ſolo* terna ſunt, *tamen ſimplicia*, *vt in plerisque aliis plantis*.

Foliola ſeſſilia, lanceolato - linearia, ſubcarnoſa, integerrima, obtuſo - acuta, auenia, planiuſcula, pollicaria, annua, ſuperius a ſe inuicem magis diuergentia.

Stipulae duae, minimae, acutae, inflexae, obſcurae dentibus ramulorum inſertae.

PEDVNCVLI ſaepius duo, ſolitarii (*altero terminali ad baſin vltimi folii exorto; altero ex ala folii penultimi*) adſcendentes, teretes, aphylli, ebracteati, laeues, virides, foliis duplo longiores, bifidi: ramulo altero bifido, altero trifido; ſubracemoſi.

Flores ſubſeſſiles, e latere ſuperiore ramulorum pedunculi, alterni, ſaepius quinque, vel ſex.

CALYX. *Perianthium* monophyllum, *ſubcarnoſum*, ſemiquinquefidum, erectum, minimum, acutum, *viride*, perſiſtens.

COROLLA. *Petala* quinque, lineari - lanceolata, canaliculata, apice fornicata inflexoque hamata, acuminata, *alba*, *calyce triplo longiora*.

STAMINA. *Filamenta* quindecim, *tenuius* ſubulata, erectiuſcula, *alba*, longitudine petalorum. *Antherae* ſubouatae, luteae.

PISTILLVM. *Germen* conicum, *ſuperum*, deſinens in *ſtylum*, breuiſſimum, a *germine non diſtinctum*, *ſtaminibus dimidio breuius*. *Stigma* conicum, ſcabrum.

PERICARPIVM. *Drupa* ouato - oblonga, monoſperma.

SEMEN. *Nux* ouata, acuta, trilocularis.

CON-

CONCLVSIO.

CHARACTER GENERICVS in deſcriptione fructificationis habetur, excluſis tantum vocabulis, literis minoribus ſcriptis.

GENVS diſtinctiſſimum eſt, nec cum vllo, in hunc vsque diem cognito, facile confundendum. *Stamina* enim conſtantes quindecim ſunt, quod ſingulare admodum, et, quantum ſcio, Pegano tantum commune, quod a Nitraria toto coelo recedit fructu capſulari, triloculari, polyſpermo. *Petala* etiam Nitrariae apice hamoſa rariſſime in aliis occurrunt generibus, vt alia taceam. Nullam ideoque affinitatem habet cum *Oſyride*; nec flores ſexu diſtincti ſunt, vt *Gmelino* videbantur apud *Ammanum*; neque cum *Elaeagno* quidquam commune habet Nitraria, vt *Stellerus* putauerat.

SPECIES ſingularis admodum eſt, quod Folia ſint neque ſingularia, neque compoſita, ſed ſemper 3 ad 5 eidem denti ſ. baſi innixa, tamen ſeparata, quod extra Pini genus in Plantis rariſſimum.

CLASSES et ORDINES Auctorum nunc facile intrat.

RAII XXX. Arb. Fructu non vmbilicato. 1. *Pruniferae*.

HERMANNI XXIV. Arb. fr. non vmbilicato; 1. *Prunifera monopyrena*.

RIVINI. V. Pentapetala regularis; 8. Bacca.

TOVRNEFORTII. XXI. Arbor Roſacea; 2. Piſtill. in Baccam.

ROYENI

ROYENI. XVII. Diploſanthera. 3. Stamina erecta.

LINNAEI. XI. Dodecandra. 1. monogyna.

Locus: circa *Iamiſcham* locum ſalſum. *Gmelin.*
In *Urunſcinenſi* deſerto ad locum ſalſum. *Steller.*
Ad Wolgam fluuium. *Schober.*
Prope Aſtracanjam. *Lerche.*

Solum expoſcit arenoſum, humo mixtum, duriuſculum, apricum, ſalſum.

Floruit Iulii 8, ſub initio Menſis *groſſificationis* cum Orobo Sibirico, Crepi Sibirica.

Petala ante explicationem inuoluta, nec incumbentia ſunt.

Gemmae imbricato-verrucoſae, obſcurae.

FIGVRA.

Gmelinus in *Flora Sibirica* 2. *Tab.* 98. vnicam huius reliquit figuram, ſed adeo mancam, vt certus ſim, quod nullus fructum ab ea dignoſcat, cum neque habitum ſiſtat, neque folia diſtinguat, operi itaque pretium duxi, aliam addere.

Noſtra ſiſtit ramulum decumbentem cum ramulis adſcendentibus in magnitudine naturali, vbi pleraeque partes in conſpectum prodeunt.

POLY-

POLYPI MARINI,

RVSSIS KARAKATIZA, RECENTIORIBVS GRAECIS Ὀκτάπυς DICTI DESCRIPTIO.

Auctore

IOSEPHO THEOPHILO KOELREVTER.

Cum animalium marinorum hiſtoria, qualem nunc habemus, omnium maxime manca, et multitudo eorum atque diuerſitas tanta ſit, quanta terreſtrium vix eſſe poteſt; naturae ſcrutatores hanc ſcientiae naturalis partem vlterius et accuratius perficiendi, omnem ſuam vt impendant operam, neceſſe eſt.

Exiguus valde eorum eſt numerus, quorum internam perſpectam habemus ſtructuram, paucorum externa rite eſt deſcripta facies, et quamplurimorum huc vsque deſideramus notitiam. Multorum quidem exſtare deſcriptiones, fatendum, et ſuum cuique Auctori tribuere fas eſt; verum hae ipſae quoad maximam partem tam breues ſunt, tamque ſuperficiarie confectae, vt in diverſum potius trahant, quam certiores reddant, lectores. Perficiamus igitur ab aliis neglecta, et, quae reſtant, incognita, omni cura deſcribamus.

Sedula aquatilium diſquiſitio eo plus delectamenti et vtilitatis nobis afferet, quo maior haec inter et terreſtria obtinet diſſimilitudo.

Si quis ſummam formae ac ſtructurae, inter vtrumque animantium genus, diuerſitatem in dubium vocare vellet, is certe vel ſola proprietatum aquae et aeris conſideratione, vel ex ipſa animalium inſpectione, huius aſſerti veritatis conuinceretur.

Natura quidem in procreandis animalibus, ſi de generalioribus ſermo eſt, easdem ſemper ſequitur leges, certosque ſibi conſtituit fines, verum eos mille modis variaque ſub forma exſequi valet, omnibus largiendo vitam, ſenſum, incrementum, ac generandi facultatem. Hac perfectione fruitur Elephas aeque ac Balaena, eiusdemque Acarus non minus particeps factus eſt, quam Monoculus. Aſt! quanta inter eos tam externarum quam internarum partium diuerſitas? Quantum victus, incrementi, propagationis ac vitae termini diſcrimen, ſi magna cum paruis comparamus animalia?

Vt inueniamus omnium harum diuerſitatum rationem, et ſtructuram corporum potiſſimum perſcrutari, et ad id reſpicere debemus, quod cuiuslibet ſtructurae neceſſitatem poſtulabat. Quo diuerſior eſt vnius ſtructura a ſtructura alterius, eo maior quoque formae et morum erit diuerſitas, et, quo minus diſcrepat, eo maiorem horum deprehendemus ſimilitudinem.

Haec autem, nec in vnica corporis parte, neque in ſingulari quodam more quaerenda eſt, ſed ex toto potius computanda; quod, ſi negligimus, fucata ſimilitudine decepti, facillime in errores inducimur, commiſcendo corpora plane diuerſa, e quibus dein innumeri oriuntur paralogiſmi, qui ab omni tempore

ſcientiae

ſcientiae naturalis incrementi ſumma fuere impedimenta. E contrario ſcientiae huius peritus, corporum naturalium diſpoſitioni ſecundum veras ipſorum affinitates concinnandae ſtudens, haud facile hallucinabitur; probe gnarus, ſeriem hanc concatenatam, ſaluo rerum ordine naturali, haud diſſolui, neque integrum Syſtema componi poſſe, priusquam omnia huius ſeriei membra habentur cognita. Interim certum eſt, Syſtema, veris fundatum affinitatibus, ſiue eiusmodi ſeries, de qua modo dixi, ſit imaginaria, ſiue reuera talis exiſtat, omnibus numeris fore abſolutum; id vero ſine plenaria omnium corporum cognitione nunquam conſtrui poſſe, quis non videt? Licet animalia terreſtria cum aquaticis comparata, immo et ſingula inter ſe collata, magnum nobis exhibeant diſcrimen, in quibusdam tamen ipſis eſt conuenientia, eaque eo maior, quo proprior eorum affinitas.

Conſiderationum, quas modo inſtitui, materiam praebuit ſpecies quaedam animalium marinorum, ab Hiſtoriae naturalis ſcriptoribus Polypi nomine inſignita, cuius nunc longe vberiorem, quam dederunt nobis Veteres aeque ac Recentiores, externarum partium deſcriptionem beneuolo lectori tradam, praemiſſurus antea huius animantium generis, aliorumque quorundam, illis affinitate proximorum, conſpectum.

Quae generico nomine Molluſca, vel Mollia, olim vocauit animalia Ariſtoteles, in ſpecie ſunt Polypus, Loligo, Sepia et Lepus marinus. Hiſce alia, ego quidem vt arbitror, omni iure annumerari poſſunt

animalia, haud incongrue Zoophyta dicta, ſc. Polypus aquarum dulcium, Lernea Linn. Vrtica et Pulmones marini, quibus Caput Meduſae, Holothurium, Mentulam marinam adiungere haud longinqua ſuadet affinitas. Omnia haecce animalia, quod ad formam externam attinet, in eo inter ſe ſimilia ſunt, quod corpus habeant vel oblongum, vel ſubrotundum, at perpendiculariter compreſſum, cuius extremitatis anterioris margini circumponuntur tentacula centralia, in quorum medio os tanquam in centro poſitum eſt.

Tentacula iſta, quae ab aliis etiam pedes, vel brachia, dicuntur, non ſolum ad praedam capiendam, eandemque ori admouendam, verum etiam ad natandum et ad ambulandum vtilia eſſe, iisdemque veluti ancoris inniti, ſeque contra aeſtus marinos nauigii modo ſtabilire (*a*) animalia, ratione et experientia confirmatum eſt.

Numerum eorum in diuerſis animalibus valde interdum differre, ex ſequentibus facile colligitur: Sepia nimirum et Loligo decem, Polypus marinus octo, Lepus marinus Bell. ſeptem, Polypus aquarum dulcium ſex; Lernea Linn. quatuor, Vrticae quatuor, vel octo, vel plurima, quorum numerum vero ab Auctoribus indefinitum accepimus; Pulmones marini et Holothuria octo, et fortaſſis etiam plura, Caput Meduſae, quod Stella arboreſcens Rondeletio dicitur, quinque, per plurimas bifurcationes ramoſa habent, ramis octoginta milli-

(*a*) Ariſt. de part. Anim.

milliũm (a) numerum ſuperantibus; Mentulae marinae tentacula indefinita ſunt, ipſorum vero acetabulorum numerum quatuor excedere millia, Bellonius teſtatur.

Iis, quae illuſtrationis cauſa habui dicenda, expoſitis, tranſeo ad ipſam Polypi deſcriptionem: Polypus, ab infimae aetatis Graecis Ο'κταπυς, Anglis the Pourcontrel, vel Sea-Polype, Gallis Poupe, dictus, ab Loligine et Sepia, quibuscum alias prae ceteris maximam habet ſimilitudinem, primo ſtatim intuitu facillime diſtingui poteſt, ſi ad ſequentes attendimus characteres: Primo optimam diſtinctionis notam prae ſe ferunt tentacula, ſiue pedes *, in Polypo octoni, forma inter ſe ſimiles, eiusdemque fere longitudinis, et ratione abdominis * ſat longi, vtpote eodem triplo circiter longiores; in Loligine vero et Sepia decem deprehenduntur pedes, quorum octo, proprie ſic dicti, forma quidem inter ſe ſimiles, eiusdemque fere longitudinis, abdomine vix duplo longiores ſunt, reliqui duo autem, a quibusdam improprie promuſcides dicti, forma non tantum a ceteris pedibus differunt, verum etiam eosdem longitudine multum ſuperant. Sic quoque cum Polyporum acetabulis comparatum eſt, quorum duo tantum ordines in ſingulo pede, ipſaque acetabula vtrorumque ordinum ſitu inter ſe alterna et ſeſſilia conſpiciuntur *, cum in Loligine et Sepia minus ordinate diſpoſita, numeroque plura, pedunculata, magisque conſtipata ſint.

Tab. XI. *Fig. 1. a. *Fig. 1. b. *Fig. 3. a. et b.

 Secundo

(a) Tranſact. Philoſ. No. LVII.

Secundo Polypus, reſpectu abdominis facile quoque dignoſcitur, quod ouatum et conuexum magis, breuius, tactuque per omnem ipſius ambitum molle eſt, pinniſque lateralibus deſtitutum; idem vero oblongum magis et planum, ac prona ſua parte, in Loligine quidem, ob ſubſtratum cuti gladium cartilagineum, et in Sepia, ob interpoſitum os, digiti impreſſioni reſiſtit; praeterquam, quod ipſius margo, vel ex toto, vel ex parte, ala, a producta cute orta, auctus, et quaſi pinna, inſtructus videatur. Caeterum, ad diſtinguendum Polypum a reliquis huius generis multipedibus, ſequens ſufficiet nomen ſpecificum:

POLYPVS pedibus octo, ſimilibus, intermediis quatuor craſſioribus: acetabulorum alternantium ordine duplici inſtructis.

Priusquam de MAGNITVDINE horum animalium mentio iniciatur, praemonendum habeo, ſeptem eorundem indiuidua diſquirendi occaſionem mihi fuiſſe, quorum quinque in aere leuiter ſiccata, omnibusque, praeter pulmones, cor, vaſaque maiora ſanguinea, viſceribus erant ſpoliata; quem in finem ſectione longitudinali alueum iis incidunt piſcatores, vt, a putredine defenſa, ieiunii tempore, gratum praebeant alimentum; reliqua duo vero integra in ſpiritu vini fuere aſſeruata.

Ad reddendam illis priſtinam, quam exſiccatione amiſerant, mollitiem, flexilitatem et extenſionem, ea per octiduum aqua frigida detinui ſubmerſa, id quod etiam facile ſucceſſit; quod vero longitudinem et craſſitiem naturalem in totum iterum recuperauerint, contendere non auſim; id enim eundem exſic-

cationis

citionis gradum, et aequalilem, tam totius, quam partium; contractionem ſupponit, quae varia eſſe potuit; exiguum tamen, ſi quod erat, interfuiſſe diſcrimen, ex ſolo adſpectu facile erat iudicatu.

Quod ad dimenſionem, et comparationem, inde inſtitutam, attinet, cautus fui, ne vnum v. g. pedem plus, quam alterum, extenderem, ita, vt proportioni, quam conſtituam, fides haberi poſſit; eorum vero, in ſpiritu vini aſſeruatorum, quae aquae haud immiſi, longitudo, et craſſities, paulo maior, quam a me quidem indicabitur, cenſenda erit, quoniam abeſſe haud poteſt, quin omnes fibrae, in iſto liquore contractae, partes, quae iis componuntur, breuiores ſiſtant. Caeterum magnitudinis diſcrimen, et aetas, ſeptem horum indiuiduorum ex alia quadam circumſtantia, de qua poſtea loquar, aeſtimari poterunt.

Longitudo pedis longioris Polypi, inter iſtos ſeptenos maximi, poſt ſufficientem in aqua emollitionem, erat (a) 1′, 6″, et a baſi pedum ad extremum vsque corpus 6″, 8‴. Longitudo pedis longioris Polypi* omnium minimi, ex ſpiritu vini exemti, 5″, 3‴ aequabat, et a baſi pedum ad extremum vsque corporis 2″, 5‴. Reliqui quinque Polypi, partim mediae, inter hos, magnitudinis, partim maximo iſto haud multo erant inferiores. Polypos ſaepe inueniri, quorum pedes bina ſuperant cubita, Ariſtoteles ſcribit; et in exterioribus Carteiae locis, talenti pondere dari, Strabo refert, quod fidem haud ſuperare videtur.

Tab. XI. *Fig. 1. et 2.

SVB-

(a) ′ ped. ″ poll. ‴ lin. ſignificat.

SVBSTANTIA corporis potiſſimum muſculoſa, hinc mollis tactu, durior tamen, quam aliorum animantium caro. Cutis, carni ſuperinducta, omnino laeuis, nec pilis, neque ſquamis ornata. Nullum quoque in toto corpore verum os deliteſcit, hinc Ariſtoteles, naturam haec animalia, ob eandem rationem Molluſca ab eo dicta, inter carnem et neruum, mediam obtinere, dixit. Caput *, et oris bulbus (ſi hunc ita vocare licet) ratione reliqui corporis, digiti impreſſioni omnium maxime reſiſtunt, illud, ob fornicem cranii cartilagineum, hic vero, ob tunicas cartilagineas et corneas laminas, quibus componitur. Pedes tantam quidem, ac caput et oris bulbus, duritiem non habent, longe tamen firmioris ſunt ſubſtantiae, quam collum et abdomen.

Tab. XI. *Fig. 1. c.

COLOR in prona corporis parte, ſc. in dorſo, capite et pedum facie, acetabulis aduerſa, ex purpureo nigricans, ſaturatus, abdominis latera verſus dilutus, iuxta acetabula, ſeu ad latera pedum profundior, in tota vero ſupina parte pallidiſſimus. Si corporis pronum accuratius adſpicitur, margines apparent plurimi, ſaturatiores, plana, vt plurimum oualia, vel oblonga, pallidiora coercentes, in medio corpore, vbi ſaturatior eſt color, contigui, ad latera vero, medio pallidiora, diſtincti, quibus cutis quaſi ſquamata redditur. Praeter illos, in ambitu ſaepe cernuntur maculae ſubrotundae, obſcuriores, in fundo pallidiori diſpoſitae; puncta deſuper innumera, nigricantia, cuti vndique adſperſa videntur. In iunioribus modo deſcriptus color pallidior eſt, quam in aetate prouectioribus; nec illorum cutis tam relaxata rugoſaque, quam horum, apparet.

Poſtquam

Poſtquam de eo, quod generatim Polypum concernit, locuti ſumus, propius nunc ad eum accedimus, totum ipſius corpus in tres potiſſimum partes diſpertiendo: ſc. in PEDES, CAPVT, cui adiungimus collum, et ABDOMEN, ſeu ventrem.

In PEDIBVS notamus ipſorum *ſitum*, *formam*, *proportionem*, *magnitudinem*, *acetabula* *, denique *membranam* **, vnum cum altero iuxta baſin connectentem.

Tab. XII. * Fig. 1. a. et b. ** Fig. 3. c.

Quoniam in ſequentibus huius vel illius pedis ſigillatim mentio fieri debet, praeueniendae confuſionis cauſa, certi eligendi ſunt characteres, quibus vnus ab altero diſtinguitur.

Ponamus igitur ante nos Polypum * pronum, ita, vt extremitas ipſius ventris nobis ſit proxima, pedes vero antrorſum porrecti, erunt horum quatuor tenuiores, dextri et ſiniſtri lateris, quorum duo * frontem, duo ** fiſtulam, ante alueum poſitam, reſpiciunt; et quatuor craſſiores, illis interpoſiti, quorum duo * in dextro, duo ** in ſiniſtro latere collocantur, pedibusque tenuioribus, vel ſuperioribus, vel inferioribus, contigui ſunt.

* Fig. 1.
*Fig. 1. d. e. 2. a. b. 3. d. e.
**Fig. 1. f. g. 2. c. d. 3. f. g.
*Fig. 1. h. i. 2. e. f. 3. h. i.
**Fig. 1. l. m. 2. g. h. 3. l. m.

Incipiendo itaque a ſuperioribus, vnum poſt alterum, ex ſitu et magnitudine, deſignabimus, modo ſequenti: I) * Pes tenuior, frontem reſpiciens, dexter. II) ** Pes tenuior, frontem reſpiciens, ſiniſter. III) * Pes craſſior, dexter, pedi tenuiori, frontem reſpicienti, dextro, contiguus. IV) ** Pes craſſior, ſiniſter,

*Fig. 1. e. 2. b. 3. d.
**Fig. 1. d. 2. a. 3. e.
*Fig. 1. b. 2. f. 3. b.
**Fig. 1. l. 2. h. 3. l.

ſiniſter; pedi tenuiori, frontem reſpicienti, ſiniſtro, contiguus. V) * Pes craſſior, dexter, pedi tenuiori, fiſtulam reſpicienti, dextro, contiguus. VI) ** Pes craſſior, ſiniſter, pedi tenuiori, fiſtulam reſpicienti, ſiniſtro, contiguus. VII) * Pes tenuior, fiſtulam reſpiciens, dexter. VIII) ** Pes tenuior, fiſtulam reſpiciens ſiniſter.

*Fig. 1. *i.* 2. *e.* 3. *i.* **Fig. 1. *m.* 2. *g.* 3. *m.* *Fig. 1. *g.* 2. *c.* 3. *f.* **Fig. 1. *f.* 2. *d.* 3. *g.*

Licet in praecedentibus iam monitum fuerit, Molluſcorum pedes anteriori corporis extremitati, ſeu capiti potius, ſi quod habent, inſiſtere, alia tamen, reſpectu ad ſitum habito, nobis ſeſe in Polypo circumſtantia offert, heic loci non praetermittenda: videmus nempe, pedes, ſiue ſupinus, ſiue pronus iaceat Polypus, in aequali a ſe inuicem diſtantia haud eſſe diſpoſitos, quin ſuperiores, qui * frontem, ab inferioribus, qui ** fiſtulam reſpiciunt, magis eſſe remotos, quam intermedios * vnius lateris ab iis ** alterius, ſtatim poſſit animaduerti. Vel, concipiamus animo, Polypi proni pedes, antrorſum porrectos, eosque facie interna aequabiliter a ſe inuicem diſtantes, premi vtrinque horizontaliter, et orietur modo deſcriptus ſitus; pari modo, ſi quis volam vtriusque manus componeret, digitus ſemper determinati generis vnius manus in eundem alterius verget. Eodem plane modo cum Polypis comparatum eſt: pes ſc. tenuior, frontem reſpiciens, dexter *, in pedem tenuiorem, frontem reſpicientem, ſiniſtrum *, inclinat, et ſic porro. Situs vero huius neceſſitas ex circumſtantia quadam, de qua paulo inferius loquar, ſatis elucefcet. Praeterea quoque pedes

*Fig. 1. *e.* *d.* 2. *a.* *b.* **Fig. 1. *g.* *f.* 2. *c.* *d.* *Fig. 1. *h.* *i.* 2. *e.* *f.* **Fig. 1. *l.* *m.* 2. *g.* *h.* *Fig. 1. *e.* *Fig. 1. *d.*

pedes duo tenuiores, fiſtulam reſpicientes, prae aliis extrorſum et deorſum magis flexi, et arcuati ſunt.

Forma omnes teretes ſunt, vltra dimidiam fere ipſorum longitudinis partem, abhinc vero, ad extremitates vſque, latera magis compreſſa oſtendunt. pacies eorundem interna, ad baſin, lateraliter compreſſa eſt, duo quaſi trianguli latera exhibens, quorum angulo, qui in pedis medium cadit, infima acetabula inſiſtunt. In eodem loco, ad baſin ſcilicet, paulo anguſtiores * ſunt pedes, quam in aliquali ab ea diſtantia, vbi quinta totius ipſorum longitudinis parte abſoluta, maximam *, quae naturaliter ipſis competit, habent craſſitiem, abhinc vero, ſenſim ſenſimque iterum gracileſcentes, in tenuiſſimos tandem deſinunt apices. Ipſorum longitudo in vno eodemque ſubiecto, variis videtur eſſe mutationibus obnoxia: facillime enim poteſt accidere, vt caſu quodam apicibus mutilentur, ex quo incrementi non tantum, verum longitudinis etiam, inaequalitas oriatur, neceſſe eſt. Pedes interim quatuor craſſiores, horumque inprimis inferiores, qui pedibus, fiſtulam reſpicientibus, contigui ſunt, reliquis, caeteris paribus, vt plurimum longiores eſſe, e ſeptem indiuiduis coniicere potui; omni tamen exceptione haud carere hanc obſeruationem, e duorum, in ſpiritu vini conſeruatorum, menſura, paulo inferius addenda, facile erit iudicatu. Craſſitiem pedum in vno eodemque ſubiecto differre, eandemque intermediis quatuor ſemper eſſe maiorem, ſupra iam expoſitum eſt. Diuerſitatis huius ratio eadem forte erit, ob quam medii animan-

*Fig. 3. a.

*Fig. 3. b.

 tium

tium digiti exterioribus craſſiores et longiores ſiſi ſunt.

*Fig. 3. *a*. Tandem ordo nos ducit ad Acetabula *, ſeu orbiculares illas lacunulas, quae per totam internam pedum ſaciem diſtribuuntur; hae vaſcula quaſi referunt conica, ſubſtantiae duriuſculae, vix tamen cartilagineae, fundo *: eleuato et connexo, lateribus ** vero orbicularibus, ſtriatis, fundoque mollioribus, praedita, quae, a fundo vix eleuata, ſtatim introrſum, in ipſius fundi conuexitatem inclinant, ſinum relinquentia mediocriter tectum, mox vero oblique ſurſum et extrorſum tendunt, et in marginem tenuem * abeunt, ad cuius ſummitatem cutis pedum communis terminatur, eamque nullatenus tranſcendit; vnde interna acetabulorum ſuperficies, quae tenui tantum membrana obducitur; pallida valde apparet, cum exterior ipſorum ambitus colore purpuraſcente, enti proprio, ſplendeat. Caeterum haecce acetabula, quoad maximam partem, ſupra pedum ſuperficiem eleuata ſunt.

* Fig. 3. *b*.
** Fig. 3. *o*.
* Fig. 3. *p*.

Quoad formam, omnia inter ſe conueniunt, ſitu vero et magnitudine differunt; a baſi pedum nempe quatuor * vel quinque, in linea recta ſe inuicem ſubſequuntur, cetera omnia vero alternatim ** in duplici ſerie diſpoſita ſunt; et, quod a pedum baſi, ad quintam * fere horum longitudinis partem, ſubito increſcant, ab hinc iterum, ad extrema vsque, ſenſim ſenſimque decreſcant, de magnitudine notandum.

* Fig. 3. *n*.
** Fig. 3. *a* et *b*.
* Fig. 3. *u*.

In eadem ratione ſeſe habet eorundem diſtantia, quam inter ſe inuicem ſeruant: In aequali a baſi diſtantia

tia pedes, frontem reſpicientes, plura ſuſtinent acetabula, pro ratione minora *, magisque congeſta, quam pedes craſſiores, in quibus, ſub iisdem conditionibus, pauciora, maiora *, magisque a ſe inuicem remota, ſolent deprehendi. * Fig. 3. d. e. * Fig. 3. h. i. l. m.

Si pedes, fiſtulam reſpicientes, praeter acetabulorum magnitudinem et proximitatem, in quibus, cum pedibus frontem reſpicientibus conueniunt, numero a craſſioribus diſcrepent, exigua erit differentia, cum vno tantum vel altero acetabulo ab illis interdum ſuperentur. Interim de numero acetabulorum, cuilibet pedi a natura conſtituto, nondum aliquid certi mihi conſtat; variabilem eſſe, aeque ac pedum longitudinem, ob easdem, quas ſupra dedi, rationes, ſuſpicor.

Quod de conuergentia pedum vnius generis antea dictum eſt, id de ipſorum acetabulis quoque valet, quae ſibi mutuo ſemper reſpondent; vnde neceſſitas ſitus pedum per ſe patet.

Vt momenta quaedam, quae ad Polypi hiſtoriam pertinent, et quae, in hunc vsque diem, nondum, quod ſciam, a naturae ſcrutatoribus extra omnem dubitationis aleam poſita ſunt, clariori exponam luci, praemittenda erit tabula, ad inſtituendam, inter duos in ſpiritu vini conſeruatos Polypos, longitudinis pedum numerique acetabulorum comparationem concinnata:

* Fig. 3.
** Fig. 1. et 2.

	Polypus maior. *	Polypus minor. **
Pes ten. front. reſp. dexter.	10''. integer. 178 acet.	4'', 3''' integer. 96 acet.
Pes ten. front. reſpiciens, ſiniſter.	9'', 9'''. integer. 168 acet.	5'', 3'''. integer. 120 acet.
Pes craſſ. dexter, ped. ten front. reſp. ſiniſtr. cont.	1', 1'', 3''' integer. 201 acet.	2'', 9'''. mutilatus cum noua portione 54 acet.
Pes craſſ. ſin. ped. ten. front. reſp. dextro cont.	1', 9'''. integer. 191 acet	5'' integer. 107 acet.
Pes craſſ. dexter. ped ten. ſiſt. reſp. dextro cont.	11''. integer. 142 acet.	3'', 8'''. integer. 72 acet.
Pes craſſ. ſin. ped. ten. ſiſt. reſp. ſiniſtro cont.	1', 1'', 9''' integer. 198 acet.	6''. integer. 107 acet.
Pes ten. ſiſt. reſpiciens, dexter.	11'', 6'''. integer. 191 acet.	2'', 3'''. truncat. ad 2''' latitudinem. 28 acet.
Pes ten. ſiſt. reſpiciens, ſiniſter.	11'', 9'''. integer. 210 acet.	5'', 3'''. integer. 95 acet.
Summa	1479.	679.

Licet

Licet acetabula organicae valde ſint ſtructurae, cum corporis incremento tamen augeri numero, pedesque, Polypis mutilatos, redintegrari, renatamque partem nouis inſtrui acetabulis, quis credidiſſet? Vtrumque tamen demonſtrant duo haec, inter ſe collata indiuidua. De illo ne cogitarunt quidem Phyſici, huius ſolummodo mentionem fecerunt *Ariſtoteles* et *Plinius* (a), num vero propria id affirmauerint experientia, an relatum ipſis fuerit ab aliis, incertum eſt?

Prius ſufficienter probat acetabulorum numerus, in Polypo maiori longe maior, in minore minor. Differentia haec accidentalis eſſe nequit, cum in caeteris, qui hos magnitudine ſuperabant, eo maiorem ſemper acetabulorum numerum deprehenderim, quo quis maior altero erat. Aſt, ne quis extremos pedum apices in minimo Polypo vel mutilatos, vel extima acetabula tam exigua fuiſſe, ſuſpicetur, vt oculorum aciem effugerint, monendum, quod et huius pedes non minus ac maioris integros, et acetabula, ad extremum vsque, aeque ac illius, diſtincte viderim.

Quod ad poſterius attinet, Polypi minimi pes* craſſior, dexter, pedi tenuiori, frontem reſpicienti, dextro contiguus, nobis ſit exemplo, quippe qui truncatus olim, temporis ſucceſſu nouam protruſit portionem *, 9''' longam, quae acetabulis viginti ſeptem fuit inſtructa, et a baſi, 1''' lata, craſſitie paulatim decreſcens, in tenuem valde apicem abiit.

* Fig. 1. h. 2. f.

* Fig. 1. m. 2. i.

Eundem

(a) Plin. Hiſt. nat. Libr. IX. Cap. XXIX. §. XLVI. p. 319. edit. Pariſ. 4to An. MDC. LXXXV.

Eundem caſum in alio, inter duos, modo memoratos, mediae magnitudinis Polypo deprehendi, cuius pedi tenuiori, fiſtulam reſpicienti, ſiniſtro, 6'', 6''' longo, ac truncato accreuit noua portio, 1'' longa, ad ipſius baſin, quae ſummitatem truncatam craſſiorem tangit, 3''', ad alterum extremum, denuo mutilatum, 1½''' lata. Summa huius pedis acetabulorum erat 69, quorum 31 in portione renata numeraui. Noua haec portio, trunco craſſiori, olim mutilato, inſiſtens, tenuior eſt, ipſiusque acetabula minora magisque congeſta ſunt, quam reliqua, in trunco pedis conſpicienda.

Pedibus itaque ſub incremento ſeſe ſecundum omnes dimenſiones extendendi, non ſolum, datum eſt, quod cum toto corpore commune habent, verum etiam praeter hanc alia, eaque propria, gaudent facultate, qua ipſorum extremitates progerminant, nouaque continuo protrudunt acetabula, ſiue integri fuerint pedes, ſiue truncati. Illorum vero prouentum nec ad eorum baſin, neque in medio ſuccedere, ſed ad apices tantum, exinde clarum eſt, quoniam parua nunquam magnis mixta viſa ſunt; quod alias, ſi contrarium obtineret, proportionem, quam inter ſe ſemper immutatam et conſtanter ſeruant, turbaret neceſſario.

Duo tantum in hunc vsque diem mirabilis iſtius facultatis exempla, quae maximam cum praeſenti habent analogiam, cognita fuere eruditis, quorum vnum cancri, ſtellae marinae alterum, ſuppeditant; illorum enim chelas, pedes, antennas et oris tentacula, vel ex parte tantum, vel ex toto deſtructa, redintegrari iterum,

rum, vel denuo renaſci, Ill. *de Reaumur*, cuius e vita diſceſſum, ob ſumma eius in Phyſicam et Hiſtoriam naturalem merita, omnes lugent eruditi, ſatis ſuperque demonſtrauit (*a*); horum vero radios, quouis modo mutilatos, reparari, obſeruarunt Cel. *Iuſſieu*, *Guettard*, *Gerard de Villars* (*b*), *Needham* (*c*), aliique. Nec mirum id omne nobis videbitur, ſi in mentem reuocare velimus phaenomena, in aquarum dulcium Polypis, vermibus varii generis aquaticis, Lumbricis terreſtribus, Hirudine-Limace, Millepedibus aquaticis, Vrticis marinis etc. obſeruata, quibus omnibus, in duas pluresue partes diſſectis, ſingulae partes in totidem transformantur animalia, primo, quod antea coniuncta efformabant, ſimilia; quae ſane eo maiore digna ſunt admiratione, quo minus anguſtis ſingularis iſta propagatio circumſcripta eſt limitibus; experimento tamen, in cancrorum cauda inſtituto, non reſpondiſſe euentum, Ill. *de Reaumur* (*d*) teſtatur; neque feliciori cum ſucceſſu in Polypo noſtro poſſe inſtitui, facile crediderim. Sic quo-

(*a*) In Comm. Acad. Scien. Pariſ. An. 1712. Hiſt. 45. Mem. 295. edit. Amſt.

(*b*) Mem pour ſervir à l'hiſtoire des Inſ. par Mr. de Reaumur, Tom. VI. An. MDCCXLII. 4to Preface pag. 61. 62. et 63.

(*c*) In tractatu, cui titulus eſt: New Microſcopical Diſcoveries, Lond. 1745. 8vo pag. 5. ſcribit: „I have by me the Arm of a „Star-fiſch repairing its Loſs, preſerv'd in Spirits, where the „protrudet Extremity is diſtinctly viſible, as not having arri„ved to the Diameter of the reſt of the Arm.„

(*d*) In Comm. Acad. Scien. Pariſ. Hiſt. 45. Mem. 295. edit. Amſt. pag. 311.

quoque, ſtellam marinam, in duas pluresue partes transuerſim diuiſam, ſucceſſu temporis in totidem abire animalia integra atque perfecta, valde dubito, cum eius radios tantum, ad corpus reſectos, renaſci, *Gerardum de Villars* (a) docuerit experientia; Loliginem tamen atque ſepiam eadem, qua Polypus noſter, gaudere facultate, nullus dubito.

* Fig. 3. c. *Membranae* *, quibus pedum inferiora coniunguntur, validae ſatis ac craſſae, ortum ſuum trahunt ex cutis prolongatione et duplicatura, fibrarum muſculoſarum ſtratum continente. Earum vna, quae inter duos
* Fig. 3. q. pedes, frontem reſpicientes *, expanditur, omnium minimam habet ſuperficiem, inſequentes latiori et al-
* Fig. 3. r. tius excurrente * gaudent, infima ** autem, qua pe-
** Fig. 3. s. des, fiſtulam reſpicientes, connectuntur, ab imo pedum aſſurgens, priores extenſione ſua ſi non ſuperat, certe iisdem aequalis eſt. Omnes vero, poſtquam palmatae eſſe deſierunt, vlteriori ipſorum decurſu pedum latera quaſi alata reddunt.

* Fig. 1. c. 2. l. Deſcriptione pedum abſoluta, tranſeo ad CAPVT * et, quae ad id referri poſſunt, partes. Notamus
* Fig. 3. t. ante omnia oris * aperturam, in pedum centro, ellipticam, exiguam, et in reſpectu ad oculos, horizontaliter diſpoſitos, perpendicularem.

Eundem ſitum ſequutur dentes bini, nigricantes,
* Ibid. quorum extremitates *, prominentes, aduncum Pſittaci
* Ibid. roſtrum quodammodo forma referunt. Oris labia *, iſtam

(a) Mém. pour ſervir à l'hiſtoire des Inſ. Tom. VI. Preface pag. 63.

iſtam aperturam coarctantia, tenuia, plicata, in varios lobos diuiſa, et ad oras fimbriis linearibus ornata ſunt. Ipſum caput, imae pedum baſi, coarctatae, proxime iunctum, mole quidem paruum eſt, ad verticem leuiter impreſſum, facie inferiore planiuſculum. Oculi * duo, ad latera capitis poſiti, ſubrotundi, pro illius paruitate grandes. Longitudo capitis eadem circiter eſt, quae inter huius frontem, et ſummum membranae pedum, eam reſpicientium, marginem menſuratur. Vidi etiam in capite omnium, quos diſquiſiui, Polyporum, vnico tantum, et minimo quidem, excepto, qui iis caruit, appendiculas tres cutales, anguſtas, tanquam totidem barbulas, quarum vna ante, altera ſupra oculum, cantho tamen ipſius poſtico proprior, quam antico, tertia denique pone eum, erat diſpoſita. Quae ſupra oculum, caeteris duabus duplo maior erat; abſolutam vero omnium longitudinem certo determinare difficile eſt, quoniam vltra modum ſe extendi elongarique facile ſinunt. * Fig. 1. o. p.

Partem capitis contractiorem * poſticam pro collo habere poſſunt ii, quibus diſtinctio haec placuerit; id ipſum autem tam breue et ab ipſo capite tam parum eſt diſtinctum, vt nomen illud vix mereatur. *Fig. 1. q.

Tandem ad ABDOMEN * deuenio, quod ouatum, et perpendiculariter vtrinque compreſſum eſt, diametro horizontali verticalem ſuperante, ita tamen, vt ſuperior aeque ac inferior abdominis facies ſubconuexa permaneat, adeoque latera eius * maximam inde habere conuexitatem, per ſe patet. *Fig. 1. h. 2. m. *Fig. 2. m.

In huius ſuperficie ſuperiore, ſeu in dorſo, non niſi appendiculae cutales ſunt conſiderandae, numero

 qua-

quaternae, quarum prima ad anteriora et medium dorſi conſpicitur; in aliquali, ab hac, diſtantia, binae aliae, ex aduerſo ſibi oppoſitae, et in medio fere dorſo conſtitutae, quarta ad poſteriora et medium poſita. Omnes, a baſi latiore in apicem aſſurgentes, planum formant ſubtriangulare, lateribus corporis obuerſum, eorumque longitudo in maximo, quod vidi, ſubiecto, duarum erat linearum, nec in eodem multo longiores erant barbulae, circa oculos, excepta media, 5 – 6 lineas longa. In vniuerſum itaque decem ſunt appendiculae, ab elongata cute ortae, tres ſc. in vicinia ſinguli oculi, et in dorſo quatuor, easdemque in omnibus obſeruaui Polypis, ſi duos iſtos, in ſpiritu vini ſeruatos excipiam, quorum maior iis tantum, quae in dorſo ſunt, minor omnibus plane caruit.

In inferiore abdominis ſuperficie varia occurrunt notanda, inter quae omni attentione digna eſt ipſius *alui* apertura *, tam larga et patens, vt per eam pulmones facile poſſint conſpici; Saccum nempe muſculoſum eſſe abdomen, in quo praeter pulmones, viſcera, propriis inuoluta membranis, recondantur, anatome huius animalis docebit vberius.

* Fig. 2. *n.* et *p.*

In ſummo ventre, ſupra alueum, *Fiſtula* * caua exporrigitur antrorſum ſuper capitis faciem inferiorem, quam modo in dextram, modo in ſiniſtram transferre partem, hacque mare transmittere dicuntur Polypi (*a*). Infundibulum iſta refert conicum, perpendiculariter compreſſum et perforatum, cuius lumen ſupe-

* Fig. 2. *q.*

(*a*) Ex Ariſt. Plinius. Hiſt. nat. Libr. IX Cap. XXIX. §. XLVI. p. 318. edit. Pariſ. in 4to An. MDCLXXXV.

ſuperius * exiguum, inferius * amplum eſt. Summitas ipſius, parum incuruata, extrorſum flectitur, et a capite aliquo diſtat ſpatio. Eadem, ad baſin, vtrinque ſibi habet connexum velum * quoddam conniuens, quod, ſi expanditur, ſinum offert amplum, lumine fiſtulae maiori haud multo inferiorem, fundoque gaudet obtuſo et imperforato.

* Fig. 2. o.
* Fig. 2. r.
* Fig. 2. s. et t.

Fiſtula aeque ac vela e tunicis compoſita ſunt robuſtis, ac tenacibus, quae muſculoſam, qua mouetur, includunt; immo cartilaginea fere, et elaſtica quorundam mihi viſa fuit fiſtula. Si quis ſibi fingat margines fiſtulae, et velorum, cum ſummo aluei margine connatos, fiſtulaeque ſummitatem plane conſtrictam, clauſum omnino habebit abdominis alueum; nec, viuum animal, ſi neceſſitas ita poſtulet, eum ſubinde plus minusue claudere, vero diſſimile mihi videtur.

In ſpatio, inter imum fiſtulae, velorum, et ſummum aluei marginem, relicto, quod in minimo Polypo $5\frac{1}{2}'''$ aequabat, obſeruantur lacerti * duo muſculoſi, ad latera poſiti, qui ab angulo, fiſtulae veloque communi, lato, et, quoad figuram, fere rhomboideo principio procedunt, tunicae muſculoſae * ope inter ſe iuncti, cuius in medio duo apparent oſtia, quorum id *, quod ſuperius, et proxime ſupra alterum ſitum eſt, filum ferreum tenue ad duarum linearum profunditatem admiſit vsque; in alterum * vero, quod inferius, et largum magis eſt, ad 3 vsque lineas idem immittere potui. Decurrunt canales, quibus haec oſtia reſpondent, intra muſculoſam tunicam, ac inferioris

* Fig. 2. u. u.
* Fig. 2. v.
* Fig. 2. x.
* Fig. 2. y.

rioris extremitas illam ſuperioris quaſi lambere videtur; tunicae vero muſculoſae medium, ſtatim, vbi ad ſummum, mediumque aluei marginem * peruenit, hunc verſus eleuatur, eique adnatum, ſeptum conſtituit 3½‴ longum.

*Fig. 2. z.

Quae de ſepto oſtiorumque ſitu modo dixi, de minimo tantum Polypo dicta velim; longe enim aliter res ſeſe habebat in Polypo maiori, itidem in ſpiritu vini ſeruato, in quo, neque oſtia circa tunicam muſculoſam, neque ſeptum offendi, licet digitum vnum alterumue, ad duos vsque pollices, ſine vllo impedimento, in ipſum alueum immiſerim; duo tamen eiusmodi orificia, in ligamenti cuiusdam lati et muſculoſi margine, quod lacerti muſculoſi ſiniſtri pars erat, diſtincta, ſibique proxima vidi, ac, praeter iſta, alia duo, ſemilunaria, ad ſuperiorem arcum cartilaginea, quae forſan abrupti illorum erant fines; ſaltem interna, oſtiisque obuerſa abdominis facies canalium reliquias prae ſe ferebat, quorum vnum eſſe inteſtinum rectum, alterum folliculi, liquorem nigricantem continentis, ductum excretorium, ex anatome comperi.

Supereſt, vt mentionem faciam orificii, quod in Polypo maximo, et quidem in abdominis parte poſtica, ſiniſtra et laterali, deprehendi: Erat nempe illud, in ſuperficie ipſius externa, ſubrotundum, patulum, vnius lineae diametri, ſtilumque immiſſum, ad quatuor vsque lineas, retrorſum admittebat. Separata cultello cute, ſub qua latuit, in oculos incidit canalis, ſubſtantiae duriusculae et albicantis, quo diſſecto, apparuit, ipſius cauitatem anguſtari exitum verſus, ac, in

in vnius lineae ab exitu diſtantia, eleuari ſubſtantiam, et ſinum poſt ſe relinquendo, valuulam ibi formare ſpuriam, qua contentis mora iniicitur; ſtilus enim, in oſtium immiſſus, eam tranſiit quidem, in canale vero, verſus exitum ductus, in eandem facile impegit. Caeterum laeuis erat iſte canalis, nilque, praeter plantae cuiusdam marinae fragmenta minora continebat, et, poſtquam ad quatuor vsque lineas ſub cute decurrit, abdominis ſubſtantiam perforabat, verum, eodem in loco, abruptus, potioris ſui tractus veſtigia tantum reliquit, in interna abdominis ſuperficie conſpicienda.

ZOOPHY-

ZOOPHYTI MARINI,

E

CORALLIORVM GENERE, HISTORIA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Praefatio.

Perluſtranti mihi ante aliquot menſes varia, in mari albo genita, Naturae corpora, quae Archangelopoli huc Petropolin miſſa accepit Amicus, cuius erga me beneuolentia factum eſt, vt eorum, quae prae reliquis attentione digna videbantur, tam deſcriptionem, quam accuratam delineationem tradere nunc queam, inter alia nonnulla obuenerunt Zoophyta, quorum partim deſideranda eſt vberior, quam, ab aliis traditam, legimus, deſcriptio, partim quae in hunc vsque diem in fundo maris delituere incognita. Quod in praeſenti diſſertatione exponam Zoophytum, aliis, in poſterum tradendis, ideo anteponendum eſſe iudicaui, quod ad explorandam non ſolum eiusmodi corporum ſtructuram et naturam, quam inter animalem et vegetabilem quaſi mediam eſſe pluribus argumentis probare alio tempore conſtitui, verum etiam ad illuſtrandam Corallii rubri, cui proxima ſimilitudine accedit, hiſtoriam plurimum conferre poſſe, mihi videretur. Quae autem ad vtrius-

vtriusque inter ſe comparationem, et ſpeciatim ad Corallii rubri illuſtrationem, proprie ſpectant, ſub annotationum forma textui ſubnectam, ne, ſi huic immiſceantur, oboriatur confuſio.

* * * * * *
* * *

Synonyma.

CORALLIVM ſpongioſum, leue; ramis tuberoſis, nutantibus; tuberculis aggregatis. Tab. XIII. Fig. 1.

Arbuſcula marina coralloides. *Cluſ. exot. libr. 6. c. 1.*

Corallina II. ſiue Corallinae facie grumoſo cortice. *Caſp. Bauh. et Io. Baub. Hiſt. 3. p.* 805. *Cap. XLII.*

Planta marina coralloides. *Worm. muſ.* 230.

Plante appellée par les Mariniers *Main de Larron. Marſilli Hiſt. phyſ. de la mer. Part.* IV. p. 85. Pl. XV. n. 74, 75. Pl. XXXVIII. Fig. 177. n. 1, 2, 3, et Pl. XXXIX, Fig. 178. n. 1, 2, 3, 4, 5. pag 163. *Pontoppid. Nat. Hiſt. von Norw. Copenhag.* 1753. 1. Th. pag. 273. I. Tab. No. 2. Fig. No. 1; et pag. 274. Tab. No. 12. Fig. No. 4.

Lithoxylon Noruegicum. *Linn. Muſ. Teſſ* p. 120. *Tab.* X.

Alcyonium ſtipite arboreſcente, ramis obtuſis. *Eiusd. Syſt. Nat. edit. dec.* p. 803. no. 1. (*a*).

Deſcriptio.

*Tab. XIII Fig. 1. *a. a.* * Fig. 1. *b.* ** Fig. 1. *c. c. c.* *Caulis* a poſtica facie conuexus, ab antica * planiuſculus, inferius * autem vtrinque leuiter compreſſus, nodos, ſeu *tubera* ** potius, paſſim protrudit variae magnitudinis, ſubtrotunda, verrucoſa, ad poſticam faciem numeroſiora, ad anticam pauciora.

Haec conſtantem in ſitu ordinem haud ſeruant, vtpote modo oppoſita ſibi inuicem, vel ſecundum caulis longitudinem vel latitudinem, modo alterna, rarius autem confluentia.

*Fig. 1. *d.* *Fig. 1. *e.* **Fig. 1. *f.* Praeter haec tubera ſolitariae * etiam vel binae *, interdum et ternae **, pauco quidem numero, verrucae, vel *tubercula* (*b*), occurrunt.

*Fig. 1. *g.* *Tab XIII Fig 9. *b.* XIV Fig. 1 et XV. Fig. 1. *a. a.* Tota denique caulis ſuperficies *poris* innumeris eſt pertuſa, in planiore caulis facie * euidentioribus, in conuexa obſcurioribus, quorum ſinguli, ſi curatius adſpiciuntur, papillae * (*c*) minimae centro obſeruantur

(*a*) Tantum diſtat ab Alcyonio, quantum v. g. Agaricus a Lycoperdo, vtpote forma, ſubſtantia atque ſtructura diuerſiſſimum.

(*b*) Haec *Tubules* Marſillio, *tubercoli* vel *prominenze* Vital. Donato dicuntur.

(*c*) *Glandules* Marſil. l. c. pag. 112. „L'entiere ſuperficie de „l'écorce paroit toute grainée en forme de chagrin, par l'amas „des glandules. (Vid. Tab. XXV. Fig. 113. F. F.)

tur inſculpti. Hae in antica caulis facie, iisque in locis praeſertim, in quibus poros euidentiores * videre licet, vix ſenſibiles et quaſi obliteratae, longiorique interuallo poſitae ſunt, cum e contrario in poſtica caulis facie, et, tam circa tubercula *, quam ſuper haec ipſa *, inprimis facile in oculos cadant. Omnium autem euidentiſſimae, proximeque ſibi adiacentes, in ramis caulinis, de quibus mox dicam, obſeruantur. *Tab.XIII. Fig. 1. g. *Fig. 1. i. *Tab.XIII. Fig. 1. l. Fig. 2. m. XIV. Fig. 1. etc.

Rami * vagi vtplurimum e caulis lateribus, quo ipſo parum graciliores ſunt, rarius ex antica vel poſtica eius facie orti, erecti, tubera non ſolum, prout caulis, et quidem poſtica facie potiſſimum, ſolitariaque tubercula haud pauca ferunt, ſed in ſummitates etiam tuberoſas, verrucoſas, ac nutantes * deſinunt. *Tab.XIII. Fig. 1. n. n. n. n. *Tab.XIII. Fig. 1. o. o. o.

Rugae * longitudinales, irregulares, quas in ramis copioſiores longe ac profundiores quam in caule videmus, ſub Zoophyti exſiccatione demum ortae eſſe, illorumque prae hoc maiorem ſucci abundantiam indicare videantur, cuius poſt euaporationem fieri aliter non potuit, quin mollior ramorum ſubſtantia corrugaretur. *Tab.XIII. Fig. 1. p. p.

Papillae innumerae, in medio perforatae, totam, pariter vt in caule, ramorum ſuperficiem occupant, et diſtinctae melius ac conterminatae, quam in iſto, ſunt, quamuis ſubrotundam vel hemiſphaericam potius ipſarum figuram, ob diſtorſionem a contrahente ſeſe ſubſtantia paſſam, cum oblonga * haud raro commutauerint. *Tab. XV. Fig. 1.

Tubera ramorum, ſi debitam acquiſiuere magnitudinem, partialium quaſi ramorum * ſub forma apparere, teſtantur ipſorum aliquot, gracili baſi ramis inſiſtentia.

Tubercula, ſiue ſolitaria *, ſiue in tuber **, quod inter ſe formant, aggregata, papillata *** ſunt in ambitu (*d*), inque medietate labiis **** octo (*e*), totidem oris aperturas * anguſtas relinquentibus, inſtructa.

Eadem, licet magnitudine haud paria ſibi ſint, inſigniter tamen inter ſe non differunt, ſi pauca excipias, notabili planitie atque paruitate ** ab aliis facile diſtinguenda.

Multo magis diuerſam vidi labiorum formam atque ſitum; modo enim repanda ***, infundibulum **** inter ſe efformantia, patentia *, eaque rariora, modo conſtricta introrſumque flexa **, quorum pleraque ſunt, immo, licet minori numero, adeo abſcondita, diſtorta atque retracta, vt os vel deforme ſit, vel ſimpli-

* Tab. XIII. Fig. 1. q.
* Tab. XIII. Fig 1. d. e. f.
** Fig. 1. c. c. r. etc.
*** Tab. XIII. Fig. 2. m. etc. XIV. Fig. 1. etc.
**** Tab. XIII. Fig. 1. s. s. Fig 2. s etc. Tab. XIV. Fig. 1. α
* ib. et XIV. Fig. 1. β.
** Tab. XIII. G. Tab. XIV. Fig. 9.
*** Tab. XIII. E. F. Tab. XIV. Fig. 6. 8.
**** Tab. XIII. C. XIV. Fig. 4
* Tab. XIII H. et XIV. Fig. 7.
** Tab. XIII. Fig. 2. et D. Tab. XIV. Fig. 1 et Fig. 5.

(*d*) In Corallii rubri tuberculorum ambitu papillas pari modo eſſe diſpoſitas, patet euidenter ex iconibus Marſil. Tab. XXV. Fig 113. no. 3. 4. 5. et Fig. 115.

(*e*) Donati Saggio Della Stor. Nat. Marin. Dell' Adriat. Venez. MDCCL. pag. 49. „ In più luoghi innoltre della ſteſſa (corticis nempe) s' oſſervano piccioli tubercoli o prominenze che ſi danno a divedere all' occhio nudo (Fig. A. f.). Queſti tubercoli alle loro baſi ſono larghetti, e rotundi (Fig. I. n. n.) ſi riſtringono alquanto alla parte ſuperiore (o) e terminano in un labbro groſſetto diviſo regolarmente in otto parti (I. S S.) (G S. S.), più o meno eguali, dalle quali viene ad eſſer formata la bocca (I. t. G. t. H. a.) di ciaſchedun tubercolo etc. „

ſimplicem tantum maiorem porum * referre videatur (*f*). Integra etiam interdum tubercula, quae hemiſphaerica ordinarie ſunt, parum diſtorta conſpiciuntur, hincque labia etiam magnitudine inter ſe haud raro inaequalia *. *Tab.XIII. B. XIV. Fig. 3. *Tab.XIII. D. et Tab. XIV. Fig. 5. 9.

Haec ipſa vero labia, dum contracta ſunt, triangularia apparent, baſibusque *, vt ita dicam, extrorſum, apicibus ** vero conniuentibus oris medium reſpiciunt. Hinc etiam patet, cur os, vel apertura labiorum communis, ſit ſtellata; labiorum enim apices liberi, conniuentes, ſtellae medium, latera vero contigua ipſos ſtellae radios effingunt. Poſſet etiam ipſa labiorum ſubſtantia, ſi cui ita placuerit, ſtella inuerſa nuncupari. Notandum autem hic eſt, labia iſta eſſe tantum apparenter triangularia, quippe quae altius in oris interiora * deſcendunt, et, ex toto repanda, vncinata ** et lamellata *** quaſi apparent. *Tab.XIV. Fig. 1. γ ** Tab. XIV. Fig. 1. & *Tab.XIV. Fig. 17. ** Tab. XIII. F. XIV. Fig. 8 *** Tab. XIII. E: Tab. XIV. Fig. 6.

Numerus tuberculorum omnis in exemplari, naturali magnitudine * depicto, erat circiter 667, inter quae vnicum tantum, decem (*g*) labiis **, iisque omnibus *Tab. XIII Fig. 1. ** Tab. XIII. Fig. 4. u. Tab. XIV. Fig. 21. 6.

(*f*) Marſillius, cum pag. 112. aperturam tuberculorum ordinarie ſtellatam eſſe dixerat, paullo inferius addit: „mais elle (ſc. „aperturae figura) n'eſt pas toujours de cette ſorte, et on trouve „de ces mêmes trous, ſpheriques ſans rayons, et d'autres de figure oblongue „

(*g*) Marſillius ſemel de ſex (l. c. p. 112.) bis de octo (l. c. p. 115. et 171.) nullibi vero de ſeptem labiis ſeu radiis loquitur; valde itaque ſuſpicor, ex chalcographi phantaſia factum eſſe, vt in Tab. XL. Fig. 180. No. 1. plures Corallii flores ſex ſeptemque

omnibus numeris abſolutis, inſtructum videre mihi contigit.

Subſtantia terrea eſt, cum gelatina et ſale marino permixta, valde poroſa, ſpongioſa, raſu atque ſciſſu facilis, digiti tamen impreſſioni nequaquam cedens. Particula eius dentibus contrita, vel cultro ſecta, eodem fere modo ſe habet, ac ſic dicti ſepiae oſſis pars ſpongioſa, cum quo, quod ad haec attinet, maxime conuenit. Glutinoſi etiam et coriacei aliquid prodit maſticata. Terreis particulis omnium maxime confertus eſt cortex, paucioribus medulla, pauciſſimis parenchyma; ſalinarum reſpectu primum tenet locum medulla, alterum cortex, parenchyma tertium; glutinoſis vero abundat parenchyma, minus medulla, omnium minimum cortex.

Color ex albido luteſcens vndiquaque; longe alium autem vidit olim *Cluſius*, et nouiſſime Cel. *Linnaeus*; ille ſc. miniaceum, hic vero rubrum, cuius ne ſtigma quidem in noſtro apparuit. Tantam diuerſitatem non mirabuntur ii, quibus plantarum, quas vulgo vocant, marinarum in colore varietas, plurimas ob cauſas mutabili, eſt perſpecta.

Odor grauis, non inſuauis tamen, qualem corium illud album vel flaueſcens ſpirat, quod alutarii perficiunt.

Sapor ſubſalſus, abſque amaritie.

Pondus

que radiis appareant inſtructi, quam ipſe Auctor fortaſſe vidit. Numerum radiorum octonarium vtplurimum obſeruari in Cel. Donat. l. c. legitur; vid. Not. (*e*). Nimiam harum partium paruitatem et inaequalem contractionem aut extenſionem in cauſa eſſe poſſe, vt vnum alterumue labium, ni probe aduertas, oculorum aciem facile fugiat, in noſtro ipſe ſum expertus.

Pondus erat vnciae vnius cum duabus drachmis, ex quo, ſi naturalem in Tab. XIII. Fig. 1. magnitudinem ſpectes, ſpecificam eius grauitatem, cum ſpecifica Coralliorum rubrorum grauitate comparatam, exiguam valde eſſe, facile erit iudicatu. Erat autem ratio eius ad aquam, vt 600 circiter ad 1000.

Structura compoſita eſt ex cortice *, parenchymate ** atque medulla ***, quibus addi debent tubercula ſtellata, certa procul dubio, eaque connata ac naturalia, polyporum domicilia.

Cortex, (*b*) exterius Zoophyti ſtratum, idque tenuiſſimum, papillis plurimis, quarum mentionem ſupra iam fecimus, in medio poro * ſimplici, minimo, nudis oculis tamen conſpiciendo, perforatis ſcatet, quibus tranſverſim diſſectis, apparet, poros nihil aliud eſſe, quam canaliculorum, ſeu ductuum ** breuium, horizontalium, per corticem *** non tantum, ſed per ipſam etiam parenchymatis ſubſtantiam * extenſorum, et ab exterioribus interiora verſus ſenſim ampliatorum orificia (*i*). Diſſectorum horum ductuum lumina ſubrotunda ** vel oualia *** ſunt; de quibus ſtatim plura.

Subſtantia

(*b*) Et Corallium rubrum cortice gaudet; vid. Marſil. Donat. aliique.

(*i*) Dari eiusmodi poros, iisque reſpondentes ductus, tam in Corallio rubro, quam in pluribus aliis plantis marinis, ex analogia ſtatim diuinare licet; vidit enim Marſillius, quas improprie ſatis glandulas vocauit papillas, et ductus, foras patentes poro, quoque vidiſſet, niſi forte difficultas, eos in molli parenchymate obſeruandi, obſtitiſſet. Immo non amplius dubium eſſe poteſt, quin exiſtant, ſi Cel. Peyſſonelium * in Tranſact. Philoſ. Vol. XLVII. MDCCLIII. Lond. edit. attendere velimus,

*Tab. XIII Fig. 6. x. Tab. XV. Fig. 5. b. **Tab. XIII Fig. 6. y. Tab. XV. Fig. 5. c. *** Tab. XIII. Fig. 6. z. XV. Fig. 5. d. *Tab. XIII Fig 9. et XV. Fig. 1. a. a. ** Tab. XIII. Fig. 6. a. a. Fig. 8. a. a. Tab. XV. Fig. 5. e. XIV. Fig. 24. ζ ζ *** Tab. XIII. Fig. 10. *Tab. XIII Fig. 6. y. Fig. 11. et 12 XV. Fig. 3. 4. 5. c. e. ** Tab. XIV. Fig. 21. η η. *** Tab. XIV. Fig. 21. 9. 9. 9.

Subſtantia corticis, vt apparet, homogenea, albida, compacta, raſuque facilior eſt parenchymate atque medulla, quorum illud ob glutinis exſiccati recrementa, haec, quod coactilis ad inſtar aliquatenus ſe habet, cultro minus cedit. Cortex etiam cum parenchymate arcte cohaeret, adeo, vt ne diuturna quidem maceratione nexu ſuo ſoluatur.

Parenchyma, (*l*) craſſius cortice inuolucrum, flaueſcens ac ſpongioſum eſt; tranſuerſim enim diſſectum, praeter maiora ductuum iſtorum lumina, plurimos vndiquaque poros, vel cellulas minores *, nudo tamen oculo conſpiciendas, offert.

* Tab. XIII Fig. 12. β. β.

Hoc ipſum inuolucrum in lateribus caulis atque ramorum conuexis craſſius * atque ſpongioſius eſt, quam in planioribus eorum faciebus **; et in ramis maior eius craſſities atque laxitas, quam in caule, obſeruatur. Quod

* Tab. XIV. Fig. 21. 22. Tab. XIII Fig. 6. γ. Tab. XV. Fig. 5. ε.

** Tab. XIII. Fig. 6. γ. Tab. XV. Fig 5. ſ.

mus, dicentem, pag. 453: „This bark appears pierced with „little holes, and theſe anſwer to ſmall cavities upon the ſub- „ſtance of the Coral. When you take of a piece of this bark, „you obſerve an infinite quantity of little tubes, wich con- „nect the bark to the plant, and a great number of little „glands adhering to theſe tubes; but both one and the other „do not diſtinctly appear, except when they are full of juice. „It is from theſe tubes and glands that the milky juice of „Coral iſſues forth.„

* Poſtquam librum manuſcriptum, cui Titulus eſt: Traité du Corail etc. ab Auctore acceperat Societas Regia Scientiarum Londina, ſummam eius in Vol XLVII. publicauit.

(*l*) Hoc in Corallio rubro a cortice non diſtinxit, ſed pro vno eodemque cum eodem habuit, Marſillius, iure ab eodem ſeparauit Donatus, exterius inuolucrum *corteccia*, interius *Tonaca* vocando.

Quod ad ipſam vero parenchymatis ſubſtantiam attinet, celluloſus eius contextus eo ſpongioſior eſt, quo maior ductuum transuerſorum inter ſe diſtantia, et quo minor eſt horum diameter; hinc in caule *, iiſque in locis, in quibus tubercula deficiunt, laxior vt plurimum, quam in ramis ac inter tubercula *, obſeruatur, vbi compactus magis atque compreſſus eſt. Omnium autem maxime conſtipatum vidi eius ſtratum ad tuberculorum cellas *, quarum ambitum proxime cingit.

*Tab. XIII. Fig. 5.
*Tab. XIII. Fig. 4. et 5. Tab. XIV. Fig. 21 et 22.
*Tab. XIII. Fig 5, 8. et Tab. XIV. Fig. 22. x. x.

Eadem omnino ductuum transuerſorum ratio eſt, quorum lumina, pro maiore vel minore ipſorum inter ſe diſtantia, contextusque celluloſi aucta vel imminuta laxitate, vel minora vel maiora ſunt. Propior autem eorum vicinitas, tantaque luminum amplitudo vix ſpectatur alibi, quantam tuberculorum cellas * inter videre licet; plus enim ſpatii, quam ipſe contextus parenchymatis celluloſus, occupare non raro ſolent.

*Tab XIII. Fig. 4. et Tab. XIV. Fig. 21.

Nec formam luminum omnibus eandem eſſe poſſe, ex hoc ſtatim elucet, quod ad varias, quas papillae patiuntur, contractiones ac diſtorſiones et ipſi ſe componant canaliculi: ſubrotunda ſc. vel oualia, quorum plurima ſunt, in faciebus trunci ramorumue planioribus, elliptica in conuexis eorundem lateribus, immo aliquantum anguloſa * circa tuberculorum cellulas haud rara transuerſa ſectione in conſpectum veniunt. Sic quoque fundi ſeu baſis conformatio non eadem omnibus eſt; modo enim planus, modo plus minusue in medio depreſſus, modo e lato in anguſtum ſubito contra-

*Tab. XIII. Fig 4. et 5. Tab XIV. Fig. 21. et 22.

contractus; haec cellularum regionibus, iſtae caulis ac ramorum faciebus et lateribus, nunc memoratis, propriae ſunt varietates.

*Tab. XIV. Fig. 21, *l. l.* ** Tab. XIV. Fig. 21. η. η. Tam cellularum parenchymatis minimarum *, quam ductuum transuerſorum interna ſuperficies ** colore e croceo-flaueſcente, ipſa vero parenchymatis ſubſtantia, ſimili quidem, aſt longe pallidiore, in ſulfureum inclinante, tincta eſt. Excidit etiam e plurimis horum ductuum inter diſſecandum molecula e ruſo-flaueſcens, plus minusue rotunda, concretam referens gelatinam. De reliquo parenchyma medullae aeque firmiter, ac ipſi cortex, adhaeret, nec, licet diuturna prius maceratione fuerit emollitum, vllo modo integrum (*m*) ab ea ſeparari poterat; num autem vigens Zoophytum delibrari ſe patiatur, quaeritur?

Medulla (*n*) maximam pluribus in locis Zoophyti partem, eamque internam, conſtituens, albida, cortice

---

(*m*) Idem fieri in Corallio rubro *Peyſſonelius* refert, libr. cit. pag. 453. „The bark of Coral covers the whole plant from the root to the extremities of the ſmalleſt branches. It will peel of; but this is only when juſt taken out of the water. After it has been expoſed for a ſhort time to the air, you cannot detach it from the body of the Coral, without rubbing it to powder.„

(*n*) Haec Corallii rubri pars *Subſtance de Corail* Marſillio, Donato *materia del Corallo* audit.

Si explorata omnibus eſſet veritas, nec mera tantum hypotheſis, qua ſubſtantiae Corallii lapideae geneſin vel ex globulorum lapideorum depoſitione, vel ex liquore lacteo, e patentibus parenchymatis vaſorum extremitatibus effluente, ac ſucceſſiue lapi-

cortice tenacior, ſpongioſior, raſuque difficilior, in transuerſum diſſecta, poros * exhibet diuerſae magnitudinis, ſc. peripheriam verſus vtplurimum minores, in medio maiores, numero iis, qui in cortice et parenchymate diſſecto ductuum transuerſorum lumina ſunt, haud pauciores, minus tamen concinno diſpoſitos ordine, magisque irregulares. *Tab. XIII. Fig. 6. z. Tab. XV. Fig. 5. g g.

Diſſecta ſecundum longitudinem medulla, conſpiciuntur ſulci *, vel ſtriae cauae, canaliculis iſtis, quos vermes xylophagi rodendo perficiunt, quodammodo ſimiles, modo breuiores, modo longiores, inque longum et flexuoſe parum excurrentes. *Tab. XIII. Fig. 3. ε. ε. Tab. XIV. Fig. 26 λ. λ.

Hi ipſi vero non ab vno ad alterum trunci ramorumue extremum continui, ſed breui vtplurimum itinere interrupti ſunt, porisque ſub transuerſa ſectione conſpiciendis reſpondent, nec niſi canales adaperti ſunt, in medietate ampliores vtplurimum, verſus extremitates anguſtiores. Interna eorundem ſuperficies membrana quaſi ſericea eſt obducta, conſpiciendaque hinc et inde praebet oſtiola *, egredientium ſc. ramorum lumina, in quos ipſi canales diſpertiuntur. *Tab. XIV. Fig. 26. μ. μ.

Medullae etiam ſuperficies * perbreuibus ac inaequalibus ſulcis **, ſericea pariter membrana inueſtitis, exarata *Tab. XIII. Fig. 13. et Tab. XV. Fig. 6. **Tab. XV. Fig. 6. a.

lapideſcente, euincere conati ſunt recentiorum ſummi Naturae ſcrutatores, maximam, quod ad hanc attinet, corallium inter atque Zoophytum noſtrum, quantumlibet quoad reliqua illi ſimile, profiteri diſſimilitudinem, certe forem coactus; verum organicam ſubſtantiae illius eſſe ſtructuram, in peculiari diſſertatione demonſtrabo.

exarata, et quaſi exeſa eſt, horumque in ſinubus hinc et inde videntur canaliculorum medullarium, peripheriam verſus oblique excurrentium, oſtiola *, ſuccis medullam et parenchyma interfluentibus peruia. Parenchymate cultello caute reſciſſo, ſulci hi vna cum ſuis oſtiolis facile quidem et vbique denudantur, in maioribus tamen ramis caulibusque, in quibus ampliores, profundiores et diſtincti magis ſunt, quam in tenerioribus ramulis, omnium optime ſub oculos cadunt.

* Tab. XV. Fig. 6. b.

Admiranda ſane Zoophyti huius ſtructura eſt, quod medulla, in medio * alias conſiſtens, in frondeſcentibus ramorum extremitatibus ** de via quaſi deflectat, cellisque polyporum contiguis attribuatur tantum locus in latere *, de quo iſta deflexit, ne ſc. hae vlteriori, quod molitur natura, obſtent incremento.

* Tab. XIII Fig. 6. et 7. Tab. XIV. Fig. 25. Tab. XV. Fig. 5.
** Tab. XII. Fig. 3.
* Tab. XIII Fig. 3 ς

Dantur quidem ramorum extremitates et tubera, e trunci ramorumue lateribus protruſa, quae ab omni ** parte cellas contiguas, tenuibus tantum parietibus a ſe inuicem ſeiunctas, offerunt; verum ex his nouos enaſci haud poſſe ramos, quis non videt? Medullae enim pars, quae in eiusmodi tuber abit, cellas nunquam tranſcendit, ſed intra illud, tenui ſaepe extremitate, prope extremarum cellarum fundum * terminatur. Accedit etiam, quod ſitu, quem in tuberum horum medio ſemper conſeruat medulla, praecluduntur.

** Tab. XII. Fig. 7. Tab. XIV. Fig. 25. et Tab. XIII. Fig. 8. π. Tab. XIV. Fig. 24. ν.
* ibid.

Corallio rubro, cuius tubercula in aequaliori inter ſe inuicem diſtantia diſponuntur, mechanismo iſto non erat opus, cum e contrario noſtrum, quod in glomera ea congerit, absque eo in tantam, quanta

non

non raro excellit, magnitudinem (σ) excreſcere non poſſet.

Satis firmum etiam exinde adferri poteſt argumentum, quo polyporum, cellarumque, quas habitant, ex ipſo Zoophyto ortus probatur, ſenſu non minus proprio, quam quo Cereorum v. g. flores ex ipſa plantae ſubſtantia pronatos, nec paraſiticos eſſe aſſerimus.

Cellae *, polyporum habitacula, quorum quodvis verrucae, ſeu tuberculo, in Zoophyti ſuperficie conſpiciendo, reſpondet, vlteriorque ipſorum tuberculorum, et quantum de polyporum exuuiis licuit dignoſcere, reſtat expoſitio. *Tab. XIII. Fig. 8. *i. k.* Tab. XIV. Fig. 3. 4. 5. 6.

Tenui primum, transuerſim per tuberculi * ſummitatem, reſecta lamina, praeter corticis ** ſubſtantiam, qua ipſa conſtant labia, et aperturam, quam inter ſe formant ſtellatam, nihil in conſpectum prodit. *Tab. XIII. L. Tab. XIV. Fig. 11. ** Tab. XIV. Fig. 11. *a.*

Iterata eodem modo ſectione, labia non, vti prius, cum cortice continua, ſed ſub diſtinctae ſtellae * albicantis forma, parenchymate ** exterius, interius ſinuoſo hiatu *** ab eodem ſeiuncta apparent. Parenchymatis tum contextus ſpongioſo-celluloſus, quo propior eſt tuberculi ſummitati, eo ſubtilior atque tenerior deprehenditur. *Tab. XIII. M. Tab. XIV. 12. *a.* ** Tab. XIV. Fig. 12. *b.* *** Tab. XIV. Fig. 12. *c.*

 Diſſecta

(σ) Trium enim pedum, immo duarum ſaepe vlnarum, et quod excedit, altitudinem attingit, cum Corallium rubrum pedem pariſinum raro ſuperet.

*Tab. XIV. Fig. 12. π. ** Tab. XIII. N Tab. XIV. Fig. 13. τ. *** Tab. XIII. N. Tab. XIV. Fig. 13. υ.ω. **** Tab. XIII. N. Tab. XIV. Fig. 13. φ. *Tab. XIII. O. Tab. XIV. Fig. 14. ψ. ** Tab. XIII. O. Tab. XIV. Fig. 14. χ. *Tab. XIV. Fig. 14. ω. *Tab. XIV. Fig. 12, 13, 14, 18. a a a a. ** Tab. XIV. Fig. 12, 13, 14, 18, b. b. b. b. *** Tab. XIV. Fig. 24. c. t. ****Tab. XIII. L. M. N. O. P et Fig. 4, 5. Tab. XIV. Fig. 11, 12, 13, 14, 18, 21 et 22.

Diſſecta labia, quae iuncta ſtellam repraeſentant, ſubtriangularia * ſunt, angulo acuto ** ſtellae centrum, duobus obtuſioribus leuiterque exſtantibus *** parenchyma reſpicientia; hinc, quod his interponitur latus ****, emarginatum vel ſimum eſt.

Ab angulis omnium labiorum obtuſioribus duplicatis, vel, vt diſtincte magis loquar, ab obtuſiore vnius et proximo, ſimili, alterius angulo *, ſitu ad cellae fundum perpendiculari, ad internam eiusdem ſuperficiem panſim vtplurimum videre licet ſeptum ** tenuiſſimum, coloris flaueſcentis; hinc hiatus ſupra memoratus in tot, quot ſepta ſunt, octo ſc. loculamenta quaſi diuiditur.

Facta profundius ſectione, reflexae labiorum extremitates * in ſtellae, magnitudinis nunc imminutae, ambitu deteguntur, loculamentis ſupra dictis reſpondentes, ſeptisque continuatis, vt prius, a ſe inuicem disiunctae.

Hae ipſae autem pro vario ſitu, vel ſectione, varia etiam ſub forma apparent, integrae modo, modo diſſectae. Interſtitia, a reflexis labiorum extremitatibus relicta, ſepti loco, ſemel tantum repleta vidi gelatina. Praeterea corticem * inter atque parenchyma ** ductuum ſaepius memoratorum lumina, variae diametri, iterum patent.

Ex his facile intelligitur, labia inflexa ***, ſi diſſecentur transuerſim ****, tanquam corticis continuationes, eo vsque in ambitu inter ſe cohaerere, et ſub ſtellae forma fore apparituras, donec loculamenta verſus re

flectan-

flectantur *; nec improprie infundibuli, octo angulis atque carinis alternantibus, limboque totidem laciniis instructi, inuerſique imaginem ** ſub hoc ſtatu ferre dicuntur. Reflexa * autem facile omnia in omnibus tuberculis vidi, denuoque inflexa **, ita, vt extremis apicibus *** cellae fundum reſpicerent. Interdum tamen, licet rarius, vnum vel plura labia recta fundum cellae verſus extenſa, eiusdemque lateribus quaſi agglutinata *, conſpexi, cum reliqua ſolito more reflexa iterumque inflexa ** fuerint. Latiores *** ſemper et craſſiores ſub hoc ſitu, ſub iſto vero tenuiores, filiformes * ac elongatas ** eſſe eorum extremitates, cognoui.

Labia, prima vice inflexa, ſi latera eorum reſpicias, columnam, ſeu conum *** potius, repraeſentant, octo carinis totidemque exſtantibus angulis longitudinalibus exornatum.

Notandum etiam eſt, labia, quam longe ſunt extenſa, colore tamen et ſubſtantia a cortice non differre, verasque eius eſſe continuationes; inferiorem autem labiorum inflexorum partem ſuperiore eſſe albidiorem, conſtanter vidi (p).

Denique monendum erit, eadem ab ea, qua reflexae fieri incipiunt parte, omnem, ad apices vsque, cellae fundo obuerſam faciem glutinis exſiccati ſpecie, ceu pellicula **** obſcure flaueſcente, habere obductam eiusdemque attenuata productione ipſorum inter ſe cohaerere

*Tab. XIV Fig. 14. ω. Fig. 15. 16 d. d.
** Tab. XIII. R.
Tab. XIV. Fig. 20. e.
*Tab. XIV Fig 14. ω.
Fig. 24. f.
** Tab. XIV. Fig. 24.
*** Tab. XIV. Fig. 23. b. Fig. 16. l. Fig. 24. i.
*Tab. XIV Fig. 17. m m.
** Tab. XIV. Fig. 17. n.
*** Tab. XIII Fig. 4. 5, et O, P, R, S.
Tab. XIV. Fig. 14. 18 19, 20, 21 et 22.
*Tab XIV Fig. 17. o.
** Tab. XIV. Fig. 17, m. m.
*** Tab. XIII. Q. R. Tab. XIV. Fig. 20. e. Fig. 23. p.

(p) Quae huc vsque dicta ſunt, et amplius dicentur, ſummam noſtri cum Corallio rubro conuenientiam probant ſufficienter; prout id ex Auctorum de Corallio ſcriptis facile colligitur.

**** Tab. XIII. Q. R. S. Tab. XIV. Fig 23, 20. 19. q. q. q.

haerere extremitates. Hac etiam mediante labia cum

*Tab.XIV. ſeptis * ſupra dictis, cellaeque lateribus ſunt connexa.

Fig. 14. x. Eadem pellicula tentacula * octo divergentia,

Fig 23. r. ſub obliqua ad fundum directione, exporrigit, ſeptis

Tab.XIII. Q et S. ſuccedentia, fundoque leuiter cohaerentia. Sed et haec

Tab. XIV. variant: non raro enim inflexa atque contracta ſub

Fig. 23. ſ. coni octopartita baſi ſtellae lamellatae * faciem prae

Fig. 19. ſ. *Tab. XIII. ſe ferunt.

T. U. V. De ſuper interior cellae ſuperficies ** membrana,

Tab. XIV. pelliculae illi valde ſimili, inueſtita eſt, pro vera eius

Fig. 15. d. Fig. 16. d. continuatione habenda.

Fig. 25. t. t. Pelliculam hanc, annexasque ipſi propagines, po-

**Tab. XIV. Fig. lypi eſſe exuuias, dubium non eſt: ſitus enim eius,

16. u. forma, ſubſtantia, color (q) etc. nihil aliud produnt.

Ita octo polypi tentacula, baſi cohaerentia, extremisque labiorum apicibus adnata (r) ſub radiatae pelliculae

(q) Simili fere poſt exſiccationem colore infectos eſſe Corallii rubri flores inter alios *Marſillius* auctor eſt, lib. cit. pag. 113. „Ces concavitez (cellae ſc.) ſont toutes remplies d'un ſuc glu- „tineux, qui dans le tems que la plante eſt fraiche, eſt de „couleur de lait, mais qui en ſe ſechant ſe conſolide, en for- „me de croute, et prend une couleur de ſafran, qui tire ſur „le rouge.„

(r) Polypum e ſua demigrare poſſe cella, nemo mihi facile perſuadebit: eorum enim exuuias, quantum quidem in ſicco exemplari licuit diſcernere, labiis arcte ſemper adhaerentes, nec vnquam ſeparatas vidi. Hinc, quam Corallii rubri polypis facultatem tribuit *Donatus* in lib. cit. pag. 50. „qual fino „a tanto che il medeſimo animaletto ſia vivo, o non patito, „ſta ſempre ripoſto dentro la celletta; benchè ſia affatto ſciolto, „e

lae * ſpecie apparent, membranaque, cellam inueſtiens ventrem polypi, nunc inanem, efformat. *Tab. XIV. Fig. 23.

Ex ſitu etiam, quem et poſt mortem ſeruauerant fere omnes, ſequitur, polypos vel protinus, vt ſenſerunt, ſibi inſidias ſtrui, vel ſub vltimo demum nixu tentacula ſua, vna cum annexis labiis, per os in ipſum ventris cauum retraxiſſe; id quod pluribus huius generis polypis cum his commune eſt. Exinde tamen, omnium in praeſenti indiuiduo obuiarum cellarum polypos vno eodemque tempore vixiſſe, et aeque bene valuiſſe omnes, ſtatuere nollem. Procul dubio in eiusmodi Zoophyto, quod debitam acquiſiuit magnitudinem, plura millia cellarum vacua, vel verius polyporum ſepulchra ſunt, longe pauciora vero, viuentibus adhuc incolis inſeruientia. Stemmata enim gentilia plurima referunt Zoophyta, quibus cognationum ordines, a generis auctore ad vltimos pronepotes, ſunt inſculpti.

Priusquam ad ipſarum cellarum deſcriptionem progrediar, id vnicum de tuberculis adhuc dicam, quod eorum vnum alterumue ſimplici tantum, in anguſtum, reſpectu aliorum, et inane cauum ducente, poro perfora-

„e ſeparato da qualunque parte della medeſima etc.„ in dubium adhuc voco.

Nec comprehenſu facile eſt, ſi ab omni nexu ſolutum ac liberum concedamus, quomodo labia ſua, quae cum eius ſubſtantia comparata dura valde ſunt, pro lubitu vel protrudere vel inuertere valeat polypus.

*Tab. XIII A. et J Tab. XIV. Fig. 2, et 10

foratum * viderim; ſtella ſc. quam labia alias efformant inflexa, penitus deficiente, cortex et parenchyma circa porum, foras patentem, terminabantur.

Quum cellae (ſ) ſingulae ſingulis reſpondeant tuberculis, ea, quae, in reſpectu ad horum numerum et

(ſ) Placet hac occaſione varios ex *Marſillii* lib. cit. proferre locos, qui quum emendatione ac enodatione aliqua opus habere mihi viderentur, animaduerſionum materiam praebuerunt ſequentium: pag. 113. inquit Auctor. „Il y a (ſc. in extremitatibus ramo„rum iam iam induratis) pluſieurs Cellules rondes, creuſées „dans la même ſubſtance qui ſont auſſi remplies d'un ſuc „de lait glutineux, lequel en ſe ſechant devient jaune, de „même que celui des tubules de l'écorce." Cellae, de quibus hic eſt ſermo, quasque in Tab. XXV. Fig. 114. N N. N. depictas ſiſtit Auctor, non aliud ſunt, quam foueolae, ſubſtantiae lapideae ſuperficiei plus minusue impreſſae. Suam iſtae originem ducunt ab oppoſito cellae increſcentis fundo, cui exteriora, eaque, durante cellae incremento, procul dubio nondum indurata vaſorum medullarium ſtrata cedunt, quae, futuro particularum calcariarum infarctu petrefacta, impreſſa olim cellae fundi veſtigia retinent, non niſi ſuccedentibus nouis vaſorum ſtratis, lapideſcentibus, delenda.

Eaedem foueolae, ſi lacte, ſiue recenti, ſiue exſiccato, ſint repletae, facta parenchymatis a medulla ſeparatione, fundum cellae, tenacius huic adhaerentem, vna cum polypi parte fuiſſe abruptum, indicio eſt. Reapſe id accidiſſe, dum parenchyma a medulla vngue ſeparauerat Auctor, non ex Fig. 122. Tab. XXVI. ſolum, in qua oblongae iſtae ac albentes lactis guttulae z, z, z, magnitudine et numero, et ſitu tuberculis in cortice exacte reſpondentes, cellarum polyporumque partes indicant abruptas, ſed ex ipſo etiam textu, euidenter patet: pag. 115. „Les lettres z z z, montrent les amas du lait dans les cellu„les, qui parmi le rouge du Côrail, ſemblent, ſi l'on peut ſe „ſervir de cette comparaiſon, le pus de boutons d'un galeux, „quand

et diſtantiam dicta ſunt in praecedentibus, denuo hic exponere non eſt opus.

„ quand on leur a ôté la peau. „ Polypi enim, quos ſub hoc ſtatu non niſi contractos videre potuit *Marſillius*, et receſſus, quos tunc quaerunt, ſub aliarum cellarum et lactis ſpecie ei non ſemel impoſuerunt. Inde etiam intelligitur, cur foueolae iſtae, ramorum truncive baſi quo propiores, ſeu, quod idem eſt, quo priores ortu, eo planiores magisque etiam obliteratae prae recentioribus deprehendantur; nec minus, cur ramorum difficilius quam trunci perpetretur decorticatio; et cur in illis maius ſit parenchymatis cellarumue rupturae, quam in his, periculum. Accuratius longe de foueolis poſt *Marſillium* locutus eſt *Donatus* in lib. cit. pag. 49. „ Alla celletta cede il luogo la materia „ del Corallo con picciole cauità: queſte per altro non ſono molto „ patenti ne' rami vecchi, e groſſi, ma bensì ne' giovani, e ne' ſottili etc. „

Denique verbis etiam, quae loco ad huius animaduerſionis initium a me prolato mox ſubnexuit *Marſillius*, mea de foueolis ſententia valde confirmatur: pag. 113. „ Ces Cellules ſont „ toujours en plus grand nombre, plus profondes, et plus lar- „ ges, vers l'extrémité des Branches, que non pas auprès du „ pied. „ Pluribus ac profundioribus, quam inferius, circa ramorum extremitates et noſtrum eſſe inſtructum, ſupra dictum eſt; et eadem gaudere ſtructura Corallium rubrum, tam ex *Marſillii* verbis, quam ex iconibus, euidenter patet: ex illis nempe pag. 118. „ La verité de l'exiſtence de ce lait etc. „ vsque ad pag. 120. ex his vero e Tab. XXVII. Fig. 125. D, 2. E, 3. F, 6. G, 7. —— Fig. 126. — Fig. 127. A, E, F, B, C, F, C. Cellas enim hic expoſitas a polyporum cellis non diuerſas, ſed easdem plane eſſe, ex eo ſtatim clarum eſt, quod tuberculis in ſuperficie conſpiciendis directe oppoſitae, et magnitudine figuraque reliquis ſui generis pares ſint.

Neceſſarium omnino erat, haec ſcribere, ne cellas ab aliis vel diverſas vel in medullae ſubſtantia penitus reconditas, nec abſque praeuia

eius

De figura itaque, aliis atque aliis cellis varia admodum, primo dicam: ſolitariis nimirum ac generatim

eius diſſectione conſpiciendas, circa ramorum extremitates vidiſſe Auctorem, quis credat.

—— pag. 113. „Les lignes P. P. P. (Tab. XXV. Fig. 114.) „montrent les endroits où finit la conſiſtence pierreuſe des Bran„ches, et commencent les pointes molles en ſortant de l'eau, „et qui en ſe ſechant deviennent très-faciles à broyer, n'étant „qu'une écorce qui embraſſe une grande quantité de Cellules, „lesquelles ſe rempliſſent ſucceſſivement du ſuc de lait, qui ſe „fixe à la dureté de la pierre etc. —— et pag. 119. La par„tie ou fragment marqué G. (Tab. XXVII. Fig. 125.) eſt le „bout de la branche qui pour l'ordinaire eſt plus gros, et d'une „figure plus irréguliere, que les parties ſuperieures de la bran„che mieux formée. Cela provient des creux, que forme par „ſes divers contours la ſubſtance de lait, qui s'étendant en „ordre de couches, ſe condenſe à la dureté du Corail, et con„ſecutivement ces vuides ſe reſſerrent, et font prendre aux Ra„meaux la figure qui leur convient, et qui eſt à peu près „ronde." Licet Coralllium rubrum, mollibus ſuis adhuc inſtructum extremitatibus, videre mihi nondum contigerit, harum tamen conformationem a Zoophyti noſtri conformatione non diverſam valde eſſe ex *Marſilii* verbis partim, partim ex ſumma, quae inter vtrumque eſt, analogia facile auſim concludere. Magnus enim cellarum, et lacte quidem repletarum, numerus in praedictis ramorum extremitatibus, harumque, prae parte rami ipſis proxima, maior craſſities, magisque irregularis figura, quid aliud portendunt? quam ſimilem cellarum, polypos continentium, congeriem, qualem et in noſtro videmus Zoophyto. Adde, quod obſeruatione haec confirmentur vlterius, quam in Tranſ. Philoſ. loc. cit. pag. 450. ex *Boccono* refert Cl. *Matſon* ſeqq. „Boccone obſerves farther, that he ſaw ſeveral furrows under „the bark of the Coral, which terminate at the extremities of „the branches, about which one might clearly ſee ſeveral „ſmall

tum omnibus iis, quae tubera inter ſe haud formant, conica * (r) eſt, fundo ſc. planiuſculo ** coni baſin, ſummitate apicem obtuſum, referente. In tuberibus vero quibuscunque vtplurimum pyriformes ***, aliae ex obverſo ouato-oblongae ****, aut acuminatae *, ſummitate ſc. ampliore ac obtuſa, fundo autem anguſtiore, plus minusue acuminato **, vel obtuſo etiam cum acumine ***, aliae ſubouatae, fundo **** leuiter truncato, omnes * autem, habito ad proportionalem vaſiuscuiuslibet magnitudinem reſpectu, praecedentibus ** profundiores cellae ſunt. Nec rectae omnes ſunt: deorſum enim leuiter incuruatae *** in nutantibus ramorum extremitatibus, quae ab altero tantum latere polyporum domiciliis ſunt inſtructa, hinc et inde occurrunt. Earundem transuerſim diſſectarum lumina plus minusue ſubrotunda *, vel oblonga **, immo ob diſtractionem, quam plures paſſae eſſe videntur, non raro ex ouali elliptica ſunt, diametro longiore Zoophyti longitudini, breuiore latitudini parallela.

* Tab. XIV Fig. 25. x.
** Tab. XIV. Fig. 19. y.
*** Tab. XIV. Fig. 25. A.
**** Tab. XIV. Fig. 24. B.
* Tab. XIV. Fig. 25. C.
** Tab. XIV. Fig. 24. D. et 25. C.
*** Tab. XIV. Fig. 24. E.
**** Tab. XIV. Fig. 25. F.
* Tab. XIV Fig. 24. ξ ξ. B. D. E. etc. et Fig. 25. A. C. F. etc. et Fig. 26.
** Tab. XIV Fig. 19. y. et Fig. 25. x.
*** Tab. XIV. Fig. 26. G. G.
* Tab. XIV Fig. 22. H.
** Tab. XIV Fig. 22. I.

Z z 3 Neque

„ ſmall holes of the form of a ſtar, which he imagines are deſtined for the production of branches. „ Parua iſta atque ſtellata foraminula tuberculorum ora eſſe, quis non perſpicit?

(r) De Corallii rubri cellis *Donatus* habet ſeqq. loc. cit. pag. 50. „ Il vano della celletta è riſtretto come in un cono (F. t.) „ otuſo all' apice il di cui ventre ha un diametro maggior della „ Baſe. „ Non eandem autem omnibus fore figuram, ex praecedentibus (vid. Not. *f*) facilis eſt coniectura.

Neque vnum eundemque ſitum (*u*) omnes habent cellae, vtplurimum quidem horizontalem *, ſiue tranſverſum, ita, vt ſub angulo recto cum medullae ſuperficie coëant; in grandioribus autem tuberibus, tuberoſisque ramorum extremitatibus, ſiue ex toto, ſiue ex dimidia tantum parte, ſummae perpendiculares *, his proximae erectae, inſequentes tranſuerſae **, infimae denique, omniumque rariſſimae, reclinatae *** ſunt.

*Tab. XIV. Fig. 25. L. A C. x.

*Tab. XIV. Fig. 26. M.

** Tab. XIV. Fig. 26. N.

*** Tab. XIV. Fig. 26. O.

Nexus cum medullae ſuperficie, fundo mediante pariter, ac tranſuerſis ductibus celluloſoque parenchymatis contextui, omnibus eſt arctiſſimus.

Parenchymatis terminis etiam circumſcriptae ſemper ſunt, nec niſi rariſſime medullae quaſi immerſus * ipſorum fundus obſeruatur.

*Tab. XIV. Fig. 25. C. P.

Quum membranae, cellam efformantis, parietes vltra internam labiorum baſin haud protenſi eſſe videantur, ſacculum (*x*) ſuperius patentem, cella eiusmodi repraeſentat.

Eosdem denique parietes poris plurimis, nudo etiam oculo in extremitatum tuberoſarum cellis praeprimis viſibilibus, eſſe pertuſos, monuiſſe ſufficiat.

ANALYSIS CHEMICA.

Exper. I.

Die XV. Febr. hora decima matutina paruulum huius Zoophyti ramum, pondere vnius drachmae et viginti

(*u*) Vid. *Donat.* loc. cit. pag. 50. „Il fondo di tal celletta guarda „il piede del Corallo, e la bocca la parte ramoſa, o più rimota „dal piede.„ De ſitu vel directione idem plane, quod de figura (vid. Not. (*t*)) ſentio.

*) Idem de Corallio rubro affirmat *Donatus* loc. cit. pag. 49.

viginti sex granorum aquae frigidae immiſi, cui primum innatabat. Paullo poſt bullae aereae plurimae in eius ſuperficie conſpiciebantur aggregatae. Circa veſperam ſubſidebat, et altero mane, hora nona, vini albi gallici, aqua permixti, colore, odore Zoophyto proprio, ſaporeque ſubſalſo, imbuta erat infuſio; ipſe vero ramus emollitus ita, vt preſſioni aliquantum cederet; tumidus autem magis, quam ante ipſius immerſionem, tunc mihi non videbatur; nec ſtellarum labia plus dilatata, quam antea. Immo, ramo per quatuor dies et vltra modo in aqua frigida, modo in calida valde, macerato, ſigna tumentiae euidentiora, hiatusue oſculorum ſtelliformium inſigniores, vix apparuere, certiſſima quidem hauſtae aquae tanta copia, vt bilance examinatus drachmas tres, quatuorque grana pondere ſuo nunc exaequaret. Neque eum in ſalis communis ſolutione plus, quam antea, emolliri, ſum expertus. Quae ſequuntur, experimenta II—VII. cum infuſione ſunt inſtituta.

Exper. II.

A ſyrupo violarum ſuum cum virideſcente commutauit colorem infuſio.

Exper. III.

A ſpiritu ſalis ammoniaci nullam primum paſſa eſt mutationem; poſt aliquot horarum interuallum tamen parum lacteſcebat.

Exper. IV.

Ab oleo tartari per deliquium parum turbulenta, cum ſubſequente copioſa floccorum albentium praecipi-

cipitatione. Praecipitatum hoc ſaepius edulcoratum terra erat pura, calcaria, in acidis diſſolubilis.

Exper. V.

A Spiritu Nitri parum turbulenta, vel lacteſcens, diaphana tamen. Saturato poſtea nitri ſpiritu oleo tart. p. d. nihil praecipitauit, ſed limpida manſit ſolutio, ſedimenti tamen e ſordide flaueſcente albicantis parum depoſuit, in fornace calefacto repoſita.

Exper. VI.

Spiritus ſalis easdem, quas nitri ſpiritus, dedit mutationes, ſub mixtione ortas. Eodem poſtea ſaturato oleo tartari p. d. limpida manſit, et in fornace calefacto aliquot horarum interuallo ſedimenti ſubfuſci exiguam quantitatem depoſuit.

Exper. VII.

Ab aceti immixtione mutatio nulla.

Exper. VIII.

α) Laminulis ac fruſtulis quibusdam minoribus ramo, antea per triduum in aqua macerato, abſciſſis, nitri ſpiritum affudi, et exorta eſt ſubito efferueſcentia ſumma, vt omnis liquor in ſpumam reſolui videretur. Peracta efferueſcentia, mixtura bruno colore, lamellae ac fruſtula partim obſcure bruno, partim ſubfuſco erant tinctae. Mixtura dein oleo tart. p. d. ſaturata, turbulenta, lactea, cum flauedinis tinctura, impellucida ex

ex magna particularum albicantium, actione hac e ſuo ſoluente ſeparatarum, copia facta eſt, quibus ad vitri fundum praecipitatis, liquor ſupernatans vini gallici albi et limpiditatem et colorem induit.

β) Eodem ſpiritu fruſtulo maiori, cortice, parenchymate atque medulla conſtanti, quod ramo, macerationem nondum paſſo, reſecueram, affuſo, ſimilis oriebatur efferueſcentia, vt prius; nitri ſpiritus eundem, quem infuſio, parenchyma vero, durante efferueſcentia, colorem induit nigricantem, quaſi fuiſſet aduſtum. Interuallo autem aliquot horarum fruſtula, in vtroque experimento, α et β adhibita, croceo colore ſenſim tingebantur. Saturatus dein ſpiritus oleo tart. p. d. eadem plane, ac in α, dedit phaenomena.

Exper. IX.

Spiritus ſalis fruſtulo maiori, cortice, parenchymate atque medulla conſtanti, et in aqua nondum macerato affuſus, efferueſcentiam ſtatim concitabat, minus quidem impetuoſam, quam in Exper. VIII, aſt diutius durantem. Ceſſante hac, fruſtuli partes, cohaeſionem inter ſe ſeruantes, colorem primum, vt in Exp. VIII. haud mutabant, ſed horae interuallo demum nigredine inficiebantur, eaque dilutiore cortex, ſaturatiore parenchyma, pallide fuſci tinctura vero medulla. Fruſtulum, elapſis viginti quatuor horis, aquae iniectum, fundum petiit, cum ſimile huic (Exper. VIII β) ſupernataret; vtrumque vero ſufficienter edulcoratum, tam colore, quam conſiſtentia, fungi igniarii particulam

optime referebat. Mixturae oleo tart. p. d. ſaturatae idem contigit, ac in Exper. VIII.

Exper. X.

Superfudi veſpere fruſtulis nonnullis acetum vulgare; inceperunt tum ſtatim commutare ſenſim ſuum cum fuſco colorem, et poſtero mane carbonum inſtar nigra erant. Aliquot dierum interuallo poſt inſtillaui ſolutioni nonnullas olei tartari p. d. guttulas, et exorta inde eſt efferueſcentia ſumma, lacteſcebat mixtio, et incraſſabatur; diluta dein aqua, paullo poſt ſedimentum albicans, ſat copioſum, deponebat, vna cum materia quadam ruſeſcente, parciore copia admixta. Hanc aceto propriam licet facile ſuſpicarer, ne dubium tamen vllum ſupereſſet, eidem aceto ſeorſum inſtillaui aliquot olei tartari p. d. guttulas, et reſpondiſſe ſuſpicioni euentum, ſum expertus, quum vix inde oriri efferueſcentiam, certe valde leuem, viderem, materiam vero ruſeſcentem, vt prius, ſtatim apparentem, et paullo poſt in vitri fundum ſe praecipitantem, absque ſedimenti albicantis depoſitione, maniſeſto indicio: acetum vulgare terram Zoophyti calcariam, tardius licet ac placidius, quam caetera acida, ſoluiſſe, eandemque poſt ſuum cum alcali connubium reddidiſſe.

Exper. XI.

Fruſtula, Exper. VIII, IX, X, adhibita, bene eluta atque exſiccata, carbonibusque candentibus iniecta, cornu vel lanae ambuſtae odorem cum fumo ſpirabant, oleum

oleum magis magisque empyrevmaticum, fuſcum, foetidum eructabant, tandemque in caput mortuum nigrum, ſpongioſum et friabile conuerſa, conſumtoque penitus oleo, fortiori igni expoſita, in terram albam, in acidis ſolubilem, fatiſcebant.

Exper. XII.

Fruſtulum, ramo abſciſſum non macerato, ad candelae lumen dum accendebatur, cum flamma ardebat.

Exper. XIII.

Fruſtulis, ramo, non macerato partim, partim macerationem paſſo, abſciſſis ſuperfudi ſpiritum vini rectificatiſſimum alcaliſatum; prodibant ſtatim bullae aereae, et vnius horae interuallo flaueſcebat infuſio, vini gallici inſtar. Inſtillaui tunc ei guttatim aquam, aſt nulla ſubſequebatur praecipitatio. Ab affuſis ſpiritibus acidis parum lacteſcebat.

Exper. XIV.

Fruſtulum, non maceratum prius, in vrina aeque ac oleo tartari p. d. immutatum perſiſtebat.

CONCLVSIO.

Euidenter itaque patet, ſuppeditare Zoophytum noſtrum, etiam absque vlla vel ignis vel fortiorum quorumcunque menſtruorum adhibita vi, mera tantum in aqua frigida maceratione, 1) *Sal marinum*, ſapore ſuo

ſe ſtatim prodens; 2) *Principium quoddam alcalinum, bituminoſum*, quod ab alcalino ſpiritu (Exper. III.) et ab acidis fortioribus (Exper. V, VI et XIII.) in ſpiſſius cogitur, et violarum ſyrupum (Exper. II.) viridi colore inficit, tam colore et ſapore, quam odore ſuo ſingulari, quo particulae ipſius volatiles ac ſubtiliores nares feriunt, cognoſcendum; 3) *Terram calcariam*, ab affuſo alcali fixo (Exper. IV.) vinculis ſuis liberatam. Maximam autem huius partem, quam et manducatione ſola iam detegimus, ſpirituum acidorum ope ex ipſa Zoophyti ſubſtantia, cui arctius inhaeret, demum elici poſſe, Exper. VIII, IX et X. optime clarum eſt; neque minus ex his patet, eo expeditius et impetuoſius factam fuiſſe eius ſolutionem, quo fortiora adhibita fuere menſtrua, vt et, quo magis a particulis bituminoſis, quibus quaſi inuoluta erat, macerando fruſtulum in aqua, liberata atque denudata fuerit; inde etiam intelligitur, cur fruſtulum, Exper. IX. adhibitum, petierit fundum, cum ſimile, vtpote bituminoſo ſuo iam ex parte maceratione orbatum, hincque leuius factum, ſupernataret; 4) *Oleum animale volatile*, Exper. XI. ignis ope demum productum, magna ſatis in copia, cornu vel lanae ambuſtae odorem ſpirans. Nec dubito, ſub eadem operatione etiam exiguam ſalis fixi quantitatem fuiſſe elicitam, quamuis experimento exiſtentiam eius ob nimis parcam, quam ſuppeditabat fruſtulum, copiam probare non potuerim. Dum Exper. VIII, IX et X. inſtituebam, acida in cortice omnium maximam, in medulla minus impetuoſam, in parenchymate vero minimam, vel plane nullam

nullam excitaſſe efferueſcentiam, obſeruare licuit; id quod cum eo, quod in diſſertationis limine iam expoſitum fuit, exacte conuenit Quod bituminoſi, ab aqua ſoluti, pars neque ab alcali, neque ab acidis affuſis fuerit mutata, ſed intacta plerumque relicta, color flaueſcens, per omnia fere experimenta perſiſtens, probat ſufficienter, et quam ſubtile et immutabile illud ſit principium, facile inde colligitur.

Plura quidem, optauerim valde, vt Zoophyti huius experimenta, inprimis deſtillationis ope, maiore in portione capere potuiſſem; attamen ex modo recenſitis particularum eius conſtitutiuarum cum particulis Coralliorum conſtitutiuis, caeterarumque omnium plantarum marinarum, conuenientiam et animalem non minus, ac harum, indolem ſatis patere arbitror.

Quamuis autem exigua e quantitate, quam experimentis impendere licitum erat, rata ſingulorum principiorum pars accurate determinari nequeat, pro certo tamen affirmare auſim, terra calcaria Ceratophytis ac Corallinis veſicularibus ſuperius quidem, ſale volatili oleoque animali autem inferius eſſe, iſtaque e contrario Corallio rubro et Madreporis praeſtiturum, his ab iisdem ſuperatum iri Zoophytum noſtrum.

DESCRIPTIO TVBIPORAE, MARIS ALBI INDIGENAE.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Tab. XVI. Fig. 3. Tubipora *ramoſa, interſtitiis ſubrotundis diſtincta; tubulis ramorum confluentium ſimplicibus, flexuoſis, aggregatis et conglutinatis.*

Deſcriptio.

Tubipora haec, quum ab ima, eaque anguſtiore, baſi ſtatim ramoſa exſurgat, et multiplicatis iugiter ramis in longum et latum ſe diffundat, acaulos et ex omni parte vniformis eſt: tota quanta ſc. ramis mutuo amplexu ſeſe excipientibus, et ad ſingulum ipſorum confluxum intercapedines ſubrotundas, vel ouales, efficientibus conſtructa.

Ipſi autem rami mera ſunt tubulorum innumerorum, gracilium, ſimplicium, varie flexuoſi et incondite paralleli reptatus, e ramo in ramos modico ſub diuergio ac obliquo ſub ductu ad ſe inuicem excurrentium, caementoque ſubtiliſſimo temere conglutinatorum faſciatim digeſta congeries.

Sic ſociali inſtinctu vniti vermes metuendis iniuriis pares ſunt, diſperſi facile perituri.

Naturalem tubulorum longitudinem definire vix auſim: termini enim, et, quibus circumſcribuntur, orificia,

ficia, hinc et inde tam ſparſim, quam gregatim, conſpicienda, an a natura fuerint, an caſu, facta, non patet; vtriusque eſſe generis omnium maxime probabile eſt.

Diameter ſingulis aeque ac omnibus idem eſt conſtanter, et vndiqueuerſum octauam vix ſuperans lin. pariſ. partem.

Teſta eſt e griſeo ſeu ſordide albicans exterius, interius candida, ſubſtantiae calcariae, tenuiſſima ac fragiliſſima.

Pondus ℥iij, ʒß adeoque magnitudinis reſpectu valde leuis.

Caeterum Tubiporam hanc in interſtitiis ſuis fouere vnum alterumque perpuſillum buccinum, mytilum atque Fucum foliaceum, immo adnatas ſibi, tanquam comites indiuiduos, cochleas, ſerpulas, eſcharae cornuta rudimenta, milleporaeque prolem circumferre, notandum; id quod ei cum plurimis Zoophytis familiare eſt.

Denique etiam corpuſcula lentiformia, e ruſo flaueſcentia, meram exſiccatam referentia gelatinam eidem ſatis magna in copia leuiter adhaerere, non omittam, licet dubius ſim, vtrum pro polyporum, aut vermium, exuuiis, an pro animalis cuiusdam marini ouulis, ea habere debeam.

*** *** ***

Inter corpora naturalia, quae de intima naturae vegetabilis et animalis vnione teſtantur, non vltimum tenere locum Tubiporam noſtram, quis non perſpicit? Ex ramoſa enim facie, quae vegetabilis eſt, eam ſi quis iudicet plantam, ex tubulorum ſtructura et natura vermium opus pronunciabit. Vtrique ſententiae vtique non deeſt

deeſt ratio. Poſteriorem chemica analyſis probat vlterius, analogia illuſtrat:

1) Spiritus acidi efferueſcentiam in tubulis excitant, omnem ſoluendo terram calcariam, quae potior eſt eorum pars conſtitutiua. Quod intactum relinquitur, ipſe contextus vaſorum organicus eſt, indolis glutinoſae, priſtinam prae ſe ferens formam tubulorum. Hic, prunis iniectus, cornu ambuſti odorem de ſe ſpirat, certum olei animalis volatilis alcalini indicium, et carbonem exhibet, iſtius carboni ſimillimum.
Eadem quoque, quae tubulorum contextus, corpuſculorum lentiformium, ſupra memoratorum, natura eſt.

2) Affinitatem noſtrae, in hunc vsque diem incognitae, cum aliis Tubiporarum ſpeciebus, quae apud Auctores paſſim occurrunt, exempla probant ſequentia: 1) Corallina tubuloſa, ramulis tenerioribus, in lapidem conuerſa; *Memorabil. Baſileenſ.* 1748. *Baſil. germ. ed. Part.* I. *pag.* 94. Tab. I. fig. k. et Part. II. pag. 180. Tab. II. fig. d. 2) *Marſil Hiſt. phyſ. de la mer* Tab. IV. Fig. 15. 3) *ibid.* Tab. II. Fig. 9. ſed Fig. 1—15. deficere deſcriptiones, dolendum. 4) *ibid.* pag. 153. lin. 9, 10, 11 et pag. 154. lin. 1 et 2. Tab. XXXIV. Fig. 168. No 6 et 4. breuiſſimis verbis deſcripta. 5) Tubularia purpurea *Tourn. inſt.* 575. t. 342. 6) *Argenv. Conch.* p. 352. Pl. 29. Fig. B. C. D et E.

CON-

CONTINVATIO
HISTORIAE ZOOPHYTI MARINI
E CORALLIORVM GENERE.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Plantas ſic dictas marinas in ſtupendum ſaepius excreſcere magnitudinem, qua terrae arbores non raro exaequant, tam hiſtoriae naturalis ſcriptorum, quam peregrinatorum, aperte teſtantur relationes, fide digniſſimae.

Memorabile eiusmodi corporum marinorum exemplum praebet Corallii ſpongioſi truncus *, e Gazophylacio Petropolitano depromtus. Quamuis autem inferior eius extremitas non circa radicem, quam vocant, abſciſſa eſſe videatur, omnesque praeterea rami, quibus ipſe olim ſuperbiit, mutilati ſint peſſime, ex reliquo tamen inſignis, ad quam excreuerat Corallium, aeſtimari poterit magnitudo. Nec haec vnice eſt, quam mireris; forma non minus et ſtructura, quum ad intimius perſpiciendam Corallii huius naturam conferre quaedam poſſint, admiratione aeque ac inueſtigatione ſunt digniſſimae.

* Tab. XVI. Fig 1. et 2.

Quum vero praeſens hoc exemplar, vtpote omnibus notis eſſentialibus conueniens, pro vna eademque cum iſta ſpecie, cuius ampliſſimam Illuſtriſſimae Academiae tradidi deſcriptionem, ſit habendum, non niſi accidentales, et, quas proprias habet, notas recenſebo, et tanquam appendicem illi ſubnectam.

* * *

Truncus * hic, 3 ped. 1 poll. 4 lin. altus, inferius ** 4 poll. latus et 1 poll. 8 lin. tantum craſſus, hinc tam ab antica, quam poſtica facie valde compreſſus, recta primo aſcendit ad 1 ped. 5 poll. vsque, inde ſubito et maxime inclinatus pedali et arcuato flexu pergit, abhinc in rectum denuo extenſus, leuiori tandem proclinatione terminatur. Latitudo * eius et craſſities ** ab inferioribus ſuperiora verſus ſenſim decreſcunt. Vtraque facies non modo plana, ſed hinc et inde etiam in medio plus minusue profunde ſinuata ***. Latera ****, reſpectu facierum, anguſta quidem, aſt connexa valde. Ramis haec penitus deſtituuntur; plana autem vtraque facies viginti ſeptem circiter, variae diametri ac ſine ordine ſpargit, a pennae olorinae ad pollicis immo et ſesquipollicis craſſitiem, ex parte adhuc ſuperſtites, mutilatos *, partim penitus *reſciſſos* **. Coaluiſſe horum vnum, minorem ***, cum alio maiori ****, ſub angulo acuto, ita, vt inter ſe et truncum, e quo vterque prouenit, interſtitium relinquant triangulare, notatu dignum: proprietatem enim vegetabilem potius, quam animalem, et huic Zoophyto, vt plurimis aliis, conceſſam indicat.

*Tab. XVI. Fig. 1 et 2.
**Tab. XV. Fig. 7.
*Tab. XVI Fig. 1.
**Tab. XVI Fig. 2.
***Tab. XV Fig 8. *a.* et Tab XVI. Fig. 1. *a.*
**** Tab. XV. Fig 7. *b. b.* et 8. *b. b.* Tab XVI. Fig. 2. *a.*
*Tab. XVI. Fig. 1. *b. b.*
** Tab. XVI. Fig. 1. *c. c.*
*** Tab. XVI. Fig. 2 *b.*
**** Tab. XVI Fig. 2. *c.*

Color ab ima trunci parte verſus ſupremam e ſordide luteo ſenſim ſenſimque in cinereum abit.

Odor nullus. *Sapor* ſalis vix quicquam prodit. *Sonum* edit digito pulſatus, qualem vaſa fictilia edere ſolent. *Pondus* 4 ℔, ℥j, ʒij, ℈j.

Cortex

Cortex in parte trunci inferiore rimas * non tantum egit plurimas, a ſubitanea forſan exſiccatione ortas, ſed variis etiam locis rudi contrectatione eſt detractus. *Tab.XVI. Fig. 1. *d.*

Papillae per dimidiam trunci partem obliteratae, caeterum non minus copioſae et aggregatae, quam in Tab. XIII. Fig. 1.

Tubercula * ſtelliformia, polyporum exuuiis foeta, adeo rara, vt vix viginti per totam trunci ſuperficiem diſperſa numerauerim. *Tab.XVI. Fig. 1. *e. e.*

Parenchyma compreſſum magis, nec adeo laxum, quam in caule, Tab. XIII. Fig. 1. depicto. Durior in vniuerſum etiam ſubſtantia, ne medullari quidem excepta, hinc ſciſſu etiam paullo difficilior.

Quod in priore diſſertatione de medullae canalibus dictum fuit, et de hoc valet trunco, ſi excipias tantum, maiora ductuum lumina in tranſuerſa baſis ſectione * non in medio, ſed ad latera potius et parenchyma verſus hinc et inde eſſe conſpicienda, licet in ſuperiore trunci extremitate, ac in eius ramis tranſverſim diſſectis, eodem modo, vt in iſto caule, ſupra deſcripto, ſeſe habeant. *Tab. XV. Fig. 7.

* *
*

Ramuli nonnulli tuberoſi huc quoque ſpectant, e caulinorum genere, trium quatuorue pollicum longitudinis, tuberculis ſtelliformibus plurimis praediti, qui caulium huius trunci deperditorum olim fuiſſe videntur particulae; iſtis enim in Tab. XIII. depictis omnino ſimiles ſunt, excepto colore, qui roſeus eſt in cortice la-

Bbb 2 biisque

biiſque tuberculorum cum eodem continuis. Obductum ac conſperſum quidem hinc et inde vidi corticis ſuperficiem puluere albicante, ſed ſalinas eſſe particulas, quae ſucceſſu temporis ex ſubſtantia effloruere, nec cortici naturales, guſtu percepi.

Praeter eas igitur, quarum mentio in priore diſſertatione facta eſt, ſequentes in Zoophyto hoc obſervandae ſunt proprietates:

1) Naſci illud in mari Norwegico (*a*), Albo (vid. Diſſ.) et Mediterraneo (*b*), et quidem ex non mediocri profunditate (*c*).

2) Baſin habere, more aliorum ſui generis, ampliatam et paullatim attenuatam (*d*), lapidibus vel conchis (*e*) affixam.

3) In tantam ſaepius excreſcere magnitudinem (*f*), vt terrae arbores, non infimae proceritatis, facile aequet.

4) Cor-

(*a*) *Worm.* loc. cit. pag. 230. —— *Pontopp.* loc. cit. —— *Linn.* *Muſ. Teſſ.* pag. 120.

(*b*) *Marſill.* loc. cit.

(*c*) *Marſill.* pag. 163. ait: „Les Pêcheurs l' arrachent ordinairement avec l' hameçon à un fonds de 40 et 50 Braſſes„, et *Linnaeus* de ſuo refert loc. cit. extractum eſſe profunditate 350 pedum.

(*d*) *Worm.* loc. cit. „Caudex infima parte dilatatur, vt manifeſte appareat, ſcopulo eam inhaeſiſſe, non quidem in fibras „radicum diuaricatur, ſed in amplitudinem paullatim attenuatam „extenditur, in ambitu pedem ferme aequantem„.

(*e*) *Marſill.* loc. cit. „elle croît ſur des pierres, et ſur des coquillages.„ Conchae inhaerentem vid. apud eundem Tab. XXXIX. Fig. 178.

(*f*) Quum *Worm.* loc. cit. alterum et integrum indiuiduum, longitudine quatuor pedum, ad baſin craſſitie tantum brachiali fuerit,

4) Corticis colorem in recens extractis album eſſe ad baſin, paululum ſupra hanc albo rubroque mixtum, indeque vlterius per caulem, omnesque ramos, non niſi rubrum (g); rubrum vero hunc colorem in nonnullis in purpureum, in aliis in coccineum, in pluribus tamen in flaueſcentem (h) vergere, ſeu auroreum; huncque poſteriorem ſub exſiccatione Corallii in albidoluteum, ſeu flaueſcentem (i), qualis Zinziberis eſt, degene-

et Cel. *Linnaei* exemplar, licet pedes 2½ attigerit, caudicem truncatum vix brachii craſſitie habuerit, facile liquet, quid de magnitudine noſtratis, cuius trunci inferior, eaque reſciſſa, extremitas 4 pollices lata eſt, et iſtius a Cel. *Pontopp.* loc. cit. pag. 273. I deſcripti, et Tab. No. 2. Fig. No. 1. delineati indiuidui, cuius truncum ſeptem pollices latum eſſe legimus, ſtatuendum ſit. Hinc, quam modo laudatus Auctor ſub deſcriptionis finem expoſuit: „Wie das äuſſerſte der Zweige „beſchaffen geweſen, kann ich nicht ſagen, weil ſie, leider! „alle abgebrochen ſind; und wenn dieſes nicht wäre, ſo „müſte ſonſt die ganze Ausbreitung derſelben nach Pro„portion ſo groß ſeyn, daß man dieſen Aſt vielleicht nicht „in mein Haus, geſchweige in mein Cabinet, würde haben „bringen können„ iuſta omnino coniectura eſt.

(g) *Marſill.* loc. cit. „Le pied en eſt entierement blanc; ce blanc, un peu plus haut, eſt mêlé de rouge, et cette derniere couleur ſe répand par tous les rameaux„.

(h) Idem loc. cit. „Ce rouge n'eſt pas ſemblable en toutes les plantes de cette nature; car en quelques-unes il tire ſur le pourpre, en d'autres il eſt vermeil, et en pluſieurs il eſt iaunâtre„.

(i) *Wormii* omnia adiuidua, quae ex Norwegia ad eum ſunt delata, colore albicante ad flauedinem tendente, qualis in Zinzibere obſeruatur, praedita fuiſſe, ex loc. cit. patet. Vid. etiam *Pontopp.* loc. cit. pag. 275. No. 4. —— et noſtr. caulis ramoſus, in priore diſſertatione deſcriptus, vt et truncus modo expoſitus.

generare; attamen et exſiccata inueniri, miniaceo (*l*), ſaturate rubro (*m*), et roſeo (*n*) colore praedita; parenchyma omnibus eſſe flaueſcens (*o*), albicantem (*p*) vero medullam.

5) Truncum, vt in Corallio rubro, aliisque, in regione baſi proxima, maximam (*q*) habere craſſitiem.

6) Trunci ramorumque ipſius principum vtramque faciem eſſe compreſſam * (*r*), eandemque communiter ramis praebere ortum ** ac baſin, omnes conſequenter et ſingulos ramos in vno eodemque plano conſtitutos, trunci cauliumque planitiei directe oppoſito; qua in re Keratophytorum indolis particeps factum eſt Corallium noſtrum.

* Tab. XIII. Fig. 1. *b.* Tab. XVI. Fig. 1. *a. f. f. f.* et Fig. 2. *d. d.*

** Tab. XVI.

7) Truncum prius, quam in ramorum brachia ſe ſpargat, notabile craſſitiei capere incrementum, ſuoque volu-

(*l*) *Cluſii* loc. cit. Arbuſcula cortice tecta erat rubri coloris, vt minio inducta videretur, qui an aſcititius fuerit, ipſe ſuo tempore ignorabat. Sed erroneam *Wormii* ſententiam loc. cit. „Color rubicundus, qui in *Cluſii* planta viſebatur, non fuit naturalis, ſed aſcititius, vt recte ſuſpicatur.„ recentiorum obſeruationes ſatis demonſtrant.

(*m*) *Pontopp.* loc. cit. pag. 275. No. 4. et *Linn.* loc. cit.

(*n*) Idem loc. cit. pag. 273. No. 1.

(*o*) *Linn.* loc. cit. „Interior cortex (qui nobis parenchyma dicitur) a ſubſtantia lignoſa conſiſtentia molliore et *flaua* diſtinguitur etc.„

(*p*) *Cluſ.* loc. cit. — *Pontopp.* loc. cit. pag. 273. No. 1 — et *Linn.* Muſ. Teſſ. pag. 120.

(*q*) Vid. *Cluſ. Worm.* et *Marſill.* Tab. XV. Fig. 74. et Tab. XXXIX. Fig. 178. No. 1.

(*r*) *Pontopp.* loc. cit. pag 273. 1. et *Linn.* loc. cit. „Caudex — verſus inferiora parum compreſſus.„

volumine paucos iſtos ramulos, quos ab ineunte adoleſcentia extendere ſolet, longe ſuperare; hanc ſine dubio ob cauſam, vt pluribus ferendis par ſit, et aetate grandeſcat.

8) Eundemque ingraueſcente aetate, multiplicatis iugiter ramis tuberibusque, paniculam (s) formare in plano ampliſſimam, ac verſus alterum latus nutantem, vt, expletis naturae finibus, proprio tandem ſub onere concidat.

9) Corticem a parenchymate, hocque a medulla tam quoad ſubſtantiam, quam ſtructuram, eſſe diuerſiſſimum, et facile a ſe inuicem diſtinguendum; hinc vnum in alterum non mutari, ſed medullae aeque ac parenchymati ſuam, a natura conceſſam, vegetatiuam indolem eſſe, patet.

10) Corticem parenchymati, parenchyma medullae arctiſſimo eoque ingenito nexu eſſe coniunctum.

11) Papillas in nudis trunci * regionibus, quae tuberculis carent, non maiori inter ſe diſtare ſpatio, quam in ſimilibus ramorum tenuium locis; increſcente itaque medullae perimetro easdem augeri numero, oportet. *Tab.XVI.

12) Subſtantiam vniuerſam in ramis teneriorem ſpongioſiorem ac molliorem eſſe, quam in trunco.

13) Cor-

(s) *Cluſ.* loc. cit. „Arbuſcula —— in multos ramos laterales eosque in anteriorem partem nutantes diuiſa„ Idem etiam *Wormius* ſemel iterumque affirmat loc. cit. et *Linn. Muſ.* Teſſ. „Rami —— ſuperiores —— qui *paniculam* conſtituunt ——, parum nutant verſus anteriora, ac ſi haec arbor creuiſſet ad latus rupis ſubmarinae„

13) Corticem vbique fere eiusdem eſſe craſſitiei, compactum vero magis, duriorem, maiorique ter- reſtrium particularum copia infartum in trunco, quam in ramis.

14) Parenchyma in trunco ramisque craſſioribus tenue quidem mentiri ſtratum *, aſt compactum et compreſſum magis eſſe, quam in ramis tenuioribus, eorumque tuberibus, in quibus ſpongioſius et laxius eſt, ac vna cum polyporum cellis plus ſpatii ſaepius, quam ipſa medulla, occupat.

*Tab. XV. Fig. 7. *a.a.* *b.b.* Fig. 8. *a. b. b.* Fig. 9. *a.a.* Tab. XVI. Fig. 1. *g.* et Fig. 2. *c.*

15) Truncum * ramosque ** principes puram fere putamque eſſe medullam, hancque eundo ſenſim ra- reſcere, et gracilibus in ramulos *** tuberaque **** im- miſſis propaginibus terminari.

*Tab. XV. Fig. 7. et Fig. 8.
** Tab. XIII. Fig. 6. Tab. XV. Fig. 9. Tab. XVI. Fig. 1. *b. b.* et Fig. 2. *f.*
*** Tab. XV. Fig. 8. *c.* Fig. 9. *b. b. b.*
**** Tab. XIII. Fig. 7. etc.

16) Medullam e ſubſtantia conſtare ſpongioſa, et canaliculorum congerie longitudinalium, breui vtpluri- mum itinere interruptorum, et plus minusue flexuoſe excurrentium; ex his oriri alios anguſtiores, perbre- ves, indiſpoſito ac indiſcreto ordine oblique in latera ſuperficiemque medullae ſubreptitantes, eorundemque extremos fines, viſum pene effugientes, veſiculoſo ſpon- gioſo medullari contextu intercipi.

17) Ramorum, tam ex trunco, quam e cauli- bus, prorumpentium, productionem ſolius veſiculoſo- ſpongioſi medullaris contextus vegetabilis eſſe attri- butum.

18) Tuberculorum, polypis foetorum, numerum, reſpectu ad locum, cum medullae decremento increſce- re; hinc in trunco ramisque primariis omnium rariſſi- ma, in ramis ſecundariis copioſiora, in extremitatibus

ramu-

ramulorum tuberoſis ipſisque tuberibus copioſiſſima; maximumque eorundem prouentum, vt plantarum fru-ctificationem animaliumque generationem, vltimum Plantanimalis eſſe finem.

19) Zoophytum hoc, ab initio vegetabilem magis, quam animalem, aetate increſcente plus plusque ſenſitiuam viuere vitam.

20) Labia tuberculorum cum cortice eſſe continua, polyporumque tentaculis arctiſſimo et ingenito nexu coniuncta; vt et

21) Polyporum exuuias in omnibus, ne vetuſtiſſimis quidem exceptis, tuberculis deprehendi ſuperſtites; hinc, vt e cellis ſuis vnquam demigrare queant polypi, fieri nullo modo poſſe.

22) Eosdem polypos, in cellis contentos, Zoophyti eſſe opus; contendere vero velle, Corallium rubrum, vel molle hoc, et Keratophyta ab ipſorum polypis ſtrui, non minus ridiculum, quam arbores a ſuis exſtructas dicere floribus.

23) Denique Corallii noſtri, probe licet exſiccati, ramulos teneriores in aere humido rurſus emolleſcere, et flexibiles fieri, monendum.

NB. Tab. XIII. Figurae omnes naturali
Tab. XIV Figurae omnes aucta
Tab. XV. Fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6 aucta
——— 7, 8, 9 et 10 naturali magnitudine expoſitae.
Tab. XVI. Fig. 1. et 2. ad tertiam partem imminutae.

* *
*

Zoophyto iſti, e Coralliorum genere, ſpongioſo, cuius ſuccinctam Illuſt. Academiae tradidi deſcriptionem, adiungere liceat ex eodem genere tuber * pyriforme, nutans, quod in Gazophylacio Petropolitano inter Corallii rubri ramulos, leuioris momenti habitos, diu ſatis delituerat.

* Tab. XV. Fig. 10.

Eſt autem hoc tuber ratione ſtructurae et ſubſtantiae priori ſimillimum, excepta tuberculorum ſtelliformium magnitudine, quae paullo minora ſunt, colore incarnato, et pyri forma, qua differt.

Carneo autem colore ſolus eſt imbutus cortex *, parenchyma ** flaueſcenti, albicante medulla ***.

* Tab. XV. Fig. 10 *a*
** ibid. *b*.
*** ibid. *c*.
* ibid. *d*.

Labia * tuberculorum veram corticis eſſe continuationem, et in hoc ſubiecto ex colore ſatis ſuperque elucet, quippe qui iis cum cortice vnus eſt idemque; immo vt alterius ſpeciei labia corticem albedine excellunt, ita eadem in hac quoque ſaturatiore, quam ipſe cortex, rubedine tincta ſunt. Extra omne itaque ponitur dubium, quod in priore diſſertatione de labiis contenderam.

De reliquo tuber hoc tubercula ſtelliformia ex omni parte gerit, inque ſui medio conſiſtentem habet medullam.

Ex

Ex forma igitur reliquisque attributis illud Arbuſculae, a Cel. *Pontoppidano* in Hiſt. Norweg. Tab. I. pag. 275. V. deſcriptae, et Tab. No. 12, Fig. No. 5, delineatae particulam eſſe, facile iudicauerim, pro certo tamen nemini obtrudam. Specie interim ab antecedente differre, et forma et tuberculorum paruitas videntur innuere; ſpecificum vero nomen ei imponere eo vsque differam, donec maiorem huius Corallii portionem aliquando videre mihi continget.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE FACTAE PETROPOLI, ANNIS MDCCLV. ET MDCCLVI. ST. V. ET CONSECTARIA.

Auctore

I. A. BRAVN.

Obſeruationes meteorologicae vltimae, quas in Commentariorum nouorum Tom. V. exhibuimus, pertinent ad annum 1754. In praeſenti igitur ordine ſequuntur obſeruationes annorum 1755 et 1756. Quam methodum in ſuperioribus obſeruationibus adhibuimus, ea et hic vſi ſumus, eadem quoque inſtrumenta ſunt vſurpata; plura igitur circa methodum et inſtrumenta monere quum ſuperfluum videatur: ſtatim ad ipſas obſeruationes repraeſentandas progredi licebit. Sequuntur primum altitudines barometricae ſummae et infimae menſium ſingulorum, intelligendo pedis Pariſienſis pollices duodecimales, eorumque partes centeſimas, per quas variationes ponderis atmoſphaerae horum duorum annorum hic Petropoli innoteſcunt, dein variationes caloris, quas obſeruationes thermometricae oſtendunt, denique meteora potiora.

Altitu-

Altitudinum Barometricarum
Annorum 1755 et 1756.

		Summa.	Infima.		Differentia.
Ianuarii	10 et 12	28.80	27.47	die 2	1.33
Februarii	5	28.60	27.95	18	0.65
Martii	5	28.53	27.30	28	1.23
Aprilis	29	28.33	27.43	19	0.90
Maii	24	28.45	27.72	12	0.73
Iunii	18	28.23	27.63	13	0.60
Iulii	6	28.25	27.45	19	0.80
Augusti	7	28.50	27.40	1	1.10
Septembris	7.8.9	28.35	27.64	1	0.71
Octobris	18	28.35	26.95	24	1.40
Nouembris	4	28.20	27.15	28	1.05
Decembris	10	28.52	27.30	18	1.22.

Ergo Maxima huius anni 1755. 28. 80. Minima 26. 95.
Differentia et Variatio annua 1. 85.

Annus 1756.

Ianuarii	25	28.65	27.05	d. 3	1.60
Februarii	21	28 23	27 30	5	0.93
Martii	2.3	28.35	27 13	14	1.22
Aprilis	2	28.30	27.63	23	0.67
Maii	9	28.33	27.70	17	0.63
Iunii	7	28.30	27.45	22	0 85
Iulii	8	28.43	27.62	23	0.81
Augusti	1	28.35	27.73	22	0.62
Septembris	9	28.62	27.43	24	1.20
Octobris	28	28.61	27.41	25	1.20

OBSE... 27.25 - 1 · 1.48
... 27.72 - 10 - 1.08.

METE...
FACT...

...nno eſt 28. 80. Minima 27. 05.
...altitudinis mercurii annuae 1. 75.
...xima huius anni 1756 altitudo aequalis
...udini barometricae anni praecedentis 1755,
...orum horum annorum altitudo ſumma ſit
...80.

Quodſi haec ſumma altitudo comparetur cum ſumma altitudine annorum antecedentium, pateſcit altitudinem ſummam annorum 1755 et 1756 eſſe minorem ſumma alias hic obſeruata. Fuit illa ab anno 1750. 29. 10. quae 1750. Ianuarii 15 eſt obſeruata, indicata nobis Commentariorum nouorum Tom. V. p. 378. Ad hunc annum 1750. vsque omnium hic obſeruatarum ſumma fuit 29. 01. pedis regii paris. ſiue 30. 95. pedis Londinenſis, vti quoque in laudato Tom. V. Commentariorum nouorum videre licet. Manet igitur altitudo 29. 10 ſumma adhuc obſeruatarum hic loci altitudinum barometricarum, quae igitur $\frac{30}{100}$ ſiue $3\frac{3}{5}$ lin. Par. maior eſt ſumma altitudine 28. 80. annorum 1755 et 1756.

Summa altitudo 1755 Ianuarii 10 et 12 mihi notata, ſub ſequentibus circumſtantiis contigit. Ventus erat d. 10. WNW 2 et d. 12 idem fere, ſcilicet WgN 2. Diebus antecedentibus ventus fuit variabilis, ſequentibus autem ad d. 16. vsque fere idem perſtitit, dein in N mutatus, quocum frigus quoque creuit ad 186. Thermometrum monſtrabat d. 10. 163 et d. 12

$162\frac{1}{2}$

162½. Diebus antecedentibus et ſequentibus proximis minores frigoris gradus fuerant obſeruati Dies 10 et 11^mus erant nubili, vti quoque dies proxime antecedentes et conſequentes.

Minima barometri altitudo 1755 fuit 26.95 obſeruata mihi Octobris 24; anni vero 1756 minima 27.05 notata Ianuarii 3. Et haec et illa altitudo minima maior eſt altitudine minima alias hic obſeruata, ſcilicet pollicum 26.41 pedis pariſienſis, ſiue 28.18 pedis londinenſis. Quum igitur ſpatium variationis Mercurii 1755 ſit 1.85. et anno 1756 1.75; ſpatium inter adſcenſus terminos et deſcenſus Mercurii in tubo torricelliano manet idem, vti anno 1750 eſt determinatum, ſcilicet 2.69. Manet igitur media quoque altitudo eadem 27.75½ ſiue 27 pollices et 9 lin. pedis par. intelligendo medium arithmeticum inter altitudinem ſummam et infimam, quo ſenſu *Kraftius* mediam altitudinem ſumſit, quum alias ſatis conſtet, per mediam altitudinem communiter eam intelligi, quae reſultat, ſi ſumma altitudinum per numerum obſeruationum diuidatur, qua ratione et mediae altitudines menſtruae et annuae erui ſolent, quas, quoniam vtilitate non carent, forſitan in poſterum quoque addemus.

Caeterum adnotanda adhuc ſunt antecedentia, concomitantia et conſequentia, ſub quibus horum duorum annorum altitudines minimae contigere. Altitudo minima anno 1755 Octobris 24 obſeruata 26.95. contigit vento WSW antecedente et conſequente vento vario Thermometrum monſtrabat 148, et regelabatur. Nubilum erat mane, ſed coelum dein clarius factum nox ſereniſſima eſt ſequuta. Dies antecedentes

dentes a die 15 erant nubili, et dies quoque ſequentes 25. 26. 27 et amplius, generatim vltra ſex dies hoc menſe ſereni non fuere, caeteri nubili, pluuioſi et niuoſi. Mercurius ab 28.35 d. 18. h. 11. p. m. ad hanc altitudinem minimam deſcendit.

Infima altitudo 1756 Ianuarii 3 = 27.05 ſub ſequentibus circumſtantiis accidit. Deſcendit mercurius ab altitudine 28.80 ad hanc a die 1. Ventus erat SW, antecedens S et ſequens O, dein N. Thermometrum 150 monſtrabat, diebus antecedentibus 147 et 148, diebus aliquot ſequentibus ab 148 ad 159 variabatur. Dies 3 fuit nubilus et niuoſus, vti quoque proxime antecedentes et conſequentes. Quum haec minima altitudo 1756 menſe Ianuario contigerit, illa vero 1755 menſe Octobri; et ex hiſce et aliis multis adparet, minimas altitudines certis menſibus non euenire, vti quoque maximas, ſed promiſcue quolibet menſe et ſub diuerſis quoque circumſtantiis.

Si differentiae et variationes menſtruae inſpiciantur et conſiderentur, patet in differentiis et variationibus menſtruis anni 1756 legem illam ſatis adcurate obſeruari, qua variationes menſibus primis et vltimis, quam mediis, maiores eſſe ſolent: ſed variationes menſtruae anni 1755 exceptiones menſibus Februario et Auguſto facere videntur. Nam menſe Februario differentia eſt tantum $\frac{65}{100}$ ſiue fere octo lin. pariſ. adeoque ſolita minor; contra menſe Auguſto ſolita maior deprehenditur, ſcilicet 1 poll. 1 lin. et quod excurrit, ſed harum exceptionum cauſſa procul dubio tempeſtati inſolitae huius menſis, eſt adſcribenda.

Caete-

Ceterum differentia vel variatio menſtrua maxima fuit 1755 = 1. 40 menſe Octobri, et minima $\frac{60}{100}$ menſe Iunio. Anno vero 1756 maxima fuit 1. 60 menſe Ianuario, et minima $\frac{62}{100}$ menſe Auguſto. Differunt igitur hae maximae et minimae differentiae, vti menſibus, quibus ſunt notatae, ſic quoque quantitate, licet minimarum parua differentia ſit. Vt eo minus de adcuratione harum obſeruationum quis dubitet, monemus, nos has inſtituiſſe, et adhuc inſtituere ſolere, ſecundum tria Barometra ſimplicia ſatis exacte concordantia, quorum tubi fere aequales ſunt, diametri ſcil. 2 lin. et quia mutationes in Barometro Hugeniano ſunt ſenſibiliores, ita vt initium deſcenſus et adſcenſus ſatis adcurate ab attento obſeruari queat, quod in barometris ſimplicibus fieri non poteſt, certe non tam facile, adhibuimus ſimul ad hunc ſcopum Barometrum Hugenianum, quod. vti conſtat, alias altitudines ſat fideliter non monſtrat. Caeterum has altitudines barometricas eſſe inſtitutas in altitudine ſupra Neuam fluuium circiter 15 pedum iam monuimus. Haec hactenus de obſeruationibus barometricis, ſequitur vt ad thermometricas progrediamur. Et hae quoque obſeruationes ſecundum tria et plura thermometra ſatis exacte concordantia factae ſunt, ad quae, quod iam conſtat, ſcala Deliliana eſt adplicata. Compoſuimus 1755 tabulam comparationis vſitatiorum thermometrorum, comparauimus vſitatiores ſcalas thermometricas cum noſtra, vt vno obtutu gradus ſcalae noſtrae, non adeo alibi vſitatae, cum aliis comparari poſſint. Sequuti ſumus in ea conficienda potiſſimum George Martine, *in Eſſays Medical and Philoſophi-*

cal. pag. 215 *The compariſon of different thermometers*, et proprias experientias, quas alio tempore communicabo, quam hic adiicimus.

Obſeruationes thermometricae, maximum et minimum caloris gradum cum differentia per ſingulos menſes anni 1755 exhibentes, ſunt, quae ſequuntur.

Calor

		Minimus.	Maximus.		Differentiſ.
Ianuarii	23.	192	148½ d.	8	43½
Februarii	12. 13. 21.	183½	148½ d.	17	35
Martii	8.	173	137.	29	36.
Aprilis	10 et 13.	160	126.	22. 27. 28.	34
Maii	16.	142	106.	30	36.
Iunii	11.	135	104.	30	31.
Iulii	30.	131	109.	3	22.
Auguſti	18 et 29.	136	118.	7 et 22	18.
Septembris	13. 14.	145	124.	1.	21.
Octobris	23.	153	133.	1. 7.	20
Nouembris	24.	172	141.	8	31
Decembris	12.	183	148.	17. 18. 19.	35

Ergo frigus maximum 192 et Calor maximus 104. Differentia et variatio caloris annua 88 graduum.

Annus 1756.

Ianuarii	8.	178½	146. D.	30	32½.
Februarii	24.	174	142.	11	32.
Martii	1.	170	128.	30	42.
Aprilis	7.	153	116.	29	37.

Maii

Maii	[illegible]8.	149	- -	105.	25 - -	44.
Iunii	3.	138	- -	105.	30 - -	33.
Iulii	8 et 30.	136	- -	103.	5 - -	33
Auguſti	11.	140	- -	121$\frac{1}{2}$.	2 - -	18$\frac{1}{2}$
Septembris	8.	144	- -	128.	24 - -	16
Octobris	28.	161	- -	140.	14 - -	21
Nouembris	22.	183	- -	144.	4 - -	39
Decembris	25.	188	- -	152$\frac{1}{2}$.	14 - -	35$\frac{1}{2}$.

Ergo frigus maximium 188, et Calor maximus 103. Differentia vel variatio annua 85.

Minus igitur frigus huius anni 1756 eſt frigore anni praecedentis 1755 gradibus 4. Differt tamen frigus anni 1755 maximum a maximo alias hic obſeruato 9 gradibus. Nam ad hunc vsque annum maior frigoris gradus, quam 201, a *Kraſtio* et me obſeruatus non eſt. *Deliſius* tamen 1733 Ian. 27 gradum 202$\frac{1}{2}$ et 204 ſe obſeruaſſe teſtatur, *in Memoires pour ſervir au progres de l'Aſtronomie, et la Phyſique.* Annus 1759 hunc maximum frigoris gradum mutauit, dum frigus ad 212 auctum eſt, vti ex ſequentibus obſeruationibus anni 1759 patebit.

Inſigniores porro frigoris gradus anno 1755 praeter maximos menſtruos notatos fuere.

Ianuarii 1. 188. d. 17. 176 et 181; d. 18. 183. 186 et 189; d. 19. 185 et 190; d. 20. 191 et 185; d. 21. 180 et 183; d. 22. 186 et 188; d. 24. 180; d. 25. 181; d. 26. 183; d. 27. 187; d. 28 et 29. 188. Februarii 14. 172; d. 21. 178 et 183; d. 22. 181. Nouembris 24. 170 et

 172;

172; reliqui dies huius menſis mitiores. Decembris 7. 177 et 180; d. 10 et 12. 174 et 183; d. 13. 177; d. 14. 170.

Notandum hic eſt in quibusdam Germaniae locis tantos frigoris gradus, quantos antea numquam, hoc anno eſſe obſeruatos. (Vid. Nouellas litterarias Goettingenſes No. 59. huius anni.) Nimirum Goettingae Februarii 8. ſt. n. gradus 19 infra 0 ſcalae Fahrenheitianae, conueniens cum noſtra $192\frac{1}{2}$. Cattlenburgi, loco a Goettinga circiter duobus milliaribus germanicis ſito, Februarii 1. ſt. n. circa mediam noctem gradus frigoris 30 infra 0 ſcalae Fahrenheit. eſt notatus, conueniens cum noſtra $201\frac{2}{3}$. Patet igitur hinc primum, frigus Goettingenſe fuiſſe aequale maximo frigoris gradui hoc anno Petroburgi obſeruato, Cattenburgenſe autem fere 202 non ſolum maximum huius anni gradum frigoris multo ſuperaſſe, ſed etiam omnium adhuc hic obſeruatorum maximo fuiſſe aequalem. Non obſtantibus inſignibus hiſce frigoris gradibus in Germania obſeruatis, exiſtimamus tamen, hiemem huius anni hic Petroburgi fuiſſe ſaeuiorem, quoniam gradus frigoris magni in Germania breuiſſimum tempus tantum durauerunt, inſigniores contra frigoris gradus Petroburgi fuere conſtantiores et diuturniores. Durationis autem frigoris in diiudicando hiemis gelu eſſe praecipue rationem habendam, per ſe facile intelligitur. Caeterum tanti frigoris gradus in Germania eo magis ſunt admirandi, quo receptior fuit opinio, infra 0 ſcalae Fahrenheitii frigus creſcere neque ſolere, neque facile poſſe. Frigus Cattlenburgenſe incidit in Febr. 1. ſt. n. adeoque in Ianuarii 21. ſt. v. quo die hic Petroburgi frigus mane erat 189, et veſperi

180,

180, die vero antecedenti 20, erat mane 191. veſperi 185½. Frigus Goettingenſe inſigne obſeruatum eſt Febr. 8. ſt. n. adeoque Ianuarii 28. quo die frigus mane erat 185 et nocte 188. nocte antecedenti 187. Ergo noſtrum frigus maximum anni 1755, aequale 192, duobus diebus tardius hic incidit, ſcilicet Ian. 23, quam frigus Cattlenburgenſe, et 5 diebus citius, quam frigus Goettingenſe. Non igitur uniuerſe ſtatui poſſe videtur frigus quaſi migrare ex locis ſeptentrionalibus in minus ſeptentrionalia, vti quibusdam viſum eſt, et nonnunquam videri poſſet. Inſigniores frigoris gradus anni 1756, praeter notatos maximos quolibet menſe, fuere ſequentes. Ian. 16. 177. Satis mite frigus huius menſis fuit et ſolito minus. Februarii 21. 172. d. 24. 174 et huius menſis frigus ſolito minus fuit. Nouembris 20. 175 et 176. d. 21. 178 et 183; d. 22. 183; d. 28. 173. Decembris 1. 170; d. 4. 175; d. 5. 178 et 180 d. 6. 180 et 182; d. 7. 179; d. 23. 174 et 175; d. 24. 182; d. 26. 180.

Maximum frigus 192 anni 1755 ſub his circumſtantiis contigit. Notatum eſt Ianuarii 23. hora 7. a. m. vento vix ſenſibili, vti ſolet in frigore inſigniori. Ventus antecedens lenis NNW 1 et ſequens NW 2 fuit. Barometrum monſtrabat 28. 00, ad quam altitudinem a 28. 18 d. 20. obſeruata deſcenderat, ſequens altitudo barometrica fuit 28. 03 dein 27. 95. Antecedens obſeruatio thermometrica monſtrabat 188, et ſequens 180. Dies 23. fuit ſerenus, vti quoque plerumque ſolet frigore ingenti. Dies antecedens fuit quoque ſerenus, conſequens autem nubilus.

Frigus maximum anni 1756 incidit in Decembris 25. h. 11. p. m. ſub ſequentibus circumſtantiis mihi notatum. Ventus erat o et lux borealis placida. Ventus antecedens N 1, conſequens autem NW 2. Nox erat ſereniſſima, vti quoque ipſe dies ſerenus, et antecedens; ſequens autem nubilus et niuoſus. Antecedens frigus erat 182 et 183, ſequens vero 180 et 161. Barometri altitudo tempore obſeruationis erat 28. 42 antecedens 28. 35 et ſequens 28. 40. Licet igitur frigus maximum certo menſe non oriatur; vti 1755 menſe Ianuario et 1756 menſe Decembri contigit; ſolent tamen hi duo menſes hic loci fere eſſe, in quibus frigus maximum totius anni incidere ſolet.

Quemadmodum in ſummo frigore altitudines barometricas inſignes eſſe ſolere et debere conſtat, ſic quoque tranquillum eſſe ſolet, et venti raro ex NNO et O, frequentius ex NW. et SO ſpirare ſolent. Vti tranquillitas quoque regnat in magnis caloribus. Conſiderauimus hactenus frigus maximum, ſiue calorem minimum, ſequitur, vt conſideremus nunc calorem maximum horum duorum annorum 1755. et 1756. Rarum aut nihil inter ſe differunt hi calores maximi, eſt enim anni 1755. calor maximus 104, anni vero 1756 = 103. Ad hoc vſque tempus maximi caloris gradus hi fere eſſe ſolent; ſequenti vero tempore 6 gradibus calor maximus auctus eſt, vti ex ſequentium annorum obſeruationibus patebit. Saepius gradus 104 eſt obſeruatus, vti ex antecedentibus obſeruationibus communicatis manifeſtum eſt. Eſt igitur differentia et varia-

variatio maxima caloris anni 1755. gr. 88. et anni 1756. graduum 85, quae quoque parum differunt; et fere ordinariae hic eſſe ſolent. Maxima caloris variatio menſtrua anno 1755: fuit menſe Ianuario $43\frac{1}{2}$, minima menſe Auguſto gr. 18.

Maxima vero anni 1756. menſtrua gr. 44 menſe Maio, minima autem gr. 16 menſe Septembri. Maximae igitur et minimae caloris variationes vel differentiae certis anni menſibus contingere non ſolent, neque quantitate conuenire, quamuis multum non differant, quantitate horum duorum annorum. Maxima intra nychthemerum = 22, minima = 0, quod ſaepius quoque fieri ſolet. Differentia maxima adhuc mihi hic obſeruata inter thermometrum ſoli expoſitum et in vmbra conſtitutum eſt 30 gr. et minima ſole per nubes lucente = 4 et 5.

Calor maximus 104 anni 1755, incidit in Iunii 30 p. m. inter 2 et 3 obſeruatus ſub ſequentibus circumſtantiis:

Calor diei antecedentis p. m. erat 105 et ſequentis 115. Ventus erat S 1, vti quoque die antecedenti, ſequenti autem mutatus in W 2 et porro in W 3. Dies ipſe erat ſerenus, vti quoque antecedens et conſequens. E longinquo tamen paullum tonuit.

Barometri altitudo 27. 95. eadem quoque die antecedenti integro, ſequenti vero 28. 10. fuit.

Calor

Calor maximus anni 1756. Iulii 5. h. 2. p. m. eſt obſeruatus. Ventus erat NO2 vti quoque die antecedenti, ſequenti O et ONO2. Altitudo barometrica 28. 22, antecedens 28. 19 et ſequens 28. 30. Dies erat ſerenus et ſol rubicundus, vti quoque dies antecedens, quin omnes a Iulii 1mo, itidem conſequens et plures ſequentes. Maximi calores certo menſe quoque non oriuntur, Iunio tamen vel Iulio ordinarie.

Caeterum plures huius anni 1756. dies inſignem calorem habuerunt, praecipue huius menſis. Maii 25. 105; Iunii 7 et 12. 110; Iulii 2. 104; d. 6. 105; d. 7. 103½; d. 8. 104; d. 9. 106; d. 11 rurſus 104; d. 19. 112; d. 21. 111; ita vt hic menſis partim ob inſignes caloris gradus, partim ob continuum fere calorem, fuerit calidiſſimus.

Anni vero 1755. inſignes caloris gradus, praeter menſtruos notatos, fuere ſequentes: Maii 21. 112; d. 22. 108; d. 28. 109; d. 29. 111; d. 30. 106; Iunii 22. 106; d. 23. 110; d. 24. 112; d. 25. 107; d. 29. 105; d. 30. 104; Iulii 3. 109; d. 4. 110 d. 5. 110; d. 6. 110; d. 16. 112. Fuit igitur et huius anni menſis Iulius omnium calidiſſimus, licet non tam calidus, quam Iulius anni 1756. Notandum tamen eſt, menſem Iulium non ſemper caeteris eſſe calidiorem hic, ſed multas occurrere exceptiones, vt et obſeruationes antecedentes teſtantur.

Circa obſeruationes thermometricas monendum adhuc exiſtimamus, antemeridianas non eſſe certa hora

in quouis die factas., vti plerique ſolent, ſed quantum fieri potuit, ſub ortum ſolis; pomeridianae ſemper inter h. 2 et 3. quoniam aliter frigus maximum, et calor maximus diei haberi non poteſt. Nam regulariter calor maximus p. m. h. 2 et 3 eſſe ſolet, a quo tempore rurſus decreſcit ad ortum ſolis vsque, quo igitur tempore regulariter caeteris paribus minimus eſſe ſolet et debet. Supereſt, vt potiora recenſeamus Meteora et Phaenomena.

Primum venti vehementiores anno 1755. fuere ſequentes: Ianuarii menſe nullus vehementior, caeterum venti ex omnibus quidem plagis ſpirarunt, potiſſimum tamen ex N et O, vti quoque menſe Februario eandem directionem potiſſimum retinebant, et inter eos nullus vehementior. Menſe Martio ſolo die 27. fuit S 3, leniores caeteri, potiſſimum autem fuere ex W et S. Aprilis 5. W 3, caeteri maxime ex W. Maii 9. N 3, reliqui varii ex omnibus plagis fere aequaliter ſpirarunt. Menſe Iunio vehementior nullus, caeteri potiſſimum ex W et O. Iulii 2. W 3, reliqui potiſſimum ex W et S. Menſe Auguſto vehementior nullus, reliqui potiſſimum ex S dein ex W. Septembri nullus vehementior, caeteri autem potiſſimum ex W et S, minus tamen frequenter ex S, quam ex W. Menſe Octobri maiorem partem W regnauit, nullus vehementior. Nouembri vehementior nullus, regnauit autem potiſſimum S et W; Decembri vehementior nullus, reliqui variabiles admodum.

Venti vehementiores anni 1756. per ſingulos menſes fuere, qui ſequuntur. Ian. 9 S 3; d. 27 W 3; regnauit potiſſimum S et W. Februarii 12 W 3; d. 29 O 3, regnauit W et S. Martii 12 ONO 4 mercurio ab h. 3. p. m. ad 11. p. m. in barometro deſcendente a 27. 80 ad 27. 67. et porro d. 14. ad 27. 13, quo die veſperi ceſſauit ventus, mutatus paullo ante in W 3; d. 26 S 3; et hoc menſe S et W regnarunt. Aprili vehementior nullus, reliqui varii, vt ſolet. Menſe Maio itidem vehementior nullus, regnauit W et NW. Iunii 14 et 15 WNW 3 reliqui varii. Iulio vehementior nullus; ſpirauere potiſſimum W et S. Auguſto vehementior nullus, reliqui ex W et O praecipue flauere. Septembri venti varii, nullus vehementior. Octobri nullus vehementior, regnauit potiſſimum W. Nouembri nullus vehementior, regnauit SW. Decembri venti varii, inter quos nullus vehementior. Ex hiſce ventorum obſeruationibus patet primum, duos hos annos a ventis vehementioribus ſatis fuiſſe liberos, quum ſecundum antecedentes obſeruationes venti vehementes multo frequentiores eſſe ſoleant. Deinde vnica procella Martii 12. 1756. inter ventos vehementiores notatos occurrit, quod etiam rarius accidit, quum non facile annus a procellis hic liber eſſe ſoleat. Porro ex comparatione plagarum, vnde venti ſpirarunt, pateſcit, per totos hos annos potiſſimum W deinde S regnaſſe, id quod vtplurimum fieri hic ſolet.

Ad

Ad gradus ventorum quod attinet, vel me non monente adparet, me cum multis aliis 4 gradibus eſſe contentum, vbi 4 ſcilicet procellam indicat, caeterum conſtat alios in 8 gradus diuidere vehementiam venti quoque ſolere.

Tonitrua et fulmina his duobus annis ſequentia mihi ſunt obſeruata. Primum anno 1755 contigit Iunii 7. h. 6. a. m. quod primum alias vtplurimum menſe Aprili fieri ſolet, quin etiam menſe Martio, quod rarius. Altitudo barometrica 27. 92, gradus thermometri 123, ventus S erant; d. 12 circa meridiem tonitru cum magna pluuia et grandine, barometri altitudine 27. 75, calore 126, vento W; d. 28 h. 5. p. m. barometrum 27. 95, thermometrum 120 monſtrabant, vento S 3; d. 30 tonitru e longinquo, altitudo barometri 27. 95 et calor 104. Iulii 8 tonitru cum pluuia, mane vento O, thermometro 123, barometro 28. 00; d. 19 fulgurationes frequentes nocte, ſed nullum tonitru. Auguſti 12 tonitru, vento SW, barometro 27. 80, thermometro 134.

Anno 1756. Apr. 30 primum tonitru mane, quo turris templi St. Petri in Caſtello fulmine percuſſa delapſa eſt mane poſt h. 5. a. m, barometro notante 27. 80 et thermometro 115, vento SW. Maii 4 fulgetra, calore 138, pondere atmoſphaerae 28. 18 item d. 7 veſperi fulgurationes, calore 139, barometrica altitudine 28. 05. Iunii 21. p. m. tonitru, vento SSO, thermometro 125, barometro 27. 78; d. 23 tonitru

nitru cum grandine, vento NW, barometro 27. 83, thermometro 127 notantibus; d. 29 tonitru vehemens ab h. 10. a. m. durauit ad h. 4. p. m. barometro 27. 98, thermometro 125, vento W. Iulii 1 tonitru p. m. thermometro 121, barometro 28. 08; d. 4. p. m. tonitru, thermometro 120, barometro 28. 10; d. 11 et 17 tonitru, barometro 28. 00 thermometro 122; d. 19 tonitru cum pluuia, barometro 27. 85, thermometro 112, quod fuit hoc anno vltimum.

Quod ſi hae obſeruationes tonitruum vtriusque anni inter ſe comparantur, pateſcit, primum tonitrua anno 1756. multo frequentiora, quam anno 1755. fuiſſe et vehementiora. Nam anno 1755. diebus tantum 5 tonitrua, eaque non vehementia fuere, quum contra ea anno 1756. diebus 9 vtplurimum ſatis vehementia tonitrua acciderint, eaque periculoſa. Vti prima et vltima tonitrua vtriusque anni ſatis differunt, dum primum anni 1755. contigit demum *Iunii* 7, contra primum anni 1756. April. 30, vltimum anni 1755. Auguſti 12, contra vltimum anni 1756. iam Iulii 19: ſic differentia multo maior nonnunquam eſt deprehenſa, quum tonitrua iam menſe Martio inceperint, vt monuimus, et vltimis Auguſti diebus deſierint, quod tamen rarius.

Addidimus in recenſendis tempeſtatibus fulmineis ventos, vt pateat ex quibus plagis potiſſimum eae venire ſoleant. Scilicet vtroque hoc anno potiſſimum ex S et SW, id quod aliis quoque annis vtplurimum fieri

ſolet

ſolet, quae ex SO, vehementiora vtplurimum eſſe ſolent, vti quoque interdum ea ex S. Praeterea adiecimus obſeruationes barometricas et thermometricas, quoniam intra certos terminos ponderis aeris et caloris tonitrua fieri videntur praecipue ſaeueriora. Nam non facile tonitrua inprimis ſaeua hic obſeruantur, ſi mercurius vltra 28 pollices Pariſienſes adſcenderit, vti ex his et aliis pluribus obſeruationibus elucet. Nam illud Iulii 1 et 4, quo tempore altitudo mercurii 28. 08 et 28. 10 notabatur, fuere leniſſima et e longinquo. Si porro calores conſiderantur, omnia tonitrua vtriusque anni mediocri calore orta ſunt, pleraque ſcilicet vehementiora inter caloris gr. 115 et 139, vti quoque vtplurimum aliis annis fieri ſolet.

Meteora emphatica vtriusque anni huc fere redeunt:

Halo circa ſolem adparuit 1755 Ianuarii 28: h. 4. p. m, thermometro notante 175, et barometro 27. 80. vento SO 2, ſequuta nocte eſt Lux borealis exigua.

Circa lunam halonem obſeruaui Octobris 14. h. 11. p. m. tenuem et pallidam, notante barometro 28. 00, thermometro 142. vento SW 1. Anno 1756 nullam plane halonem neque circa lunam, neque circa ſolem obſeruare mihi contigit. Minus igitur frequentes halones, quam alias, hisce annis fuere, tam circa ſolem, quam circa lunam, hae illis et hic loci multo frequentiores eſſe ſolent ordinarie.

Aurorae boreales anno 1755 et 1756 mihi notatae ſequentes ſunt. Ianuar. 28. 1755 nocte circa h. 11. lux borealis ſine motu et radiis zenith verſus cuibratis adparuit, notante barometro 27. 92, et thermometro 188. vento vix ſenſibili, vt ſolet. Ventus antecedens et ſequens erat SO2. Plures hoc anno obſeruare mihi non licuit. Anno 1756 Septembris 11. itidem lux borealis placida conſpecta eſt h. 11. p. m. monſtrante barometro 28. 52, et thermometro 141. vento O vix 1, per diem fuit SW2. Porro Decembris 25. h. 11. p. m. lux borealis, ſed rurſus placida viſa eſt nocte ſereniſſima, vt ſolet, notante thermometro 188, barometro 28. 42, aere tranquillo. Nulla igitur vtroque hoc anno inſignis aurora borealis adparuit, ſaltim mihi notari potuit, quod ſatis inſolitum adhuc, vti quoque talis exiguus earum numerus eſt rarior. Has auroras boreales venti vehementiores non praeceſſerunt, neque frigus ſequutum eſt, vti alias nonnunquam fieri ſolet, praecipue, ſi fuerint inſigniores.

Obſeruationes acus magneticae eo magis nunc adiiciendas putamus, quia interdum motum oſcillatorium, procul dubio ab electricitate aeris pendentem, in acu magnetica, nobis detexiſſe videmur. Poteſt igitur hac ratione praeſentia et defectus, gradus maior et minor electricitatis atmoſphaerae ad mutationes tempeſtatum multum concurrentis, ſine omni periculo obſeruari. Sed acus debet eſſe mobiliſſima. De his obſeruationibus in poſterum plura; hic tantum monemus, declinationem mediam adhuc fere

re $4\frac{1}{2}$ gradibus a borea W verſus aequalem, adeoque hic ſatis eſſe conſtantem, quod iam monuimus Commentar. Nou. Tom. V. pag. 359. occaſione recenſionis declinationis ſinicae *Pekini* conſtantis, videlicet 2 graduum a borea W verſus, non variatae a triginta inde annis. Differentia inter declinationem maximam et minimam 10 minuta prima hic non facile excedit, quantum adhuc obſeruare potui.

Altitudinem pluuiae adcurate ob impedimenta adnotare non potui, hinc eam hic praeterimus, vti quoque reliqua meteora aquea, rorem, nebulas, grandines niues, quoniam omnia ſunt ordinaria. Reſpectu roris monemus tantum, nos impoſuiſſe plantis quibusdam vitra ampla, vt illum rorem, qui merus ſudor plantarum eſt, rite ab rore decidente diſtinguere potuerimus, vbi quidem illum aeſtate fere omni die mane obſeruauimus, rarius autem decidentem, id quod et aliis iam obſeruatum eſſe conſtat.

Hiems anni 1755 ſatis frigida, continua fuit, et bona hic, praeceſſit auctumnus bonus, qui vt plurimum prognoſticum hiemis qualitatis eſſe ſolet. Aeſtas quoque ſat bona, quam hiems bona praeſignificare ſaepe ſolet, vti quoque ver mature ingruens. Idem valet de anni 1756 hieme mitiore. Ab indole igitur auctumni ſaepius qualitatem anni futuri probabiliter hic diiudicare licet. Caeterum vltima congelatio 1755 Aprilis 20, et prima rurſus Octobris 5. eiusdem menſis; prima nix die 21. Neua flumen glacie obductum Nouembr. 24, et 1756

nocte

nocte inter 11 et 12 menſis Nouembris. Vltima congelatio 1756 Aprilis 17. et rurſus prima Octobris 10. Neuae glacies fracta et ſoluta 1755 April. 3 et 1756, Aprilis 2.

Annus vterque quoque ſat fertilis fuit in his regionibus, ſi potiorum prouentuum ratio habeatur, vniverſalis enim fertilitas vix ac ne vix quidem vnquam contingere ſolet et poteſt.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE REFRACTIONIBVS IN ORIS SEPTENTRIONALIBVS

Auctore

G. HEINSIO.

Quo maiori cura refractiones aeuo recentiori indagarunt Aſtronomi, vt elementum hoc in praxi deſideratiſſimum, omni, qua licet, certitudine elaborarent; eo plures ſe obtulerunt varietates, in quibus euoluendis ſtudium omne nondum exhauſtum eſt. Locum quoque obſeruatoris tum quoad libellam, tum quoad ſitum reſpectu Aequatoris hic attendi debere, experimenta ſuaſerunt. Si locum obſeruatoris ſub omnibus circumſtantiis ſemper eundem ponas, generatim quidem refractiones variari deprehendes pro diuerſa ſideris ſuper horizonte altitudine, quam quidem variationem dudum cognouerunt Aſtronomi, et ad leges certas adſtringere allaborarunt, vt cuique altitudini viſae certam atque determinatam adſcribere potuerint refractionem; aſt ſi quaeras, an, manentibus licet omnibus, experientia quoque in eadem altitudine eandem ſemper refractionis quantitatem doceat, (abſtrahamus ab eo diſcrimine, quod difficultas obſeruandi producere ſolet) diſcrepantiam ſaepiſſime notabilem inuenies. Vt hanc eo melius cognoſcere atque diſtinguere poſſimus, *refractiones*, quae ſe in eadem altitudine viſa, ſub qui-

 buscun-

buſcunque caeterum circumſtantiis, offerre ſolent, breuitatis cauſa *homologas* vocare licebit. Iam vero ante memoratus obſeruator in vicinia horizontis refractiones homologas admodum variabiles ſubinde experitur tum eodem die, in eadem aeris temperie, interiecto tantum tempore exiguo; tum diebus diuerſis in eadem licet anni tempeſtate; tum in diuerſis anni tempeſtatibus pro diuerſo caloris et frigoris ſtatu; ita, vt ob hanc refractionum inconſtantiam Aſtronomi quoque obſeruationes coeleſtes in vicinia Horizontis, quantum licet, euitare ſoleant. In maioribus quidem ſiderum altitudinibus idem obſeruator tantam refractionum homologarum inconſtantiam non deprehendit, vt nunc refractionum variationes ſecundum altitudines certiori modo definire et in tabulam redigere ipſi liceat; aliquam tamen homologarum varietatem adhuc inuenit connexa cum aeris temperie reſpectu caloris et frigoris, et alligatam quaſi ad gradus thermometri, dum maiorem refractionem experitur regnante frigore, minorem calore, eandem thermometro eundem gradum notante, prout id obſeruationes conſulto inſtitutae DN. LE MONNIER *in Praef. ad Hiſtor. coeleſtem*, et DN. CASSINI DE THVRY *in Commentar. Acad. Reg. Scient. Pariſ.* ad an. 1742. et 1743. inculcare videntur.

Sed excedat nunc obſeruator e ſuo loco, quem hactenus immotus tenuit, mutetque eum, non quidem ratione ſitus geographici reſpectu circulorum terreſtrium, ſed quoad eleuationem ſuper termino aliquo relationis, quem libella definire ſolet. Altius verbi cauſa aſcendat, ſeu

ſeu a terrae centro magis recedat, et obſeruatas tunc refractiones comparet cum homologis in priſtino loco ſub iisdem circumſtantiis definitis; minores iſtas inueniet ac ante. Sic ad libellam ſuperficiei maris maximae, caeteris paribus, prodeunt refractiones homologae; minuuntur deinceps continuo pro maiori obſeruatoris eleuatione ſuper iſto libellae termino; prout luculenter euicit DN. BOVGVER ex obſeruationibus ſuis in vicinia vrbis *Quito* inſtitutis, (vid. *Commentar. Acad. Reg. Sc. Pariſ.* ad an. 1739. et 1749.).

Tandem obſeruator locum ſuum geographice quoque mutet reſpectu Aequatoris terrae, ſeu mutet latitudinem geographicam, ſeruatis interim libellae reliquarumque circumſtantiarum conditionibus; diſcrepantia iterum in refractionibus homologis ſe offeret; minores iſtae prodire ſolent in vicinia Aequatoris terreſtris, maiores accedendo ad Polos. Hanc refractionum varietatem in praeſenti potiſſimum reſpicere animus eſt; quo in negotio pro modulo quaſi accipimus *Tabulam refractionum Caſſinianam*, quae pro latitudine Pariſienſi Aſtronomis Gallis vſum ſemper praeſtitit inſignem; ita quidem, vt refractionum homologarum ſub minoribus altitudinibus praecipue habeamus rationem, quae diſcrimen ſuppeditare poſſunt notabile; cum e contrario abſolutae refractiones in altitudinibus magnis non ſatis ſenſibiles eſſe ſoleant.

Obſeruationes iam RICHERII in inſula *Cayenna* ſaeculo ſuperiori, et recentiores BOVGVERII in regno

Peruano inſtitutae, rem, pro ſitu obſeruatoris in vicinia aequatoris, extra dubium ponunt. (vid. *Hiſtor. Acad. Reg. Sc Pariſ.* ad an. 1700. p. 140 ad. Batav. et ad an. 1739. pag. 62.) Refractiones aequatoreae vtique inueniuntur minores refractionibus homologis Pariſienſibus. Aſt ſi obſeruationes conſulas, quae refractionum conditiones patefacere poſſunt in regionibus reſpectu climatis Pariſienſis borealioribus, rem nondum deciſam inuenies. Inſperatus Solis exortus, qui *Hollandis* in *Noua Semla* ſub latitudine boreali 76 graduum hybernantibus contigit die 24. Ianuarii ſtyl. vet. an. 1597, argumentum praebet inſignis refractionis horizontalis in oris ſeptentrionalibus, quam *Ricciolus* in *Geograph. Reform.* pag. 263. ex ſuo calculo 2. grad. 7′. 56″. aſſignat, et quae fere quadrupla eſt homologae in Tabula Caſſiniana. Ex obſeruatione Solis inoccidui, cui *Bilbergius* an. 1695. *Tornouiae*, ſub latitudine boreali 65°. 43′. a ſe definita, inuigilauit, refractio 58. minutorum in altitudine viſa 0°. 23′., ideoque fere dupla homologae Pariſienſis emergit. (Vid. *Comment. Acad. Reg. Scienc. Pariſ.* ad an. 1700.) Et ſic quidem augmentum refractionum homologarum in acceſſu ad Polos ſatis euictum videtur. E contrario recentiores Illuſtris *Maupertuis* obſeruationes itidem *Tornouiae* habitae, totam fere concluſionem euertunt. Ex altitudinibus enim Solis meridianis in vicinia Horizontis inter 1°. 57′. et 2°. 46′. captis ad finem anni 1736 et initium 1737. ideoque hyberna tempeſtate, quae refractiones, caeteris paribus, maiores eſſe deberent, deductae refractiones parum vel nihil diſcrepabant a refractio-

fractionibus homologis Pariſienſibus in tabula Caſſiniana; quam conuenientiam quoque altitudines meridianae Veneris inoccíduae ad finem Aprilis an. 1737, nec non diſtantiae Stellae polaris et Arcturi a Zenith obſeruatae docuerunt; ita, vt ipſe Cel. *Maupertuis* concluſerit, ſi refractiones in vicinia aequatoris notabiliter minores inveniantur homologis Pariſienſibus, eas progrediendo Pariſiis ad circulum polarem ſenſibiliter non variari. (*Figure de la terre* ed. Bat. 1738. pag. 169.) Nec obſeruationes *Bilbergii* ſententiae huic refragari luculenter oſtendit idem Cel. obſeruator, ex eleuatione Poli *Tornouiae* a ſe definita, quam 8. minut. maiorem invenit Bilbergiana, immo 11. min. maiorem, ſi *Bilbergii* obſeruationi debita elementa fuiſſent applicata, id quod maiorem in refractione Bilbergiana errorem vtique arguit. His ita comparatis, cum id, quod Hollandis in Noua Semla contigit, animaduerſiones quoque admittat, etſi demus, inſolitum quid in refractione horizontali ibi accidiſſe; quaeſtio: *an refractiones homologae accedendo ad Polos incrementa capiant*; diſcuſſionem vlteriorem non reſpuit.

Obſeruationes ab exercitato obſeruatore et inſtrumentis idoneis conſulto inſtitutae, ſolutionem eiusmodi quaeſtionis ſuppeditare debent, quibus eo maius pretium ſtatuendum eſt, quo rarior iis faciendis conceditur opportunitas, et quo maiora impedimenta et vitae incommoda pro conditione regionis, in qua fieri debent, ſub zona nempe frigida poſitae, et ob coeli inclementiam inhabitabilis, ſe offerre ſolent. *Summorum*

Ruſſiae

Ruſſiae Imperantium glorioſiſſima munificentia feliciter factum eſt, vt eiusmodi obſeruationes pro circumſtantiarum conditionibus vtique rariſſimae reuera extent, inſtar fructus ſingularis, quem celebratiſſima *Ruſſorum* in *Kamſchatkam* expeditio ſubminiſtrauit. Scilicet *Ludouicus de l'Isle de la Croyere*, obſeruator Aſtronomis notiſſimus, qui in dicta expeditione ſtudium ſuum in eo poſuit, vt ſitum locorum *Ruſſiae* et *Sibiriae* geographicum ex obſeruationibus coeleſtibus colligeret, circa finem anni 1737 iter fecerat in extremas, quae reſpectu *Iakuti*, vrbis Sibiriae, ad decurſum fluuii *Lenae* boream verſus ſitae ſunt, regiones. Penetrauerat vsque ad habitationem hybernam ad dextram fluuii *Olenek*, haud procul ab oſtio, quo iſte in Oceanum ſeptentrionalem ſe exonerat, extructam, et inde *Hybernaculum Olenek* (*Olenck-Zimow'je*) dictam. Diſtat iſtud ab oſtiis fluuii *Lenae* in occidentem; et latitudinem habet borealem 73°. 3'. 52". vt infra patebit. Peruenit in hunc locum noſter die 16. Ianuar. ſtil. vet. an. 1738, a quo tempore vsque ad initium Aprilis eiusdem anni varias ibi inſtituit, circa altitudines Solis et fixarum meridianas aliaque phaenomena, obſeruationes, quae ſimul cum aliis ab obſeruatore noſtro in itinere Kamſchatkenſi poſtea habitis, poſt mortem eius *Illuſtri Academiae Scientiarum Imperiali* fuerunt tradita. Solutis quidem chartulis et nonnunquam inordinatim diſpoſitis, vt ferre ſolent eiusmodi itineris incommoda, conſignatae erant iſtae obſeruationes; hoc tamen non impediuit, quo minus varias, ad praeſens inſtitutum optime facientes, certo excerpere licuerit. Quid ſi hae obſeruationes

tiones docerent, refractiones Olenecenſes ab homologis Pariſienſibus nihil differre, immo potius his paululum minores plerumque prodire? Nonne ſententia Illuſtris *Maupertuis* eximium in modum confirmaretur? Nonne ſingulare pretium obſeruationibus iis ſtatuendum eſſet, quae in tam propinquo ad Polum acceſſu, quem nullus Aſtronomorum vnquam attigit, refractionum homologarum conſtantiam inculcarent, et quidem ſub eiusmodi circumſtantiis, quae alias refractiones ſolito maiores indicare ſolent, in loco nempe humili, haud procul a littore oceani ſito, et in ea anni tempeſtate, quae rigidiſſimum gelu in regionibus memoratis procreat?

Sed ad inſtitutum: quod vt rite proſequar, primum obſeruationes ipſas transſcribam, illuſtrationem earum deinde addam, et tandem deductiones ſubiungam. En obſeruationes:

Oleneci an. 1738. ſtyl. vet.	*Nomina fixarum*	*Altitudines meridianae obſeruatae.*	
d. 13. Februar.	Aldebaran	32°.32′.30″.	verſus auſtr.
	Rigel	8. 8. 0	
	Capella	62.17. 0	
	Capella	28.25. 0	verſus bor.
	Lyra	21.18.15	
d. 14. Februar.	Aldebaran	32.32.30.	verſus auſtr.
	Rigel	8. 8.30.	
	Capella	62. 16.40.	
	Capella	28.25.20.	verſus bor.
	Lyra	21.18.30.	

Altitudines meridianae limbi ſuperioris Solis (apparenter inferioris) obſeruatae verſus auſtrum.

Febr.	4.	4°. 17′. 0″. dub.	Mart.	1.	13°. 30′. 0″.	
	6	4. 57. 0. vent.		3	14. 17. 30.	
	7	5. 17. 0.		4	14. 40. 15. dub.	
	8	5. 38. 30. exact.		8	16. 14. 0.	
	10	6. 20. 0. dub.		9	16. 37. 30.	
	11	6. 42. 30. dub.		10	17. 1. 0. dub.	
	13	7. 24. 15. dub. non nihil		11	17. 25. 0.	
	14	7. 46. 0. bona		15	18. 58. 45.	
	15.	8. 8. 30. dub.		18	20. 9. 15.	
	16.	8. 31. 0.		21.	21. 19. 15.	
	17.	8. 52. 30.		22	21. 41. 45.	
	20.	10. 2. 0.		25	22. 51. 15.	
	22.	10. 47. 15.		27	23. 36. 0.	
	25.	11. 56. 0.		30	24. 43. 0.	
	27.	12. 42. 0.	April.	1.	25. 28. 30.	

In tranſitu Lunae per Hyades, qui Oleneci die 15. Februar. ſtyl. vet. an. 1738. contigit, obſeruator noſter feliciter annotare potuit occultationes a limbo Lunae obſcuro duarum fixarum 5^tae magnitudinis, ſibi valde vicinarum, quas *Bayerus* in *Vranom.* vnica litera θ ſignat,
Tab. XVII. cui obſeruationi ſchema extemporaneum, vt Fig. 1. ſitu
Fig. 1. inuerſo monſtrat, euidentiae cauſa adpinxerat. Ope tubi aſtron. 7. ped. ſtellam A (re vera auſtraliorem) vidit immergentem 6ʰ. 29′. 41″.; ſtellam vero B (re vera borealiorem) 6ʰ. 44′. 23″. tempore vero. Momentum

mentum pro A intra 9. vel 10, pro B intra 5 vel 6. ſecunda temporis certum pronunciat; obſtitit enim ventus.

Hae ſunt obſeruationes, quas nunc dilucidare conuenit. Inſtrumentum, quo altitudines Solis et fixarum captae ſunt, expreſſe quidem non nominauit noſter; cum autem iſte an. 1733 Petroburgo Sibiriam petens eum Quadrantem transportauerit, quo antea vſus fuerat Archangelopoli et in nonnullis Lapponiae locis, Pariſiis nempe ab artifice CHAPOTOT confectum, radii 18 digitorum, cuius mentio fit in *Tom. III. Comment. Acad. Imper. Petrop.* p. 433. et 438. nullum eſt dubium, quin idem inſtrumentum adhibuerit in obſeruationibus Oleneceſibus. Ipſae altitudines tranſcriptae ita ſunt comparatae, prout eas obſeruationes immediatae ſuppeditarunt, nulla praeuia cognitione, an linea fiduciae diuiſioni Quadrantis rite reſpondeat; an vero *error*, vt dici ſolet, hic ſe offerat; nec refractionum et reſpectiue parallaxium vlla habita eſt ratio. Imo altitudines fixarum meridianae tum verſus auſtrum, tum verſus boream, conſulto captae ſunt, vt inde error quadrantis innoteſceret; qua methodo obſeruator noſter in itinere ſuo per Sibiriam vbique fere vſus eſt. Cum hoc momentum, cum quo eleuationis Poli determinatio connectitur, primam poſtulet diſquiſitionem, methodum iſtam, prout eam quidem concipio, in vſum ſequentem exponere conducet.

Referat HOR horizontem, HPR meridianum, P Poli locum verum, A punctum, in quo Aequator

vere meridianum traiicit, vt ſit PR Poli, AH Aequatoris eleuatio vera, iſta boream, haec auſtrum verſus. Fingamus euidentiae cauſa, tum in P, tum in A aliquando fixam exiſtere. Ope quadrantis, cuius error detegi debet, exploretur vtriusque fixae altitudo meridiana, alterius PR verſus boream, alterius AH verſus auſtrum, atque, ſupponendo aliquam refractionis tabulam, v. c. *Caſſinianam*, tanquam vniuerſalem, (vt veritas ſaltem approximando cognoſcatur, et conſideratio refractionis excludatur) propter refractionem corrigatur. Si PR + AH (tanquam ſumma altitudinum poli et aequatoris) deprehendatur = 90. gradibus, inſtrumentum nullo laborabit vitio, vt per ſe patet; ſin vero ſumma altitudinum obſeruatarum diſcrepet a 90. gradibus, dabitur error Quadrantis, eiusque duplum inuenietur capiendo differentiam inter complementum altitudinis ſtellae aequatoreae ad 90°, et altitudinem meridianam ſtellae in Polo poſitae. Ponamus enim inſtrumentum altitudinem vera maiorem notare. Hoc modo ope iſtius colligetur ſtellae aequatoreae altitudo meridiana, ſeu eleuatio Aequatoris aH (maior vera AH), cui reſpondebit altitudo Poli πR, tanquam complementum ad 90°, (minor vera PR), deducta ſcilicet ex obſeruatione ſtellae auſtrum verſus, exiſtente $P\pi = Aa$. Aſt, cum inſtrumentum altitudinem ſtellae in Polo poſitae eadem quantitate etiam maiorem vera prodat, ex obſeruatione boream verſus inuenies loco PR altitudinem pR, exiſtente $Pp (= Aa) = P\pi$ Quadrantis errore, cuius duplum $p\pi$ eſt differentia inter complementum altitudinis ſtellae aequatoreae ad 90°, nempe πR, et altitudinem

tudinem meridianam obſeruatam pR ſtellae in Polo poſitae. Similiter, inuerſo tantum ordine, res ſe habet, ſi inſtrumentum altitudinem vera minorem ſiſtat, vt Fig. 3. luculenter exponit. Inde etiam patet, *errorem Quadrantis* Pp eſſe *ſubtractiuum* ab obſeruata altitudine pR (Fig. 2.), ſi altitudo Poli πR ex obſeruatione ſtellae auſtrum verſus definita minor ſit altitudine Poli pR ex obſeruatione ſtellae boream verſus determinata; e contrario *additiuum* ad obſeruatam altitudinem pR (Fig. 3.), ſi altitudo Poli πR ex obſeruatione ſtellae auſtrum verſus deducta maior ſit eleuatione Poli pR ex obſeruatione ſtellae boream verſus inuenta; vt ſcilicet vera prodeat altitudo ſtellae PR. Fig. 3.

Fixae quidem, vt hactenus euidentiae cauſa ſuppoſuimus, neque in Polo, neque in Aequatore exiſtunt, vt methodus praeſcripta immediate ad praxin deduci poſſit; aſt cum ex obſeruatis fixarum altitudinibus meridianis, adhibendo earundem declinationes aliunde cognitas, altitudo Poli eodem modo mediate definiri poſſit, ac ſi immediate ex obſeruatione fixae aequatoreae, vel in Polo poſitae, cognita fuiſſet; praxin ad conſiderationem praecedentem mediate referre licet. Obſeruetur ſcilicet alicuius fixae, quae meridianum in plaga auſtrali tranſit, altitudo meridiana, (quo maior iſta, eo minus erit periculum refractionis) et ope declinationis eius ex Catalogo notae, adhibita propter refractionem correctione, determinetur eleuatio Poli πR errorem Quadrantis adhuc inuoluens. Similiter obſeruetur alicuius fixae in plaga meridiani boreali altitudo meridiana, et ha- Fig. 2. et 3.

habita declinationis et refractionis ratione, exinde inueniatur eleuatio Poli pR itidem Quadrantis errorem comprehendens. Differentia $p\pi$ inter πR et pR dabit duplum Quadrantis errorem, qui an additiuus, an ſubtractiuus ſit, ſecundum praecedentia diiudicari debet. Ipſa tandem eleuatio Poli vera PR innoteſcet ex numero medio arithmetice proportionali inter πR et pR. In hoc quidem negotio refractiones primum circiter tantum cognoſcuntur, ob ignotum Quadrantis errorem; aſt ſi hic approximando detectus fuerit, tum refractiones, tum ipſum inſtrumenti errorem, certiori modo concludere licet. Solem quoque loco fixae auſtrum verſus culminantis eligi poſſe facile patet.

Sic quidem habetur methodus vniuerſalis, Aſtronomo peregrinanti perquam vtilis, tum errorem inſtrumenti, tum eleuationem Poli promte inueſtigandi; aſt inter obſeruationes ſupra exhibitas occurrit aliqua circumſtantia, quae methodum particularem admittit definiendi eleuationem Poli priori praeferendam, cum iſta neque fixarum declinationes, neque inſtrumenti aberrationem, ſed tantummodo refractiones proxime cognitas praeſupponat. Scilicet, ſi vna eademque ſtella circumpolaris ſemper conſpicua pro conditione ſitus Poli reſpectu verticis in reuolutione ſua diurna meridianum traiiciat, vna vice verſus auſtrum, altera vice verſus boream, prout in obſeruationibus ſuperioribus Capellae exemplum praebet, praedicta methodus locum habet. Particularem iſtam voco, quia in regionibus Polis vicinioribus tantum adhiberi poteſt. Cum enim diſta-

diſtantia ſtellae a Polo nonnihil excedere debeat diſtantiam Poli a Zenith, vel eleuationem Aequatoris pro loco aliquo terreſtri, vt memorata conditio locum inveniat, neceſſe eſt, vt altitudo Poli ſuperet 45 gradus; in caſu enim huius altitudinis $= 45°$, fit diſtantia Poli a Zenith $= 45°$, et fixa diſtantiam a Polo $= 45°$ habere debet, vt vna vice tranſeat per Zenith, altera vice horizontem ad partes Poli ſtringat; quae conditio limites ponit vltimos. Si inſuper periculum refractionis in vicinia Horizontis ad partes Poli conſpicui euitari debeat, ponendo eum in finem altitudinem fixae minimam $= 20°$; requiritur altitudo Poli $= 55°$, et diſtantia iſtius fixae a Polo $= 35°$, vt ſaltem haec Zenith traiiciat. Quibus ita comparatis methodum iſtam pro iis terrae locis ſalutarem tantum pronunciare licet, quorum eleuatio Poli excedit 55 gradus.

Sed ad methodum ipſam: cuius gratia ſequentem praemitto propoſitionem. Sint HZR Meridianus; Fig. 4.
HOR Horizon; Z Zenith; P Polus; PR Poli eleuatio; SDN diurnus ſtellae circumpolaris, cuius diſtantia a Polo PS nonnihil maior ſit eleuatione Aequatoris, ſeu PZ; altitudo ſtellae meridiana auſtrum verſus SH, boream verſus, NR; dico eſſe

$$PR = \frac{180° - HS + NR}{2}$$

Eſt enim arcus $SPN = 180° - HS - NR$, $PN\ (= \tfrac{1}{2} SPN) = \frac{180° - HS - NR}{2}$, et $PR\ (= PN + NR) = \frac{180° - HS - NR}{2} + NR = \frac{180° - HS + NR}{2}$.

Cum

Cum tota demonſtratio hiſce nitatur conditionibus, vt ſit HPR ſemicirculus, et PS=PN; ſi ab S et N reſpectu Poli P ad eandem plagam capiantur arcus Ss, Nn, inter ſe aequales, ita tamen, vt altior s in auſtrali, n in boreali plaga meridiani exiſtat; ob Ps tunc = Pn; itidem erit

$$PR = \frac{180° - Hs + nR}{2}.$$

Ponamus iam, vt et hactenus fecimus, altitudines ſtellae noſtrae veras eſſe HS, NR, et PR eleuationem Poli veram; inſtrumentum autem, quo altitudines capiuntur, has iuſto maiores prodere, ita, vt loco HS, NR, ex obſeruatione acquirantur Hs, nR, exiſtente Ss=nN, dum ſcilicet error inſtrumenti Ss, vel Nn, idem ſit, ſiue altitudo menſuretur verſus auſtrum, ſiue verſus boream; patet per formulam $PR = \frac{180° - Hs + nR}{2}$ ex altitudinibus obſeruatis Hs, nR, Quadrantis errorem adhuc inuoluentibus, itidem altitudinem Poli veram inueniri. Neceſſe autem eſt, vt altitudinibus obſeruatis ante applicentur debitae refractiones, quas quidem ob incognitum adhuc inſtrumenti errorem proxime tantum excerpere licet, citra tamen periculum nimii erroris, ſi error Quadrantis ſit exiguus, et altitudo nR non admodum parua.

Inuenta ſic Poli eleuatione; adhibendo diſtantiam ſtellae obſeruatae a Polo ex catalogo, altitudo meridiana eius vera calculo detegi, et ipſe Quadrantis error inueniri poteſt, ſi iſta cum obſeruata altitudine comparetur. Quod ſi error nimius prodiret, altitudines ob-

ſeruatae

ſeruatae inde propius corrigi, et refractiones certiores aſſignari poſſunt, vt demum, repetita operatione, et eleuatio Poli et error inſtrumenti rectius colligantur.

Methodum hanc applicemus nunc ad exemplum Capellae. Altitudo eius meridiana media ex obſeruatis verſus auſtrum eſt 62°. 16′. 50″., verſus boream 28°. 25′. 10″. Adhibitis ex tabula *Caſſiniana* refractionibus conuenientibus, 30″. et 1′. 49″; reſpectiue, habetur per praec. eleuatio Poli = 73°. 3′. 30″. Ex hac deinde et declinatione Capellae ad datum tempus ex Tab. *Caſſini* petita inueni altitudinem meridianam eius veram verſus auſtrum = 62°. 38′. 20″, eamque cum obſeruata 62°. 16′. 20″, habita ſcilicet refractionis ratione comparaui, vt haberetur *Quadrantis error* proxime = 22′. 0″. *additiuus* ad obſeruatam altitudinem, quem nunc eum in finem tantisper ſeruaui, vt refractiones propriores cognoſci poſſent., quae etiam denuo applicatae ſuperiorem Poli eleuationem = 73°. 3′. 32″. producunt.

His peractis ex methodo priori proprius inquiſiui in Quadrantis errorem et Poli eleuationem. Quem in finem adhibui altitudines medias obſeruatas, ſed refractione liberatas

Aldebaran	32°.	31′.	0″.	verſus auſtrum
Capellae	62.	16.	20.	
Lyrae	21.	15.	55.	verſus boream
Capellae	28.	23.	23.	

et cum iis contuli declinationes boreales earundem fixarum ad tempus propoſitum, vt ex obſeruationibus, tum verſus auſtrum, tum verſus boream factis eleuationem Poli cognoſcerem, errorem Quadrantis adhuc inuoluentem.

Cum autem declinationes iſtas ſecundum diuerſos Auctores nonnihil inter ſe diſcrepantes deprehenderem, elegi eas, quas tradiderunt

	Caſſinus (*a*)	*Halleius* (*b*)	*le Monnier* (*c*)
pro Aldebaran	15°.56′.49″.	15°.57′. 6″.	15°.57′.18″.
Lyra	38.32.55.	38.33.28.	38.33.45.
Capella	45.41.49.	45.42.21.	45.41.43.

Inde demum factum eſt, vt prodiret eleuatio Poli errore Quadrantis nondum liberata

ex obſeruationibus borealibus

Capellae	72°.41′.34″.	pro declin.	Caſſini.
	72. 41. 2.	– – –	Halleii.
	72. 41. 40.	– – –	le Monnier.
Lyrae	72. 43. 0.	– – –	Caſſini.
	72. 42. 27.	– – –	Halleii.
	72. 42. 10.	– – –	le Monnier.
Med.	72. 41. 59.		

ex

(*a*) In Tab. Aſtron. pag. 145.

(*b*) In Catalogo, qui pro vſu Obſeruatorii Imper. Petropol. quondam in Mſt. elaboratus eſt.

(*c*) In Tract. La théorie des Cometes, à Paris 1743. 8vo pag. 115.

ex obſeruationibus auſtralibus

Capellae	73. 25. 29.	pro declin.	Caſſini.
	73. 26. 1.	- - -	Halleji.
	73. 25. 23.	- - -	le Monnier.
Aldebaran	73. 25. 49.	- - -	Caſſini.
	73. 26. 6.	- - -	Halleii.
	73. 26. 18.	- - -	le Monnier.
Med.	73. 25. 51.		
Med. ex obſ. bor.	72. 41. 59. vnde		
Quadrantis error duplus	0. 43. 52.		
ſimplus	0. 21. 56. atque		
Eleuatio Poli vera	73. 3. 55.		

Si ſatius ducas, errorem Quadrantis inuentum ſingulis deductionibus auſtralibus, quippe periculo refractionis minus obnoxiis, applicare, atque numeris, qui tunc eleuationem Poli veram exponunt, adiungere eam, quam ex methodo poſteriori, ope ſolius Capellae, nulla declinationis eius habita ratione, cognouimus $= 73°. 3'. 32''$; ſumendo mediam inuenies *Eleuationem Poli veram* $= 73°. 3'. 52''$. quam in vſum ſequentem, vna cum *errore Quadrantis* $= 21'. 56''$. *additiuo*, ſeruare conuenit. Inde erit *Eleuatio Aequatoris vera* $= 16°. 56'. 8''$.

Stabilitis his elementis, prona nunc eſt inueſtigatio refractionum Olenecenſium, ex obſeruatis fixarum altitu-

altitudinibus meridianis. Eiusmodi ſcilicet altitudini addatur Quadrantis error, vt prodeat altitudo ex obſeruatione ſolam adhuc refractionem inuoluens. Ab ea ſubducatur altitudo fixae meridiana vera, quam eleuatio Aequatoris vna cum declinatione fixae ex catalogo nota ſuppeditat. Differentia exhibet refractionem altitudini obſeruatae, et propter errorem Quadrantis correctae, competens. Sic pro *Rigel* eſt

Altit. merid. media verſus auſtrum ex obſeru.	8°. 8′. 15″.
Error Quadrantis	21. 56.
Alt. obſ. refractionem ſolam inuoluens	8. 30. 11.
Altit. merid. vera	8. 24. 12.
Refractio ex obſeru.	5. 59.

pro altitudine 8°. 30′. 11″, cui Tabula *Caſſiniana* aſſignat refractionem 6′. 23″, ideoque 24″. maiorem Olenecenſi. Altitudo vera ſic deducta eſt:

	Declinatio auſtr. Rigel ad an. 1738. Menſ. 5. Februar.
ſecundum Caſſinum	8°. 32′. 20″.
Halleium	8. 31. 55.
le Monnier	8. 31. 32.
Med.	8. 31. 56.
Eleuat. Aequatoris.	16. 56. 8.
Alt. merid. vera	8. 24. 12.

Reſi-

Reliquas fixas tranſeo, quippe quibus alium in finem iam ſum vſus. Solis potius obſeruationes nunc ſunt adhibendae, quae, vt facile patet, ſimilem in modum tractari poſſunt, modo ad tempus, quo meridies verus Oleneci dato die celebratur, declinatio Solis ex Ephemeridibus vel aliunde conſtet, id quod cognitam ſupponit Meridiani Olenecenſis poſitionem. Antequam autem huius inueſtigationem inſtituam, dubio, quod ſe offert, occurrendum eſt, quodque prima fronte omne negotium euertere videtur. Scilicet in definitione Poli pariter ac erroris Quadrantis obſeruationibus applicui refractiones *Caſſinianas*, ideoque tacite cognitas ſuppoſui refractiones Olenecenſes, easque Pariſienſibus aequales. Nonne circulus adeſſe videtur, cum de refractionibus Olenecenſibus quaeſtio ſit? Sic quidem videtur; aſt res eum in finem facta eſt, prout et incidenter iam monui, vt elementa iſta approximando innoteſcant. Si enim refractiones Olenecenſes homologis Pariſienſibus eſſent aequales; deductiones fore ſaluas quisque perſpicit. Nec error notabilis eis induceretur, ſi Olenecenſes a Pariſienſibus nonnihil diſcreparent, praeſertim ſi obſeruationes extra periculum nimiae refractionis poſitae, vt factum eſt, in hoc negotio adhiberentur. Aſt ſi nimis magna locum habitura eſſe diſcrepantia, prout facile quisque ſuſpicari poſſet, tunc vtique de remouendo ſcrupulo ſolliciti eſſe deberemus. Scrupulus iſte augetur, ſi cogitemus, diſcrepantiam iſtam errorem producere debere in determinatione tum eleuationis Poli, tum erroris Quadrantis; vtrumque autem concurrere ad efficiendam refractionis definitionem erroneam.

His ita conſtitutis expediet inquirere, quaenam aberratio in determinatione eleuationis Poli pariter ac erroris Quadrantis ſit proditura, ſi in definitione horum elementorum conſideratio refractionum prorſus negligatur; his enim aberrationibus perſpectis iudicare non ſolum licebit, quinam error in ipſarum refractionum inueſtigatione inde reſultare poſſet; verum etiam, quantum hic error minueretur, poſtquam Tabula iam aliqua refractionum adhibita fuerit in determinatione eleuationis Poli et erroris Quadrantis, ſi quando ſuſpicio adeſſet, refractiones quaeſitas a refractionibus homologis Tabulae ſuppoſitae nimium differre poſſe.

Fig. 5. Sit igitur AH Aequatoris, PR Poli eleuatio vera. Euidentiae cauſa, vt ſupra, ponamus fixam aliquam in A, pariter ac in P, vt iſtius, aequatoreae ſcilicet, altitudo meridiana verſus auſtrum ſit AH; huius, polaris nempe, PR boream verſus. *Sit error* Quadrantis verus ita comparatus, vt obſeruatis altitudinibus addi, ideoque a veris altitudinibus ſubtrahi debeat: hoc enim pacto res ad caſum noſtrae diſquiſitionis accommodatur. Capiatur ſurſum Aα = refractioni, quae altitudini verae AH competit; deorſum autem αa = errori Quadrantis vero; et manifeſtum eſt, ſi ope Quadrantis huius exploretur altitudo meridiana fixae aequatoreae, loco AH acquiri altitudinem aH, errorem inſtrumenti et refractionem inuoluentem. Si

ex AH concludatur eleuatio Poli, inuenietur PR
— αH - - - - - - cR
— aH - - - - - - pR

exiſten-

exiſtentibus $Pc = A\alpha$, $pc = \alpha a$; vnde ſub his conditionibus ex obſeruatione fixae verſus auſtrum altitudo Poli pR colligitur. E contrario ex obſeruatione fixae polaris verſus boream, loco PR primum acquiritur bR propter refractionem Pb, quae altitudini verae PR reſpondet, et deinde πR propter errorem Quadrantis $b\pi$, ita vt nunc eleuatio Poli ex obſeruatione concludatur πR, exiſtente $b\pi = pc = \alpha a =$ errori Quadrantis vero. Si iam per methodum ſuperiorem inueniri deberent eleuatio Poli et error Quadrantis, ſumendus eſſet numerus arithmetice proportionalis medius inter pR et πR, quem ponam QR, exiſtente $pQ = Q\pi = \frac{1}{2}p\pi$; et tunc iudicaretur QR eleuatio Poli, $\frac{1}{2}p\pi$ vel pQ autem error Quadrantis; cum e contrario eleuatio Poli vera ſit PR, error Quadrantis verus pc, vel $b\pi$, vel αa. Quo pacto foret ex neglecta refractionum *aberratio eleuationis Poli* $PQ (= PR - QR)$; et *aberratio erroris Quadrantis* $= pc - pQ$. Vtramque definiamus per refractiones neglectas $A\alpha$, Pb.

Eſt nempe $PQ = pQ - pP$

$$= \tfrac{1}{2}p\pi - pc + Pc$$

ob $pQ = \frac{1}{2}p\pi$, et $pP = pc - Pc$. Eſt porro

$$p\pi = pc + c\pi$$

$$= pc + b\pi - bc, \quad \text{ob } c\pi = b\pi - bc$$

$$= 2pc - bc, \quad \text{ob } \pi b = pc$$

$$= 2pc - Pb - Pc, \quad \text{ob } bc = Pb + Pc$$

$$\tfrac{1}{2}p\pi = pc - \tfrac{1}{2}Pb - \tfrac{1}{2}Pc;$$

vnde $PQ = pc - \frac{1}{2}Pb - \frac{1}{2}Pc - pc + Pc$

$$= \tfrac{1}{2}Pc - \tfrac{1}{2}Pb$$

$$= \tfrac{1}{2}A\alpha - \tfrac{1}{2}Pb, \quad \text{ob } Pc = A\alpha.$$

Aber-

Aberratio erroris Quadrantis fiet

$$\begin{aligned} pc - pQ &= Qc \\ &= Pc - PQ \\ &= A\alpha - \tfrac{1}{2}A\alpha + \tfrac{1}{2}Pb \\ &= \tfrac{1}{2}A\alpha + \tfrac{1}{2}Pb. \end{aligned}$$

Hoc modo neglectus refractionum procreat non ſolum errorem in definitione eleuationis Poli aequalem differentiae refractionum adhibendarum, verum etiam aberrationem erroris Quadrantis, quae ſummae refractionum adhibendarum aequiualet. Hae refractiones $A\alpha$, Pb, non abſolute adſtrictae ſunt ad altitudines veras, AH, PR, vt euidentiae cauſa in hac diſquiſitione ſuppoſuimus. Cum enim ex altitudine fixae alicuius meridiana, ſiue verſus auſtrum, ſiue boream verſus ſumta, ope declinationis eius ex Catalogo notae, mediate concludi poſſit eleuatio Poli, Quadrantis errorem et refractionem comprehendens, eodem modo, ac ſi *immediate id* praeſtitum fuiſſet ex obſeruatione fixae aequatoreae vel polaris; patet, refractionem quaeſtionis tunc altitudini verae iſtius fixae extra Aequatorem vel Polum poſitae reſpondere. Si igitur in noſtro negotio eiusmodi fixae eligantur, quarum altitudines meridianae ſint ſatis magnae; periculum nimiae aberrationis in eleuatione Poli et Quadrantis errore euitari poteſt. Rem vnico exemplo illuſtrare conuenit ex ſuperioribus obſeruationibus. Supponamus itaque tantisper, refractiones Olenecenſes homologis Pariſienſibus eſſe aequales, et eligantur altitudines meridianae, Capellae verſus auſtrum $= 62°. 16'. 50''$, Lyrae verſus boream $= 21°. 18'. 22''$.

Illi

Illi reſpondebit refractio $=31''$. pro Aα (fig. 5.) habenda; huic $=2'.29''$. per Pb explicanda, neglecto ſcilicet Quadrantis errore; quodſi vero iſte circiter cognitus fuerit per methodum ſuperiorem, verbi cauſa $=22'$. additiuus; refractio propius haberetur $A\alpha=30''$, $Pb=2'.27''$. (Contemnendam hic eſſe cenſeo diſcrepantiam refractionum, quae altitudinibus viſis adſcribuntur, ab iis, quae veris altitudinibus debentur, quasque poſtulat theoria) Tunc autem ex neglectu refractionum emergeret aberratio in eleuatione Poli $=\frac{1}{2}A\alpha-\frac{1}{2}Pb$ $=\frac{0'.30''.-2'.27''}{a}=-58\frac{1}{2}''$, vbi ſignum negatiuum indicat, eleuationem Poli ex concluſione, nempe QR, maiorem eſſe vera PR quantitate $58\frac{1}{2}''$; et aberratio in errore Quadrantis eſſet $=\frac{1}{2}A\alpha+\frac{1}{2}Pb=1'.28\frac{1}{2}''$, qua error verus Quadrantis excederet eum ex concluſione.

Sic quidem pro conditione datorum et hypotheſis noſtrae ſat notabiles inueniuntur aberrationes, quae tamen tantae non ſunt, vt omne aeſtimium circa refractiones, praeſertim in vicinia Horizontis, impediant. Videamus ergo, quantus error inde reſultaret in refractionibus ipſis, ſi eas ex falſa Poli vel Aequatoris eleuatione, falſoque Quadrantis errore, prout vtrumque elementum ex neglectu refractionum acquiſiuimus, deriuare velimus. Hunc in finem ſint PR Poli, AH Aequatoris eleuatio vera, in S fixa aliqua culminans, HS eius altitudo meridiana vera, AS declinatio auſtralis vera; et habebitur HS$=$AH$-$AS. Sit iſtius fixae altitudo meridiana falſa, inſtrumento ſcilicet capta, HI; er- Tab. XVII Fig. 6.

error autem Quadrantis verus Ii additiuus, vt habeatur altitudo meridiana Hi ex obſeruatione ſolam refractionem inuoluens. Si igitur ab Hi $(=HI+Ii)$ ſubtrahatur HS, dabitur *refractio vera* Si, ita vt ſit Si
Fig. 7. $(=Hi-HS)=HI+Ii-AH+AS$.

Ponamus nunc eleuationem Poli falſam eſſe QR, exiſtente PQ aberratione eius a vera (PR), cui aequalis ſit Aa, vt prodeat eleuatio Aequatoris falſa aH. Capiatur $as=AS=$ declinationi ſtellae verae auſtrali, et patet, nunc $Hs(=aH-as)$ pro altitudine meridiana vera fixae, ſed falſo, haberi. Sit, vt ante, altitudo fixae inſtrumento capta HI, et fiat $S\eta=$ errori Quadrantis falſo, qui in noſtro caſu minor eſt errore vero Ii quantitate $\eta i(=Ii-I\eta)$, quae aberrationem in errore Quadrantis exponit. Si iam capiatur $H\eta$ $(=HI+I\eta)$, altitudinem meridianam ex obſeruatione acquiſiuiſſe, ſed falſo, credimus ſolam refractionem comprehendentem; vnde $H\eta-Hs=s\eta$ ſiſtet *refractionem falſam*, ita vt ſit $s\eta(=H\eta-Hs)=HI+I\eta-aH+as$. Differentia igitur inter refractionem veram Si et falſam $s\eta$ exhibebit errorem in determinatione refractionis commiſſum. Eſt autem $Si-s\eta=HI+Ii-AH+AS-HI-I\eta+aH-as=Ii-I\eta-AH+aH$ (ob $AS=as$) $=\eta i-(AH-aH)=\eta i-Aa=\eta i-PQ=$ differentiae inter aberrationem in errore Quadrantis et aberrationem in eleuatione Poli, quae in noſtro exemplo conficiet $1'.\,28\frac{1}{2}''-58\frac{1}{2}''=30''$, qua quantitate refractio vera falſam excedit. Cum aberratio erroris Quadrantis (in fig. 5) ſit $=\frac{1}{2}A\alpha+\frac{1}{2}Pb$; aberratio autem in eleuatione Poli, in exemplo noſtro negati-

negatiua, $=-\frac{1}{2}A\alpha+\frac{1}{2}Pb$; fiet differentia $=\frac{1}{2}A\alpha+\frac{1}{2}Pb+\frac{1}{2}A\alpha-\frac{1}{2}Pb=A\alpha$, ita vt error, qui in determinatione refractionum committi hic poteſt, tantummodo aequalis ſit refractioni $A\alpha$, quae altitudini fixae auſtrum verſus captae reſpondet.

Ab inſtituto nimis alienum eſſet, ſi alios obſervationum caſus expendere, vel theoriam adhuc magis promouere vellemus. Sufficit oſtendiſſe, ex neglectu refractionum in determinatione eleuationis Poli et erroris Quadrantis, errorem quidem committi, ſi ipſae refractiones deinde ſint detegendae, ſed exiguum, et conſtantis pro omnibus refractionibus magnitudinis, dummodo ſemel ex obſeruationibus ſtabiliueris eleuationem Poli et Quadrantis errorem, falſo licet, neglectis nempe in definitione horum elementorum refractionibus. Quisque deinde perſpicit, eiusmodi errorem non impedire, quo minus refractiones, praeſertim in vicinia Horizontis, ſatis prope cognoſcantur, quae deinde, ſi lubet, anſam praebere poſſint, ex iis approximando conſtruendi Tabulam refractionum, et ope eius elementa ante ſtabilita corrigendi, vt demum adhuc propius innoteſcerent refractiones in vicinia Horizontis. Sed eiusmodi proceſſum abbreuiare licet, ſi in determinatione praedictorum elementorum ſtatim adhibeatur Tabula aliqua refractionum iam nota, verbi cauſa *Caſſiniana*, vel Pariſienſis. Sic enim quaeſtio de cognoſcendis refractionibus in alio loco, v. c. Oleneci, nunc huc redit, an refractiones Olenecenſes aequales ſint homologis Pariſienſibus, an ab his diuerſae, v. c. maiores. Si aequales ſint, nullus metuendus eſt error in

 inueſti-

inueſtigatione refractionum Olenecenſium; ſin vero diverſae, v. c. notabiliter maiores; error quidem committetur, ſed admodum exiguus, eius nempe magnitudinis in exemplo noſtro, qua refractio Aα (fig. 5.) altitudini Capellae (circiter 62°. 39′ adhibito errore Quadrantis) reſpondens ſub climate Olenecenſi homologam Aα ſub climate Pariſienſi excederet. Fingamus, priorem eſſe duplo maiorem poſteriori, quae ſuppoſitio enormem diſcrepantiam in refractionibus homologis prope Horizontem productura eſſet; exceſſus, ipſi Aα ſub climate Pariſienſi aequalis (=30″.), indicaturus eſſet errorem in determinatione refractionum Olenecenſium committendum, qui vtique tantus non eſt, vt diiudicationem morari poſſit, an refractiones Olenecenſes in vicinia Horizontis ab homologis Pariſienſibus multum diſcrepent, nec ne. Et hoc eſt palmarium quaeſtionis noſtrae, cum neutiquam ſolliciti ſimus de refractionibus Olenecenſibus omni rigore determinandis, id quod etiam a Quadrante exiguo, radii ſcilicet 1½. ped. in obſeruationibus ſuperioribus adhibito, expectari nequit.

Remoto nunc dubio, in id incumbendum eſt, vt definiatur poſitio Meridiani Olenecenſis reſpectu Meridiani loci cogniti. Huc faciunt obſeruatae Olenecí occultationes duarum fixarum ſupra deſcriptae. Vtinam reſpondentes earundem occultationum obſeruationes ſub Meridiano cognito habitae extarent! tunc enim Meridianorum differentia ex voto poſſet determinari, quo facto, praeter vſum, quem intendimus, Geographia Sibiriae borealis incrementum inſigne captura foret. Aſt

cum

cum tranſitus Lunae ad iſtas fixas in omnibus Europae regionibus (reliquas tranſeo) interdiu acciderit; ſpes reſpondentes nanciſcendi obſeruationes eripitur. His ita conſtitutis, ad calculum ex tabulis aſtronomicis confugiendum eſt, vt tempus ſub dato Meridiano, v. c. Bononienſi, numeratum aſſignari poſſit, quo eiusmodi occultatio Oleneci contigit; hoc enim cum momento eiusdem occultationis ſub meridiano Olenecenſi obſeruato ſi comparetur, differentiam Meridianorum Bononienſis et Olenecenſis exponit. Eo quidem modo, ob frequentem calculi a coelo, in motu praeſertim lunari, aberrationem, omnis rigor in determinatione praedictae Meridianorum differentiae expectari nequit, ea tamen tam prope cognoſcetur, vt error ſenſibilis in negotio noſtro, quo tantum declinationes Solis ad tempus meridiei Oleneci deſideramus, metuendus non ſit. Rem ex tabulis *Caſſini* ſum proſecutus. Ex iis ad Februar. an. 1738. habetur

	Longitudo		Latitudo auſtral.
ſtellae B	4°. 17′. 43″.	♊	5°. 47′. 15″.
- - - A	4. 18 8.	♊	5. 52. 55.

Cognito iam ex Ephemeridibus *Manfredi* die $\frac{14}{25}$. Febr. 1738 circiter momento coniunctionis centri Lunae et fixae B e centro terrae viſae, ad interuallum duarum horarum ex Tabulis *Caſſini* loca Lunae vera computaui, et ſequentia elementa pro conſtructione ſchematis inveſtigaui:

Tempus verum ☌ verae centri ☽ et ✱ B
ſub merid. Bonon. 1738. Febr. 25. ſt. n. $23^h. 8'.28''$.
Latitudo centri ☽ auſtral. in ☌. – – – $5^\circ.15'.36''$.
Diſtantia centri ☽ a ✱ B boream verſus
in circulo latitud. – – – – – – – 0. 31. 39.
Horarius ☽ in longitud. – – – – – – 0. 29. 49.
– – – – latitud. decreſc. – – – 0. 0. 14.
Parallaxis ☽ horiz. – – – – – – – 0. 54. 45.
Semidiam. ☽ horiz. – – – – – – – 0. 14. 48.
Angulus Meridiani vniuerſalis cum circulo latitud. orientem verſus – – – – – $10^\circ.19\frac{1}{2}'$.
Declinatio ✱ B boreal. – – – – – – 15. 21. 2.
Culminatio ✱ B tempore ſolari vero ſub
Meridiano Bonon. d. 26. Febr. ſt. n. – $5^h.35'.4''$.
Eadem ſub Meridiano Oleneceníi, cognita ante circiter Meridianorum differ. = $7\frac{1}{2}$. hor. 5. 36. 13.

Tempus verum ☌ verae centri ☽ et ✱ A
ſub Meridiano Bonon. – – – Febr. 25. $23^h. 9'.19''$.
Diſtantia centri ☽ a ✱ A in circulo latitud.
boream verſus – – – – – – – $0^\circ.37'.19''$.
Declinatio ✱ A boreal. – – – – – 15. 15. 32.
Culminatio ✱ A tempore Solari vero ſub
Meridiano Oleneceníi d. 26. Febr. ſt. n. $5^h.36'.18''$.

Ope horum elementorum more conſueto conſtruxi ſchema, et ex eo cognoui

Tem-

	Tempus verum ad meridianum Bononienſem numeratum d.25.Febr.	Idem erat ex obſeruatione ſub Meridiano Olenecenſi d. 26. Febr. ſt. n.	Vnde differentia Meridianorum
Immerſionis * A	23^h. 7'.34''.	6^h.29'41''.	7^h.22'. 7''.
- - - * B	23. 21. 2.	6. 44. 23	7. 23. 21.
Differ.	13. 28.	14. 42.	1. 14.

Cum interuallum immerſionum vtriusque ſtellae ex ſchemate non nihil diſcreparet ab eo ex obſeruatione, aberrationem hanc a latitudinibus vel Lunae, vel ſtellarum, cum coelo non prorſus conſentientibus, pendere iudicaui. Quodſi enim diſtantia vtriusque ſtellae a centro Lunae in circulo latitudinis tantummodo imminueretur quarta parte minuti primi; interualla iſta tum propius inter ſe conueniebant, tum Meridianorum differentiae ex vtraque immerſione definitae eiusdem fere magnitudinis reperiebantur. En deductiones ex hac hypotheſi:

	Tempus verum Bononiae	Tempus obſeruat. Oleneci	Differentia Meridianorum
Immerſionis * A.	23^h. 7'.47''.	6^h.29'.41''.	7^h.21'.54''.
- - - * B.	23. 22. 10.	6. 44. 23.	7. 22. 13.
Differ.	14. 23.	14. 42.	0. 19.

Statuere ergo licebit *Differentiam Meridianorum Bononienſis* et *Olenecenſis* = $7^{hor.}$ 22'. qua Olenecum orientalius eſt Bononia.

Tandem

Tandem fructus harum diſquiſitionum ſunt reportandi, vt nempe ex obſeruationibus Solaribus ſupra adductis refractiones Olenecenſes cognoſcamus, et cum homologis Pariſienſibus comparemus. Scilicet ex Ephemeridibus MANFREDI pro ſingulis obſeruationum diebus excerpſi loca Solis ad Meridiem medium Bononiae computata, quae ope motus diurni Solis et ſtabilitae Meridianorum differentiae, nec non aequationis temporis, tranſtuli ad Meridiem verum Oleneci. Ex his, poſita Eclipticae obliquitate $= 23^{\circ}. 28'. 20''$. determinaui declinationes centri et deinde limbi ſuperioris Solis, adhibita nempe ſemidiametro Solis apparenti ex Tabula *Caſſiniana*. Eleuatio tandem Aequatoris Olenecenſis patefecit altitudines limbi ſuperioris Solis veras Oleneci. Cum his deinde comparaui altitudines limbi ſuperioris obſeruatas, quae ſupra deſcriptae ſunt, poſtquam eis addideram Quadrantis errorem et debitam Solis parallaxin. Exceſſus poſteriorum altitudinum ſuper priores docebant refractiones Olenecenſes. Tabula autem *Caſſiniana* Pariſienſes homologas ſubminiſtrabat. Omne negotium Tabula ſequens luculenter ob oculos ponit:

Oleneci an. 1738 ſtil. nou.	*Altit. merid. limbi ſuper. ⊙ obſeru. adhibitis errore Quadrantis et Parallaxi.*	*Altit. merid. limbi ſuper. ⊙ vera.*	*Refractio Olenecenſis.*	*Refractio Pariſienſis.*
Februar. 15.	4°.39′. 6″. dub.	4°.27′.40″.	11′.26″.	11′.15″.
17.	5. 19. 6. vent.	5. 9. 13.	9. 53.	9. 58.
18.	5. 39. 6.	5. 30. 17.	8. 49.	9. 26.
19.	6. 0. 36. exact.	5. 51. 32.	9. 4.	8. 54.
21.	6. 42. 6. dub.	6. 34. 33.	7. 33.	8. 3.
22.	7. 4. 36. dub.	6. 56. 19.	8. 17.	7. 38.
24.	7. 46. 21. dub.	7. 40. 15.	6. 6.	7. 0.
25.	8. 8. 6. bon.	8. 2. 30.	5. 36.	6. 41.
26.	8. 30. 36. dub.	8. 24. 49.	5. 47.	6. 23.
27.	8. 53. 6.	8. 47. 15.	5. 51.	6. 8.
28.	9. 14. 36.	9. 9. 51.	4. 45.	5. 54.
Mart. 3.	10. 24. 6.	10. 18. 18.	5. 48.	5. 10.
5.	11. 9. 21.	11. 4. 22.	4. 59.	4. 54.
8.	12. 18. 6.	12. 14. 13.	3. 53.	4. 26.
10.	13. 4. 6.	13. 1. 3.	3. 3.	4. 11.
12.	13. 52. 6.	13. 48. 7.	3. 59.	3. 56.
14.	14. 39. 36.	14. 35. 21.	4. 15.	3. 42.
15.	15. 2. 21. dub.	14. 58. 59.	3. 22.	3. 37.
19.	16. 36. 6.	16. 33. 42.	2. 24.	3. 16.
20.	16. 59. 36.	16. 57. 24.	2. 12.	3. 11.
21.	17. 23. 6.	17. 21. 6.	2. 0.	3. 7.
22.	17. 47. 6.	17. 44. 45.	2. 21.	3. 2.
26.	19. 20. 50.	19. 19. 8.	1. 42.	2. 46.
29.	20. 31. 20.	20. 29. 27.	1. 53.	2. 35.

April.	1.	21. 41. 20.	21. 39. 15.	2. 5.	2. 27.
	2.	22. 3. 50.	22. 2. 23.	1. 27.	2. 25.
	5.	23. 13. 20.	23. 11. 8.	2. 12.	2. 17.
	7.	23. 58. 5.	23. 56. 30.	1. 35.	2. 12.
	10.	25. 5. 5.	25. 3. 38.	1. 27.	2. 6.
	12.	25. 50. 35.	25. 47. 43.	2. 52.	2. 1.

Sic quidem ope Ephemeridum, vel Tabularum aſtronomicarum, res confecta eſt, quae legitimum de refractionibus Olenecenſibus iudicium ſuppeditare poteſt. Cum autem tempore eodem, quo obſeruationes ſolares Oleneci habitae fuerunt, varias limbi ſuperioris Solis altitudines meridianas Petropoli in obſeruatorio Imperiali ope Sextantis muralis, radii circiter 5. ped., indagauerim; expediet obſeruationes immediatas inter ſe componere, et ex coelo ipſo refractiones Olenecenſes quaſi addiſcere. Altitudines iſtas aliquot correctionibus purgatas, prout deſcriptas eas aſſeruat Archiuum Academiae, cum puncto aliquo Sextantis comparaui, quod ductu obſeruationum ſolſtitialium Aequatori coeleſti vero reſpondebat. Exinde enim adhibitis refractionibus et parallaxi ex Tabula Caſſiniana, immediate concludere licuit declinationes limbi ſuperioris Solis veras. Vt autem iſtae ad meridiem verum Oleneci transferri poſſent, ſumſi differentiam meridianorum Petropolin inter et Olenecum $= 6^h. 6'$, quam ſcilicet differentia meridianorum inter Petropolin et Bononiam ex Eclipſibus Satellitum Iouis cognita $= 1^h. 16'$. et cum ea inter Bononiam et Olenecum $= 7^h. 22'$. comparata docet. In quo negotio vſus ſum motu diurno Solis in declinationem, prout

prout eum ex longitudinibus Solis in Ephemeridibus conſignatis, adhibitis declinationum tabulis, in ſcrupulis etiam ſecundis deduxi. Inde innotuerunt declinationes limbi ſuperioris Solis verae in meridie Oleneci, et tandem, ope eleuationis Aequatoris iſtius loci, altitudines meridianae verae limbi ſuperioris Solis, quae cum altitudinibus obſeruatis et correctis columnae 2 Tabulae praecedentis comparatae monſtrabant refractiones Olenecenſes. Summam deductionum in ſequentem Tabulam coniicere licet.

Oleneci an. 1738. ſtil. nou.		*Altit merid. limbi ſuper. ☉ obſeru. Oleneci, adhibitis errore Quadrantis et parallaxi.*		*Altit. merid. limbi ſuper. ☉ vera ex obſeru. Petropolitanis deducta.*	*Refractio Olenecenſis.*	*Refractio Pariſienſis.*
Februar.	15.	4°. 39′. 6″.	dub.	4°. 28′. 35″	10′. 31″.	11′. 15″.
*	17.	5 19. 6.	vent	5. 9. 34.	9 32.	9. 58.
*	22.	7. 4. 36.	dub.	6. 56 48.	7. 48.	7. 38.
	24.	7. 46. 21.	dub.	7. 40. 28.	5. 53.	7. 0.
*	25.	8. 8. 6.	bon.	8. 2. 48.	5. 18.	6. 41.
	26.	8. 30. 36.	dub.	8. 25. 9.	5. 27.	6. 23.
	27.	8. 53. 6.		8. 47. 39.	5. 27.	6. 8.
	28	9. 14. 36.		9. 9 48.	4. 48.	5. 54.
Mart.	19	16 36. 6.		16. 33 36.	2. 30.	3. 16.
	21.	17. 23. 6.		17. 20. 48.	2. 18.	3. 7.
	22.	17 47. 6.		17. 44 42.	2. 24.	3. 2.
	26.	19. 20. 50.		19. 18. 50.	2. 0.	2. 46.
	29	20. 31. 20.		20. 29. 33.	1. 47.	2. 35.
April.	1.	21. 41. 20.		21. 38. 53.	2. 27.	2. 27.
	7.	23. 58. 5.		23 56. 6.	1. 59.	2. 12.

 Ob-

Obſeruationes Petropolitanae, ex quibus altitudines meridianas limbi ſuperioris Solis ad Meridianum Oleneceņſem deduxi, iisdem reſpectiue diebus ſunt inſtitutae, praeter eas, quas ſigno (*) notaui, quippe quae obſeruationem vel proximo die praecedenti, vel Petropolitanam ſequenti factam, et ope motus diurni Solis in declinationem reductam concernunt.

Si iam ſummatim expendas, quae hactenus tradita fuerunt, facile concedes, vel refractiones Oleneceņſes homologis Pariſienſibus nonnihil minores, vel iis aequales eſſe habendas, ita, vt Pariſiis accedendo ad Polum refractiones homologae ſenſibiliter non varientur.

RELA-

RELATIO

OBSERVATIONVM

ET

EXPERIMENTORVM, QVORVM INSTITVENDORVM ITER ANNO MDCCLVII. IN INSVLAM OSILIAM SVSCEPTVM OCCASIONEM PRAEBVIT.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

CAPVT I.

Experimenta circa grauitatem beneficio Penduli immutabilis ducta *de la Condamine* Pariſiis elaborati et ad Academiam Imperialem transmiſſi inſtituta.

Il avoit été altéré p. 518.

I.

Pendulum hocce immutabile Horologio Aſtronomico ſimile, machina cultellata, moderatore *Grabamo*, et virga chalybea 26. poll. Pariſ. fere longa, lenteque ponderoſa, cuius diameter 5½ poll. Pariſ. inſtructum per dies aliquot motum ſuum continuans eo praecipue conſilio ab Ill. *de la Condamine* eſt excogitatum, vt differentiae grauitatis, quae per oſcillationes Penduli ſimplicis difficillime obſeruantur, huius organi beneficio accuratius commodiusque definiri queant. Hanc ob cauſam longitudo virgae huius Penduli variari nequit,

propter virgam lenti inſertam et agglutinatam, ita vt grauitatis differentia ex differentia numerorum oſcillationum eodem temporis interuallo et in eadem temperatura confectarum cognoſcatur; comparato nimirum motu Penduli immutabilis ſiue ad coelum ipſum, ſiue ad Horologium Aſtronomicum, cuius vires ad amuſſim ſunt exploratae. Notandum autem eſt, Pendulum hocce immutabile, loco diſci horarii, indice eſſe munitum, cuius reuolutio integra 100000 oſcillationibus Penduli abſoluitur, ita vt hic et caeteri duo huius Penduli indices non horas et minuta, ſed numerum oſcillationum Penduli denotent. Exhibiturus ſum itaque non ſolum praecipuas comparationes, quas inter hocce Pendulum immutabile, et Horologium Aſtronomicum ab artifice *Tbiout* elaboratum, Petropoli, Reualiae, in Inſula Oſilia, et in nonnullis Liuoniae locis inſtitui, et quae explorandae motus Pendulorum aequabilitati inſeruiunt; verum etiam obſeruationes Aſtronomicas exquiſitiores, ibidem, ad vtriusque Penduli motum cognoſcendum, maxima, qua potui, accuratione habitas ordine, referam. Cum vero grauitatis differentia ex motu Penduli huius immutabilis accurate erui nequeat, niſi experimenta in eadem temperie aeris inſtituta, vel ſaltem ad eandem aeris temperiem reducta ſint, Thermometri iuxta Pendulum immutabile et Horologium Aſtronomicum affixi gradus in omnibus et ſingulis experimentis ſedulo adnotaui, et ſi quis praeterea Barometri ſtatum deſideret*, illum in obſeruationibus meis meteorologicis inueniet notatum.

II.

Obſeruationes et experimenta circa gravitatem ante abitum in Inſulam Oſiliam, Penduli immutabilis beneficio, Petropoli inſtituta.

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{11}{22}$ Aug. mane	$6^{h}.45'.33''$.	- - - -	15°½ ſupra o	Appulſ. Sirii
d. $\frac{12}{23}$ Aug. - -	- - - -	- - - -	15 - - -	ad fil. vert.
d. $\frac{13}{24}$ Aug. mane	- - - -	- - - -	15½ - -	Teleſco-
poſtmerid.	2. 25. 59½ v. ½	- - 20000	16 - -	pii fixi bi-
veſp.	7. 32. 24½ - -	- 41000	15 - -	pedalis.
d. $\frac{14}{25}$ Aug. mane	6. 50. 54¼ - -	- 87500	14¾ - -	
	9. 54. 1¼ - -	1^{R}. + 50	15½ - -	
poſtmerid.	2 44. 23⅓ - -	1^{R}. + 19950	16 - -	
d. $\frac{15}{26}$ Aug. mane	7. 48. 42 - -	1^{R}. + 90150	15½ - -	
poſtmerid.	1. 22. 6½ - -	2^{R}. + 18000	16 - -	
d. $\frac{16}{27}$ Aug. mane	9. 11. 18¼ - -	2^{R}. + 94500	15 - -	
poſtmerid.	0. 57. 28⅓ - -	3^{R}. + 10000	16 - -	
	4. 7. 9½ - -	3^{R}. + 23000	16 - -	
d. $\frac{17}{28}$ Aug.	0. 10. 54 - -	- - - -	16½ - -	Appulſ. 1^{mi}
Alia comparatio.				limbi Solis
				ad fil. vert.
d. $\frac{18}{29}$ Aug. mane	8. 59. 59½ v. ½	- - 61000	15½ - -	Tranſitorii
poſtmerid.	1. 0. 45¼ - -	- - 77500	16½ - -	5 ped.
veſp.	9 25. 37¼	1^{R}. + 12100	15¾ - -	
d. $\frac{19}{30}$ Aug. mane	8. 21. 30⅔ -	1^{R}. + 57050	15½ - -	
poſtmerid.	1. 19. 54⅔ -	1^{R}. + 77500	16¾ - -	

Alia

Alia comparatio.

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{20}{21}$ Aug. mane	$8^{h}.16'.33''\frac{1}{2}$	- - 0 - -	$15^{\circ}\frac{3}{4}$ ſupra o	
veſp.	9. 32. 31 -	- - 54550	$16\frac{1}{2}$ - -	
d. $\frac{21}{1}$ $\frac{Aug.}{Sep.}$ mane	6. 43. $55\frac{1}{2}$ -	- - - -	$15\frac{1}{2}$ - -	Appulſ. Sirii
mane	9. 12. $10\frac{3}{4}$ -	1^{R}. + 2500	$15\frac{3}{4}$ - -	ad fil vert. Teleſc fixi
	0. 24. $47\frac{1}{2}$ -	- - - -	- - -	Appulſ. 1^{mi}
poſtmerid.	- - - -	- - - -	18 - -	limbi Solis
veſp.	9. 31. 58 -	1^{R} + 53200	$16\frac{1}{2}$ - -	ad fil. vert.
d. $\frac{22}{2}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ antem.	11. 6. 10 -	2^{R}. + 9000	$16\frac{1}{2}$ - -	
veſp.	10. 17. $22\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{3}$	2^{R}. + 55000	16 - -	
d. $\frac{23}{3}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ mane	6. 43. $34\frac{3}{4}$ -	- - - -	- - -	Appulſus
mane	8. 1. $1\frac{1}{3}$ v. $\frac{1}{3}$	2^{R}. + 95000	16 - -	Sirii ad fil.
	9. 46. 5 -	3^{R}. + 2200	$16\frac{1}{2}$ - -	vert. Teleſcopii fixi.

Motus igitur Horologii Aſtronomici pro die Solari *medio*

inter d. $\frac{12}{23}$ Aug. et $\frac{27}{7}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ ex obſeruationibus Sirii fuit $24^{h}.3'.46''\frac{1}{4}$

$\frac{17}{28}$ Aug. et $\frac{21}{1}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ ex obſeruationibus Solis - 24. 3. $46\frac{1}{2}$

$\frac{21}{1}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ et $\frac{23}{3}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ ex obſeruationibus Sirii - 24. 3. $46\frac{1}{10}$

Confecit itaque Pendulum immutabile ſpatio diei Solaris medii

a d. 13. ad 14 Aug. ſt. v.	98948,1 Oſcillat.	Therm. Reaum. indicante	15° ſupra o
14. ad 15 Aug.	- 98948,2 - -		$15\frac{1}{2}$ —
15. ad 16 Aug.	- 98947,6 - -		$15\frac{1}{2}$ —
18. ad 19 Aug.	- 98946,1 - -		16 —
20. ad 21 Aug.	- 98946,4 - -		$16\frac{1}{2}$ —
21. ad 22 Aug.	- 98946,4 - -		$16\frac{1}{2}$ —
22. ad 23 Aug.	- 98946,7 - -		$16\frac{1}{2}$ —

Per

Per medium igitur inter iſta experimenta motus Penduli immutabilis diei Solari medio reſpondens in temperie aeris 16°. Therm. Reaumur. ſupra o Petropoli erit ,98947. Oſcillat.

III.

Obſeruationes et experimenta circa grauitatem mediante Pendulo immutabili Reualiae inſtituta.

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{3}{14}$ Sept. mane	$7^h.51'.27''\frac{1}{2}$	- - 80060	14°. ſupra o	
poſtmerid.	4. 22. 55 -	$1^R.+15050$	$14\frac{1}{4}$ -	
	11. 8. $21\frac{2}{3}$	- - - -	- - -	Appulſ. α ♉
	11. 20. 59 -	$1^R.+43700$	14 - -	ad lamin.
d. $\frac{4}{15}$ Sept. mane	6. 43. $7\frac{1}{3}$ v. $\frac{1}{3}$	$1^R.+74000$	14 - -	vert. Tranſitorii.
	11. 7. 21	- - - -	- - -	Appulſ. α ♉ ad fil. vert. Tranſitorii.
	11. 8. $2\frac{1}{3}$ -	- - - -	- - -	Appulſ. α ♉
	11. 25. 37 -	$2^R.+42700$	$13\frac{1}{2}$ -	ad laminam
d. $\frac{5}{16}$ Sept. mane	6. 18. $34\frac{1}{4}$ -	$2^R.+71000$	$13\frac{1}{2}$ -	verticalem Tranſit.

Alia comparatio.

mane	9. 43. 52 -	- - 85000	14 - -	
	11. 7. 13 -	- - - -	- - -	Appulſ. α ♉ ad fil. vert. Tranſit.

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur. ſupra o	
d. $\frac{5}{16}$ Sept. mane	$11^h. 7'.54''$	- - - - -		App. α ♉ ad
	11. 17. 24	1^R. + 40750	$13\frac{1}{7}$ - -	lam. vertic.
d. $\frac{6}{17}$ Sept. mane	6. 50. 30	1^R. + 71800	13 - -	Tranſitor.
	11. 7. $5\frac{1}{4}$	- - - -	- - -	App. α ♉ ad fil. vertic. Tranſit.
	11. 7. $46\frac{1}{2}$	- - - -	- - -	Appulſ. α ♉
	11. 15. 30	2^R. + 39300	13 - -	ad lamin.
d. $\frac{7}{18}$ Sept. mane	7. 18. 31	2^R. + 72400	13 - -	verticalem
d. $\frac{8}{19}$ Sept. mane	8. 15. $42\frac{1}{4}$	3^R. + 75000	13 - -	Tranſitor.

Alia comparatio.

d. $\frac{8}{19}$ Sept. poſt-merid.	3. 19. 11	- - 3950	$13\frac{1}{2}$ -	
d. $\frac{9}{20}$ Sept. mane	7. 32. 30	- - 70650	13 - -	
poſtmerid.	5. 6. 43	1^R. + 10000	$13\frac{1}{4}$ - -	
	11. 6. 40	- - -	- - - -	Appulſ. α ♉ ad fil. vert. Tranſitor.
	11. 7. 21	- - -	- - -	Appulſ. α ♉
	11. 23. 12	1^R. + 35800	$12\frac{2}{3}$ - -	ad laminam
d. $\frac{10}{21}$ Sept. mane	7. 56. $51\frac{1}{4}$	1^R. + 71000	$12\frac{1}{3}$ - -	verticalem
poſtmerid.	0. 32. 39	1^R. + 89900	$12\frac{1}{3}$ -	Tranſitorii.

Ex praecedentibus obſeruationibus ſequens Horologii Aſtronomici motus pro die Solari medio colligitur; nimirum:

Ex obſeruationibus d. 3 et 4 Sept. ſt. v. habitis $24^h.3'.47'',3$

d. 4 et 5 Sept. - - 24 3. 48, 3

d. 5.

d. 5 et 6 Sept.	- -	24. 3. 48, 9
d. 6 et 9 Sept.	- -	24. 3. 48, 1

Per medium igitur inter iſtas obſeruationes motus Horologii Aſtron. diei Solari medio reſpondens a d. 3 ad 9 Sept. ſt. v. erit - - $24^{h}.3'.38'',1$

Hoc Horologii Aſtronomici motu admiſſo, Pendulum immutabile ſpatio diei Solaris medii in temperie aeris media $13°\frac{1}{4}$ Therm. Reaumur. ſupra o abſoluit

a d. 3. ad 4 Sept. ſt. v.	98943,2	Oſcillationes
4. ad 5 Sept. - -	98942.5	- - -
5. ad 6 Sept. - -	98940,9	- - -
6. ad 7 Sept. - -	98940,7	- - -
7. ad 8 Sept. - -	98941,6	- - -
8. ad 9 Sept. - -	98941,7	- - -
9. ad 10 Sept. - -	98941,7	- - -

Per medium itaque inter iſta experimenta motus Penduli immutabilis pro die Solari medio in temperie aeris $13°\frac{1}{4}$ Therm. Reaumur. ſupra o. An. 1757. menſe Septembri Reualiae fuit 98941,8 Oſcillat.

IV.

Obſeruationes et experimenta circa grauitatem in Oſilia Inſula Penduli immutabilis beneficio diuerſis anni tempeſtatibus perfecta.

Propter coelum autumno An. 1757. hiemeque inſequente plerumque nubilum, paucas quidem pro tem-

 poris

poris ſpatio obſeruationes in Inſula Oſilia peragere licuit; ſequentes tamen obſeruationes ad motum Penduli immutabilis definiendum, et grauitatis differentiam inter Oſiliam Inſulam et Petropolin accuratiſſime dimetiendam ſpectantes, ſumma inſtitui diligentia.

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{15}{26}$. Oct. veſp.	$11^{h}.18'.34''\frac{1}{2}$.	- . - 45150	6°. ſupra 0	
d. $\frac{16}{27}$. Oct. mane	8. 18. 29 - -	- . 82150	$6\frac{3}{4}$ —	
circa merid.	- - - -	- - - -	$7\frac{1}{2}$ —	
veſp.	6. 23. 42 - -	- - - -	- - -	Appulſus Arcturi ad 2. fil. vert. Tranſitorii
	6. 24. 20 circ.	- - - -	- - -	Appulſus Arcturi ad laminam vert. Tranſitorii
	6. 29. $10\frac{1}{3}$ -	1^{R}. + 24000	$6\frac{3}{4}$ —	
d. $\frac{17}{28}$. Oct. mane	8. 28. $13\frac{1}{3}$ v. $\frac{1}{2}$	1^{R}. + 81500	5 —	
veſp.	11. 33. $40\frac{2}{3}$ -	2^{R}. + 43550	$6\frac{3}{4}$ —	
d. $\frac{18}{29}$. Oct. mane	8. 10. 59 - -	2^{R}. + 79000	7 —	
poſtmerid.	1. 17. $25\frac{1}{2}$ - -	3^{R}. - - -	$7\frac{1}{2}$ —	

Alia comparatio.

d. $\frac{18}{29}$. Oct. poſt-merid.	3. 49. $16\frac{1}{2}$ -	- - - - 300	8 —	
d. $\frac{19}{30}$. Oct. mane	8. 46. $21\frac{3}{4}$ -	- - - 70000	5 —	
poſtmerid.	- - - -	- - - - -	$7\frac{1}{2}$ —	

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. 20/31. Oct. mane	- - - -	- - - - -	5½ - -	
antemerid.	11ʰ. 11′. 6⅓″	1ᴿ. + 78600	7¼ - -	
vesp.	6. 20. 58 - -	- - - -	- - - -	Appulſus Arcturi ad 1. fil. vert. Tranſitorii
	23. 17½	- - - -	- - - -	Appulſus Arcturi ad 2. fil. vert. Tranſitorii
	23. 55 circ.	- - - - -	- -	Appulſus Arcturi ad laminam verticalem Tranſitorii
	6. 27. 24⅔ - -	2ᴿ. + 8500	8 —	
d. 21 Oct./1 Nou. mane	10. 18. 6 - -	2ᴿ. + 73650	8 —	
vesp.	- - - -	- - - -	9 —	

Manifeſtum eſt ex iſtis obſeruationibus Arcturi, Horologium Aſtronomicum a d. 16. ad 20. Oct. motum ſuum ſuper tempus Solare medium acceleraſſe 3′. 50″, 4 pro 24ʰ. Vnde emergit per medium motus Penduli immutabilis ad diem Solarem medium pro iſto tempore, et pro temperie aeris media 6°½ Therm. Reaumur. ſupra 0, 98945 Oſcillationes.

Alia inquiſitio.

d. 22 Oct./2 Nou. mane	- - - -	- - - -	6°½ ſupra 0	
vesp.	- - - -	- - - -	8½ - -	
d. 23 Oct./3 Nou. mane	- - - -	- - - -	7 -	
vesp.	- - - -	- - - -	9½ - -	

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{24 \text{ Oct.}}{4 \text{ Nou.}}$ mane	- - - -	- - - - -	7½ ſupra o	
veſp.	- - - -	- - - - -	8½ - - -	
d. $\frac{25 \text{ Oct.}}{5 \text{ Nou.}}$ mane	- - -	- - - -	6¾ - -	
antemerid.	0. 59 11¼ v. ⅓	- - o -	7 - -	
veſp.	6. 20. 29 -	- - - -	- - -	Appulſus Arcturi ad 1. fil. vert. Tranſitorii.
	22. 49. -	- - - -	- - -	Appulſus
	11.41.15¼ v. ⅓	- - 44000	8 - - -	Arcturi ad
d. $\frac{26 \text{ Oct.}}{6 \text{ Nou.}}$ antem.	0.25'.10''.	- 96350	7. - - -	2. fil. vert.
veſp.	- - - -	- - - - -	8. - - -	Tranſitorii.
d. $\frac{27 \text{ Oct.}}{7 \text{ Nou.}}$ mane	9. 22. 17¾ -	1^R. + 82500	7½ - - -	
veſp.	- - - -	- - - - -	8½ - - -	
d. $\frac{28 \text{ Oct.}}{8 \text{ Nou.}}$ - - -	0. 43. 56¼ -	2^R. + 95000	8¼ - - -	

Ex hiſce obſeruationibus colligitur motus *Horologii* aſtronomici ad diem Solarem medium $24^b.3'.50''\frac{3}{43}$, adeoque motus Penduli immutabilis pro eodem temporis ſpatio, et ad temperiem aeris mediam $7^{\circ}\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. ſupra o - - - 98945. Oſcillat.

Alia inquiſitio.

d. $\frac{18}{29}$ Nou. mane	- - - -	- - - - -	6. ſupra o	
veſp.	4. 18. 32¼ -	- - - - -	- - -	Appulſus
	4. 25. 17 -	- - - 650	6½ - -	Arcturi ad 2. fil. vert. Tranſitorii.

1757.

1757.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{19}{30}$ Nou. mane	- - -	- - - - -	5. - - -	
merid.	- - -	- - - - -	$7\frac{1}{2}$ - - -	
	4. 16. $18\frac{1}{2}$ -	- - - - -	- - - -	Appulſus Arcturi ad 1. fil. vert. Tranſitor.
	18. 31 -	- - - - -	- - -	Appulſus
	4. 31. 29 -	- - 99750	$7\frac{1}{2}$ - - -	Arcturi ad 2. fil. vert. Tranſitor.

Habebimus itaque ſecundum iſtas obſeruationes appulſum Arcturi ad 2. fil. Tranſitorii d. $\frac{19}{30}$ Nou. 187,7 Oſcillat. Pend. immutab. et d. $\frac{19}{30}$ Nou. $98861\frac{1}{2}$ Oſcillat. eiusdem Penduli, ita vt motus iſtius Penduli pro die ſidereo ſit 98673, 8 Oſcillat. et pro die Solari medio in temperie aeris $6°\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. ſupra o - - 98944 Oſcillat.

Alia inquiſitio.

1758.				
d. $\frac{7}{18}$ Ian. veſp.	8. 15. 30 -	- - - - -	$5\frac{1}{2}$ infra o	Appulſus β Orionis ad fil. vertic. Teleſc. fixi.
	18. 6. -	- - - - -	- - -	Egreſſus β Orionis.

1758.

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur	
d. $\frac{8}{9}$ Ian. mane	11^{h}. 59$'$. 18$''$	- - - 3400	6° infra o	
veſp.	8. 22. 44	- - - 37900	6. —	
d. $\frac{9}{10}$ Ian. mane	11. 14. 19$\frac{1}{2}$	- - 96030	6$\frac{1}{2}$. —	
veſp.	7. 14. 16$\frac{1}{2}$	- - - -	6$\frac{1}{2}$ —	Appulſus α ♉ ad laminam vert. Tranſitorii.
	8. 15. 47	- - - -	6$\frac{1}{2}$ —	Appulſus β Orionis ad fil. vertic. Teleſcopii fixi.
	18. 14. 14$\frac{1}{2}$	- - - -	— —	Egreſſus β Orionis.

Per medium illorum iſtas obſervationes motus Horologii aſtronomici ad diem Solarem medium *inter* d. 8 et 9 Ian. fuit 24^{h}. 4$'$. 0$''$, 6, et motus Penduli immutabilis pro eodem temporis ſpatio in temperie aeris 6° vel 6°$\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. infra o - - 86957 Oſcillat.

Alia inquiſitio.

d. $\frac{19}{20}$ Ian. veſp.	11. - - -	- - - -	4$\frac{1}{2}$ infra o	
d. $\frac{20}{21}$ Ian.	- - - -	- - - -	4 —	
d. $\frac{21}{22}$ Ian.	- - - -	- - - -	3 —	
d. $\frac{22}{23}$ Ian. poſtm.	3. 30. 2$\frac{1}{2}$	- - 2700	2$\frac{1}{2}$ —	
d. $\frac{23}{24}$ Ian.	- - - -	- - - -	3 —	

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{14}{25}$ Ian. mane	9. 58. 59¼ -	1^R. + 75600	infra 0	
d. $\frac{15}{26}$ Ian. mane	11. 31. 8 -	2^R. + 80600	2½ ——	

Alia comparatio.

d. $\frac{16}{27}$ Ian. mane	10. 55. 42½ -	- = 1800	2½ ——	
veſp.	7. 14. 19 -	- - - - -	—— ——	Appulſ. *a* ♉ ad laminam verticalem Tranſitorii.
	8. 15. 49 -	- - - - -	3 ——	Appulſus β Orionis ad fil. vert. Teleſcopii fixi.
	18. 16½ -	- - - - -	—— ——	Egreſſus β Orionis.
d. $\frac{17}{28}$ Ian. mane	9. 6. 29¼ v. ⅓	- - 93000	3¼ ——	
veſp.	5. 44. 29¾ -	1^R. + 28500	2½ ——	

Per medium igitur inter iſtas obſeruationes prodibit motus Horologii aſtron. diei Solari medio reſpondens $24^b. 3'. 56''\frac{4}{5}$, et motus Penduli immutabilis pro iſto temporis ſpatio in temperie aeris 3°. Therm. Reaum. infra 0 - - 98955½ Oſcillat.

1750.	I. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
	Alia inquiſitio.			
d. $\frac{22}{2}$ Ian. Febr. antem.	11^{h}. 12′. 28″$\frac{1}{3}$ -	- 0 - -	1°$\frac{1}{4}$ infra 0	
d. $\frac{23}{3}$ Ian. Febr. - -	0. 44. 37$\frac{3}{4}$ v. 38	1^{R}. + 5000 -	2$\frac{1}{2}$ -	
d. $\frac{24}{4}$ Ian. Febr. antem.	11. 50. 52$\frac{1}{3}$ v. $\frac{1}{2}$	2^{R}. - - -	2$\frac{1}{2}$ - -	
veſp.	9. 13. 6 - -	- - -	- - -	Appulſus γ Orionis ad fil. vert. Tel. fixi.
	15. 53 - -	- - -	- - -	Egreſſus γ Orionis.
d. $\frac{25}{5}$ Ian. Febr. antem.	0. 17. 22 - -	3^{R}. + 500 -	1°$\frac{1}{4}$ - -	
	Alia comparatio.			
d. $\frac{26}{6}$ Ian. Febr. antem.	11. 57. 40 - -	- - - 500	3$\frac{1}{4}$ infra 0	
veſp.	9. 13. 5 - -	- - -	2 - -	Appulſus γ Orionis ad fil. vert. Teleſcopii fixi
	15. 52$\frac{1}{2}$ -	- - -	- - -	Egreſſus γ Orionis.
d. $\frac{27}{7}$ Ian. Febr. mane	- - - - -	- - - -	2$\frac{1}{4}$ - -	
veſp.	6. 21. 39$\frac{1}{4}$ -	1^{R} + 25500	3 - -	

Per medium itaque inter iſtas obſervationes motus Horologii Aſtronomici ad diem ſidereum fuit 24^{h}. 3′. 56″, 1, et Penduli immutabilis motus pro eodem temporis ſpatio in temperie aeris 2°. Therm. Reaumur. infra 0 98954. Oſcillat.

Alia

Alia inquiſitio.

In Iſthmo montuoſo Inſulae Oſiliae (vulgo Schworbe) e regione Curlandiae ſito, in praedio Torkenhoff:

	1. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{16}{27}$ Febr. veſp	7^b. - -	3458 - -	9°. ſupra ○	Appulſus Sirii ad fil. vert. Tranſitorii.
m. n.	12. - -	- -	$8\frac{1}{2}$ - -	
d. $\frac{17}{28}$ Febr. mane	8. - -	- - -	$7\frac{1}{2}$ - -	
poſtm.	3. - -	- - -	$8\frac{1}{2}$ - -	
veſp.	7. - -	1^R+2131 circ.	$9\frac{1}{4}$ - -	Appulſ Sirii ad fil. vert. Tranſitorii.

NB. Sirius minutis ante aliquot ſecundis filum verticale Tranſitorii iam transgreſſus per nubes emicabat; quare Appulſum eius ad iſtud filum hodie accuratiſſime obſeruare non licuit.

Alia inquiſitio

alio in loco maritimo Arensburgenſi ſpeculae Aſtron. proximo peracta.

d. $\frac{23}{5}$. Febr. Mart. veſp.	9^b. - -	- - 6353 -	5°. infra ○	Appulſus α Cygni ad fil. vert. Tranſitorii.
	$11\frac{1}{2}$ - -	- - - -	$5\frac{1}{2}$ ——	
d. $\frac{24}{7}$ Febr. Mart. mane	9 - -	- - - -	6 ——	
poſtm.	4 - -	- - - -	5 ——	
veſp.	9 - -	1^R. + 5039 -	$5\frac{1}{2}$ ——	Appulſus α Cygni ad fil. vert. Trantorii.

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſciſſationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
		$1^R. + 5141\frac{1}{3}$	- -	Appulſus *α*
d. 25. Febr. / 8. Mart. mane	8^h. - - -	- - - -	$5\frac{1}{2}$ ——	Cygni ad
mer.	12. - .	- - - -	5 ——	lamin. vert.
veſp.	9			Tranſitorii.
	- - -	$2^R. + 3726$ -	$4\frac{1}{2}$ ——	Appulſus *α* Cygni ad fil. vert. Tranſitorii.
		$2^R. + 3828$ -	- - -	Appulſus *α* Cygni ad lamin. vert. Tranſitorii.

Patet igitur ex iſtis obſeruationibus, Pendulum immutabile in temperie aeris $8^\circ\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. ſupra o ſpatio diei Solaris medii in praedio Torkenhoff *confeciſ*ſe fere 98944 Oſcillationes: In altero autem loco maritimo Arensburgenſi ſpeculae Aſtron. proximo, Pendulum immutabile in temperie aeris $5^\circ\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. infra o die Solari medio abſoluit 98956$\frac{2}{3}$ Oſcillationes; quod cum caeteris obſeruationibus et experimentis media in Inſula Oſilia inſtitutis ſatis bene reſpondeat, argumento eſt, grauitatem in Oſilia Inſula pro locorum differentia nulli obnoxiam eſſe varietati notatu dignae.

Alia

Alia inquiſitio.

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur	
d. $\frac{27}{7}$. Mart. Apr. veſp	$3^b.23'.47''\frac{1}{3}$ - -	- - 1100 ·	$2^{\circ}\frac{1}{2}$ ſupra o	
	4. 11. $5\frac{2}{3}$ - -	- - - -	$1\frac{1}{4}$ ——	Appulſ. α ♉
d. $\frac{28}{8}$. Mart. Apr. manè	- - - -	- - - -	$0\frac{3}{4}$ ——	ad fil. vert.
poſtmer	- - - -	- - - -	$1\frac{3}{4}$ ——	Tranſitorii.
veſp.	2. 23. 39 - -	1^R. + 8000 -	$1\frac{1}{2}$ ——	
	4. 11. 2 - -	- - - -	$1\frac{1}{2}$ ——	Appulſ. α ♉
d. $\frac{29}{9}$ Mart. Apr. manè	1. 58. $13\frac{1}{2}$ - -	1^R. + 55600	$1\frac{1}{2}$ ——	ad fil. vert. Tranſitorii.

Confecit itaque Horologium Aſtronomicum ſecundum iſtas obſervationes die Solari medio 86632,8 Oſcillationes; Pendulum autem immutabile eodem temporis ſpatio in temperie aeris $1^{\circ}\frac{1}{2}$ Therm. Reaumur. ſupra 0, 98951$\frac{1}{2}$ Oſcillat.

Alia inquiſitio.

d. $\frac{18}{29}$. Apr. veſp.	$3^b.58'.54''$	- - -	- - -	Appulſus ♂
	4. 5. $28\frac{3}{4}$	- - 4400	9° ſupra o	♍ ad fil. vert. Teleſcopii fixi.
	4. 7. $24\frac{1}{2}$	- - -	- - -	Appulſus α ♉ ad 1 fil. vert. Tranſitorii.
	9. 41	- - -	- - -	Appulſus α ♉ ad 2 fil. vert.

 1758.

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
	10. 23	- - -	ſupra o	Appulſ. α ♉
d. $\frac{13}{24}$. Apr. mane	- - -	- - -	7½ ——	ad laminam
poſtmerid.	11. 8. 0	- - 82700	9½ ——	verticalem.
veſp.	8. 58. 43	- - -	- - -	Appulſus α ♍ ad fil. vert. Teleſcopii fixi.
	4. 1. 45	- - -	- - -	Egreſſus α
	4. 4. 56	1R. + 3050	9¼ ——	♍.
	4. 9. 29½	- - -	- - -	Appulſ. α ♉ ad 2 fil. vert. Tranſitorii.
	10. 11	- - -	- - -	Appulſ. α ♉ ad laminam
d. $\frac{14}{25}$. Apr. mane	4. 3. 34	1R. + 52300	8¾ ——	verticalem.
veſp.	3. 58. 31½	- - -	- - -	Appulſus α ♍ ad fil. vert. Teleſcopii fixi.
	4. 1. 34	- - -	- - -	Egreſſus α
	4. 4. 23	2R. + 1700	9½ ——	♍.
	4. 7. 1½	- - -	- - -	Appulſ. α ♉ ad 1 fil. vert. Tranſitorii.
	9. 18½	- - -	- - -	Appulſ. α ♉ ad 2 fil. vert.
	10. 0	- - -	- - -	Appulſ. α ♉
d. $\frac{15}{26}$. Apr. mane	4. 27. 5½	2R. + 52600	8¼ ——	ad laminam
poſtmerid.	10. 30. 25½	2R. + 77500	9 ——	verticalem.

Ex

Ex iſtis obſeruationibus colligitur motus Horologii Aſtronomici pro die Solari medio 86625 Oſcillationes: Penduli vero immutabilis motus ad idem temporis ſpatium in temperie aeris $8^{\circ}\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. ſupra o, $98944\frac{1}{3}$ Oſcillat.

Alia inquiſitio.

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{30}{31}$ Maii veſp.	$8^h.12'.27''$ -	- - - -	ſupra o	Appulſus ξ Serpentarii ad fil. vert. Teleſcopii fixi.
	$14.58\frac{1}{2}$ -	- - - -	- - -	Egreſſus ξ Serpentarii
	8. 19. 6 -	- - 29350	$8^{\circ}\frac{1}{2}$	
d. $\frac{31}{1}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ mane	- - - -	- - - -	$7\frac{3}{4}$	——
poſtmerid.	- - - -	- - - -	$8\frac{3}{4}$	——
veſp.	$8.12.15\frac{1}{2}$ -	- - - -	- - -	Appulſus ξ Serpentarii ad fil. vert. Teleſcopii fixi.
	$14.47\frac{1}{2}$ -	- - - -	- - -	Egreſſus ξ Serpentarii
	8. 21. 29 -	1^R. + 28200	8	——
d. $\frac{1}{2}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ mane	$5.57.7\frac{1}{2}$ -	1^R. + 67650	$7\frac{1}{4}$	——
poſtmer.	- - - -	- - - -	9	——
veſp.	9. 9. 50 -	2^R. + 30200	$7\frac{1}{2}$	——

Ex hiſce obſeruationibus deducitur motus Horologii Aſtronomici diei Solaris medio reſpondens = 86625 Oſcil-

Oſcillat. Motus igitur Penduli immutabilis pro die Solari medio in temperie aeris 8°. Therm. Reaum. ſupra o erit 98943$\frac{1}{2}$ Oſcillat.

Alia inquiſitio.

	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{26}{7}$. Iulii/Aug. veſp.	9024	13° ſupra o	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Tranſit.
	9133$\frac{1}{2}$	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -
d. $\frac{27}{7}$. Iulii/Aug. mane 9^b.	- - -	12$\frac{1}{2}$ ——	
veſp. 6^b.	- - -	14 ——	
veſp.	1^R. + 7689$\frac{1}{2}$	13$\frac{1}{2}$ ——	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Tranſit.
	7799$\frac{1}{2}$	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -
d. $\frac{10}{16}$. Iulii/Aug. veſp. 5^b.	Penduli immutabilis pondus eleuaui.		
7^b.	- - -	14$\frac{1}{7}$ ——	
	12682	13$\frac{2}{7}$ ——	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Tranſit.
	12792	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -
d. $\frac{31}{11}$. Iulii/Aug. mane 8^b.	- - -	13 ——	
veſp. 6^b.	- - -	14 ——	
	1^R. + 11349	13$\frac{2}{7}$ ——	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Tranſit.
	11458$\frac{1}{2}$	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -
d. $\frac{1}{12}$. Aug. mane 7^b.	- - -	13 ——	
veſp. 5^b.	- - -	14$\frac{1}{2}$ ——	
d. $\frac{2}{13}$. Aug. mane 8^b.	- - -	12$\frac{1}{2}$ ——	
veſp. 6^b.	- - -	14$\frac{1}{7}$ ——	
	3^R. + 8679$\frac{1}{2}$	13$\frac{2}{7}$ ——	App. α Aquilae ad 1 fil. vert. Tranſit.
	8788$\frac{2}{7}$	- - -	- - - ad 2 fil. vert. - -

Per

Per medium inter iſtas obſeruationes a d. 26. Iulii ad d. 2. Aug. vsque, ſumma diligentia inſtitutas, prodibit motus Penduli immutabilis diei Sidereo reſpondens 98666 Oſcillat. adeoque motus eiusdem Penduli pro die Solari medio in temperie aeris 13°½ Therm. Reaum. ſupra o, 98936 Oſcillat. Caeterum notandum eſt, in obſeruationibus hiſce diebus Penduli immutabilis beneficio habitis, ad veram grauitatis differentiam definiendam maximi eſſe momenti, quod in eadem fere temperie aeris eodemque anni tempore peractae ſunt, quo obſeruationes huc ſpectantes An. 1757. Petropoli inſtitui.

Facili nunc negotio breuiter enumerare poſſumus ſequentes numeros Oſcillationum, quas Pendulum immutabile An. 1757. et 1758. ſecundum obſeruationes ſupra relatas in Oſilia Inſula diuerſis anni temporibus, pro varia aeris temperie, ſpatio diei Solaris medii abſoluit.

An. 1757.	menſe Octobri	98945. Oſcillat.	Reaum. Therm. indicante	6°½. ſupra o
	menſe Octobri	98945.		7½. —
	menſe Nou.	98944.		6½. —
An. 1758.	menſe Ianuar.	98957.		6°. infra o
	menſe Ianuar.	98955½.		3. —
	menſe Ianuar.	98954.		2. —
	menſe Febr.	98944. circ.		8½. ſupra o
	menſe Febr.	98956⅔.		5½. infra o
	menſe Martio	98951½.		1½. ſupra o
	menſe Aprili	98944⅓.		8½. —
	menſe Maio	98943½.		8. —
	menſe Iulio et Auguſto	98936.		13½. —

 Patet

Patet igitur, variationem vnius Oſcillationis in motu Penduli immutabilis, pro die Solari medio, reſpondere generatim variationi temperaturae, vnum gradum Thermometri Reaumuriani exaequanti quam proxime.

V.

Obſeruationes circa grauitatem, Penduli immutabilis beneficio, Pernauiae habitae.

1750.	Oſcillationes. Pend. immutab	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{16}{17}$ Aug. veſp. $9^{h}\frac{1}{4}$	- 4416	18°. ſupra o	Appulſus α Aquilae ad
d. $\frac{17}{18}$. Aug. mane 6^{h}	- -	$17\frac{1}{2}$. — —	filum verticale Te-
veſp. 5^{h}	- - - -	18. — —	leſcopii fixi.
	1^{R}. + 3082 -	$17\frac{3}{4}$. — —	Appulſus α Aquilae ad
d. $\frac{18}{19}$. Aug. mane 6^{h}	- - -	$17\frac{1}{2}$. — —	filum verticale Te-
veſp. $5^{h}\frac{1}{2}$	- - -	$17\frac{3}{4}$ — —	leſcopii fixi.
	2^{R}. + 1748 -	17. — —	Appulſus α Aquilae ad
d. $\frac{19}{20}$. Aug. mane 5^{h}	- - - -	$16\frac{3}{4}$. — —	filum verticale Te-
veſp. 5^{h}	- - - -	18. — —	leſcopii fixi.
	3^{R}. + 413	$17\frac{1}{2}$. — —	Appulſus α Aquilae ad filum verticale Teleſcopii fixi.

Manifeſtum eſt per iſtas obſeruationes, motum Penduli immutabilis pro die Solari medio, in temperie aeris $17°\frac{1}{2}$ Therm. Reaum. ſupra o, menſe Auguſto Pernauiae fuiſſe 98936. Oſcillat.

VI.

Obſeruationes exquiſitiores circa grauitatem, mediante Pendulo immutabili, Dorpati inſtitutae.

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{6}{17}$ Sept. mane	$8^h.55'.36''$	- - 58700	$14^\circ\frac{1}{2}$ ſupra c	
	0. 26. $19\frac{2}{3}$	- - - - -	- - -	Meridies verus ex 10. altitud. Solis correſpond. deductus.
veſp. 5^h.	- - - -	- - - -	$15\frac{1}{2}$. ——	
d. $\frac{7}{18}$ Sept. mane	8. 35. 3	1^R. + 55970	$13\frac{3}{4}$. ——	
veſp. 5^h.	- - - -	- - - -	14. ——	
d. $\frac{8}{19}$ Sept. antem.	0. 28. 20	2^R. + 70635	13. ——	
veſp. 5^h.	- - - -	- - - -	$14\frac{1}{2}$. ——	
d. $\frac{9}{20}$ Sept. mane	9. 35. 39	3^R. + 57480	$13\frac{1}{2}$. ——	

Alia comparatio.

eod. circ. merid	0. 34. 52	- - 69700	$13\frac{1}{2}$. ——	
veſp. 6^h.	- - - -	- - - - -	14. ——	
d. $\frac{10}{21}$ Sept. mane	10. 9. 58	1^R. + 58450	$12\frac{3}{4}$. ——	
veſp. 6^h.	- - - -	- - - -	$13\frac{1}{2}$. ——	
d. $\frac{11}{22}$ Sept. mane	8. 48. 15	2^R. + 51530	$13\frac{1}{3}$. ——	
	0. 43. $42\frac{1}{10}$	- - - - -	—— ——	Meridies verus ex 15. altitud. Solis correſpond. deductus.
veſp.	8. 19. 48	2^R. + 98920	$14\frac{1}{2}$. ——	
d. $\frac{12}{23}$ Sept. mane	9. 55. 58	3^R. + 54850	14. ——	

Dies Solaris medius ſecundum praecedentes obſeruationes aequatur $24^{h}.3'.49''\frac{1}{3}$ Horol. Aſtron. quare motus Penduli immutabilis pro die Solari medio, in temperie aeris $13^{\circ}\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. ſupra o, ſumpto medio, erit 98941. Oſcillat.

Alia inquiſitio.

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab	Therm. Reaumur.	
d. $\frac{21}{2}$ Sept./Oct. antem.	$1^{h}.0'.25''$	- - 720	11°. ſupra o	
veſp. 5^{h}	- - - -	- - - -	12. ——	
veſp.	8. 45. $22\frac{2}{3}$. v. $\frac{1}{3}$	- - - - -	—— ——	Ingreſſus α Aquilae in camp. Teleſcop fixi.
	48. $18\frac{3}{4}$	- - - -	—— ——	Appulſus α Aquilae ad fil. vert. Teleſcopii fixi.
	51. $13\frac{1}{3}$	- - - -	—— ——	Egreſſus α Aquilae.
veſp. 9^{h}	- - - -	- - - -	11. ——	
d. $\frac{22}{3}$ Sept./Oct. mane	9. 48. 58	- - 86280	9. ——	
poſtmer.	2. 14. 20	1^{R} + 5150	$11\frac{1}{2}$. ——	
veſp.	8. 51. $6\frac{3}{4}$	- - - - -	—— ——	Egreſſus α Aquilae e campo Teleſcop. fixi.
	10. 33. 32	1^{R}. + 38675	$9\frac{2}{3}$. ——	

1758.	T. Horol. Aſtron.	Oſcillationes Pend. immutab.	Therm. Reaumur.	
d. 23. Sept. 4. Oct. mane	9. 32. 2 -	1^R. + 83800	$9\frac{1}{2}$. —	
poſtmer.	2. 15. 8 -	2^R. + 3200	12. —	
veſp. 4^h.	- - - -	- - - - -	$12\frac{1}{2}$. —	
	8. 32. 29 -	2^R. + 29070	$10\frac{3}{4}$. —	
	8. 45. $9\frac{1}{2}$ -	- - - - -	— —	Ingreſſus α Aquilae in camp. Teleſcop. fixi.
	48. $5\frac{1}{2}$ -	- - - - -	— —	Appulſus α Aquilae ad fil. vert. Teleſcopii fixi.
	51. 0 -	- - - -	— —	Egreſſus α Aquilae.
d. 24. Sept. 5. Oct. mane	10. 9 34 -	2^R. + 85050	9. —	
poſtmer.	2 40. 16 -	3^R. + 3600	$11\frac{1}{2}$. —	
veſp.	5. 20. 12 -	3^R. + 14560	12. —	

Ex obſeruationibus d. 21. 22. et 23. Sept. habitis, reuolutio fixarum fuit 23^h. 59′. 53″, 5 Horol. Aſtron. adeoque dies Solaris medius 24^h. 3′. 50″. Per medium igitur motus Penduli immutabilis pro die Solari medio, in temperie aeris 11°. Therm. Reaum. ſupra 0, erit 98942, 1 Oſcillat.

CAPVT II.

Experimenta exquiſitiora circa grauitatem, beneficio Penduli ſimplicis inſtituta.

I.

Pendulum ſimplex, quo ad experimenta in hocce capite referenda vſus ſum, ſimile eſt illi, cuius deſcriptionem *Cel. Bouguerus* in libro cui titulus: *la Figure de la Terre determinée par les obſeruations de Mrs. Bouguer et de la Condamine*, exhibuit. *Cel. de la Caille* Pendulo illo ſimplici non ſolum Pariſiis, verum etiam in Promontorio Bonae ſpei vſus eſt, idque eo ad me beneuole transmiſit conſilio, vt eiusdem inſtrumenti beneficio differentiam grauitatis Petropolin inter et caetera Terrae loca, vbi experimenta mediante hocce Pendulo ſimplici inſtituta ſunt, adeoque longitudinem Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis Petropoli adhuc nunquam inveſtigatam, eo accuratius tutiusque exploratam haberemus. Hanc itaque inſtrumentorum opportunitatem non negligendam eſſe exiſtimaui; ideoque ad veram grauitatis differentiam Petropolin inter et Oſiliam Inſulam, quae per experimenta An. 1752. et 53 exquiſitiſſimi Horologii Aſtronomici beneficio inſtituta, opinione maior prodibat, accuratiſſime ſtabiliendam, hocce Pendulo ſimplici praecipue vti mihi conſtitutum erat. Nihil hic dicam de cautionibus, quae ad eiusmodi experimenta rite inſtituenda, neceſſario ſunt adhibendae, quarumque cogi-

cognitio experimentorum aſſiduitate paratur. Notare tamen iuuat, me vſum eſſe filo tenuiſſimo ex foliis aloës parato, (fil de pite) quod non niſi poſt longum temporis interuallum a pondere appenſi ponduſculi paululum extenditur. Aeris temperaturam, cui virga chalybea Penduli ſimplicis expoſita erat, et ante, et circa experimentorum tempora, ſedulo obſeruaui, eaque tantum adnotaui experimenta, quae mihi prae aliis exquiſitiora feliciusque peracta viſa ſunt; ita vt exiguae illae differentiae, quae in experimentis infra relatis occurrunt, ſoli fere difficultati, qua Penduli ſimplicis et Horologii Aſtronomici Oſcillationum comparatio premitur, adſcribendae ſint.

II.

Experimenta exquiſitiora, mediante Pendulo ſimplici, circa grauitatem Petropoli diligenter inſtituta.

An. 1757. d. $\frac{20}{31}$ Aug. Pendulo ſimplici rite ſummaque cura ad motum adornato, Oſcillationes huius Penduli ſequenti modo cum Oſcillationibus Horologii Aſtronomici comparaui:

Expe-

Experimentum 1.

T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
1^h 34'. 0''	- - 0
47. 20	- - 1
2, 0. 40	- - 2
14. 0	- - 3
27. 30	- 4
40. 55	- - 5
54. 30	- - 6
Sumto medio 13'.22''	- - 1

Longitudo fili in hocce experimento inuariata, Therm. Reaum. indicante 17°. ſupra o.

Dies Solaris medius ex obſeruationibus ſupra relatis aequatur $24^h.3'.46''\frac{1}{2}$ Horol. Aſtron. ita vt Pendulum ſimplex iſto temporis ſpatio ſecundum hoc experimentum abſoluat 86518,2 Oſcillat.

Experimentum 2.

T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
d. $\frac{20}{21}$ Aug. 9^h. 20'. 0''	- - 0
46. 25	- - 2
10. 26. 15	- - 5
39 52	- - 6
Sumto medio 13'.16''	- - 1

Longitudo fili inuariata, Therm. Reaumur. 18°. ſupra o.

Secundum hocce experimentum Pendulum ſimplex ſpatio diei Solaris medii conficit 86517,4 Oſcillat.

Experi-

Experimentum 3.

d. 22 Aug. 1 Sept. T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
2^{h}.30′. 0″	- - 0
57. 0	- - 2
23. 25	- - 4
49. 20	- - 6
Sumto medio 13′.21″	- - 1

Longitudo fili accuratiſſ. et toto experimenti tempore inuariata. Therm. Reaumur. 18°. ſupra 0. Ex obſeruationibus in praecedenti Capite relatis, 86626,1 Oſcillat. Horol. Aſtron. diem Solarem medium exaequant. Prodibit igitur motus Penduli ſimplicis pro die Solari medio = 86518. Oſcillat.

Experimentum 4.

d. 22 Aug. 1 Sept.	
10^{h}. 2′.45″	- - 0
15. 40	- - 1
28. 46	- - 2
41. 48	- - 3
54. 51	- - 4
11. 7 50	- - 5
Sumto medio 13′. 0″	- - 1

Longitudo fili inuariata. Therm. Reaumur. 18°. ſupra 0.

Secundum hocce experimentum 86515. Oſcillationes Penduli ſimplicis diei Solari medio reſpondent.

Experimentum 5.

d. $\frac{23}{3}$. $\frac{Aug.}{Sept.}$ T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
1ʰ. 44′. 0″	- - 0
57. 10	- - 1
10. 10	- - 2
23. 10	- - 3
36. 10	- - 4
49. 30	- - 5
2. 3. 0	- - 6
Sumto medio 13′. 6″	- - 1

Longitudo fili accuratiſſ. et invariata.
Therm. Reaumur. 17°. ſupra o.
Quia Horol. Aſtron. ſpatio diei Solaris medii conficiebat 86626,1 Oſcillationes, Pendulum ſimplex ſecundum hoc experimentum eodem temporis ſpatio abſolvet 86516. Oſcillationes.

Experimentum 6.

d. $\frac{23}{3}$. $\frac{Aug.}{Sept.}$	
9ʰ. 3′. 0″	- - 0
16 10	- - 1
29. 28	- - 2
42. 35	- - 3
55. 55	- - 4
10. 9. 0	- - 5
22 25	- - 6
Sumto medio 13′.13″	- - 1

Longitudo fili accuratiſſ. et invariata.
Therm. Reaum. 17°½ ſupra o.

Ex hocce experimento concluditur motus Penduli ſimplicis pro die Solari medio 86517 Oſcillat.

Ex hiſce itaque experimentis exquiſitioribus Petropoli inſtitutis, ſequentes colligimus numeros Oſcillationum Penduli ſimplicis, ſpatio diei Solaris medii confectorum:

Ex

Ex 1. Experimento	86518,2	Oſcill. Therm. Reaum.	17°.	ſupra o
2. - - -	86517,4	- - -	18.	— —
3. - - -	86518,0	- - -	18.	— —
4. - - -	86515,0	- - -	18.	— —
5. - - -	86516,0	- - -	17.	— —
6. - - -	86517,0	- - -	$17\frac{1}{2}$.	— —
Per medium igitur	86517	Oſcill. Therm. Reaum.	$17^{\circ}\frac{1}{2}$.	ſupra o

III.

Experimenta exquiſitiora beneficio Penduli ſimplicis circa grauitatem Reualiae inſtituta.

Experimentum 1.

An. 1757. d. $\frac{5}{16}$. Sept. T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
$7^{h}.56'.0''$	- - 0
8. 8. 4	- - 1
20. 9	- - 2
32. 12	- - 3
9. 9. 15	- - 6
21. 15	- - 7
Sumto medio 12′. 7″	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.

Therm. Reaum. 13°. ſupra o. Ex obſeruationibus ſupra iam exhibitis colligitur motus Horol. Aſtron. pro die Solari medio $24^{h}.3'.48''$,1; hinc erit ſecundum hoc experimentum motus Penduli ſimplicis ad idem temporis ſpatium 86508, 9 Oſcillat.

Experimentum 2.

d. 11. Sept. T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
7ʰ.17′. 0″	- - 0
29. 0	- - 1
41. 30	- - 2
8. 6. 12	- - 4
31. 30	- - 6
Sumto medio 12′.14″½	- - 1

In hoc experimento virga chalybea arcte ad ponduſculum biconicum Penduli ſimpl. applicata; longitudo fili autem toto experimenti tempore inuariata.

Therm. Reaum. 13°½ ſupra 0.

Horol. Aſtron. hiſce diebus ſpatio 24. hor. temporis medii confecit 86628, 1 Oſcillationes, ita vt ſecundum hoc experimentum motus Penduli ſimpl. ad idem temporis ſpatium ſit 86510, 2 Oſcillat.

Experimentum 3.

d. 11. Sept.	Retardatio
8ʰ.58′. 0″	- - 0
9. 10. 28	- - 1
22. 45	- - 2
34. 56	- - 3
47. 10	- - 4
10. 11. 35	- - 6
Sumto medio 12′.20″½	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.

Therm. Reaum. 13°½ ſupra 0.

Ex hoc experimento concluditur motus Penduli ſimplicis pro die Solari medio 86511, 1 Oſcillat.

Experi-

Experimentum 4.

d. $\frac{4}{15}$ Sept.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcillat.
	9h. 11′. 30″	- - 0
	36. 29	- - 2
	48. 45	- - 3
	10. 1. 5	- - 4
Sumto medio	12′. 26″	- - 1

Longitudo fili accurata et invariata: Therm. Reamur. 13°. ſupra 0. Secundum obſeruationes in Cap. I. relatas, Horol. Aſtron. ſpatio diei Solaris medii confecit 86628, 1 Oſcillat. Pendulum igitur ſimplex ex hoc experimento eodem temporis ſpatio abſoluet 86512. Oſc.

Experimentum 5.

d. $\frac{4}{15}$ Sept.	10h. 38′. 0″	- - 0
	45. 15	- - 1
	57. 22	- - 2
	11. 9. 24	- - 3
	21. 28	- - 4
	33. 48	- - 5
	58. 45	- - 7
Sumto medio	12′. 11″	- - 1

Longitudo fili inuariata et accuratiſs. Therm. Reamur. 13°$\frac{1}{4}$ ſupra 0. Poſito, ut ſupra, motu Horol. Aſtron. pro die Solari medio = 86628, 1 Oſcillat. prodibit ex hoc experimento exquiſitiſſimo motus Penduli ſimplicis ad idem temporis ſpatium = 86509, 6 Oſcillat.

Experimentum 6.

d. $\frac{4}{15}$ Sept.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcillat.	
	1^h 46′. 0″	- - 0	Longitudo fili accuratiſſima, et
	2. 10. 18	- - 2	per totum tempus experimenti
	22. 32	- - 3	huius exquiſitiſſimi inuariata.
	34. 35	- - 4	Therm. Reaumur. 13°¼ ſupra 0
	46. 46	- - 5	Admiſſo motu Horologii Aſtron.
	59. 7	- - 6	ſupra inuento, habebimus motum
	11. 10	- - 7	Penduli ſimplicis pro die Solari
Sumto medio	12′. 10″	- - 1	medio, ſecundum hocce experimentum 86509, 4 Oſcillat.

Experimentum 7.

d. $\frac{5}{16}$ Sept.	10^h. 13′. 0″	- - 0	Longitudo fili accurata *et inuariata.*
	24. 50	- - 1	
	37. 0	- - 2	Therm. Reaumur. 13°. ſupra 0.
	49. 25	- - 3	Ex hocce experimento deducitur
	11. 1. 55	- - 4	motus Penduli ſimplicis pro
	14. 30	- - 5	86628, 1 Oſcillationibus Horol.
Sumto medio	12′. 6″	- - 1	Aſtron. ſiue pro die Solari medio 86508, 8 Oſcillat.

Experi-

Experimentum 8.

d. [illegible] Sept.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. fimpl. Oſcill.
	$11^h.51'.0''$	- - 0
	0. 3. 31	- - 1
	16. 0	- - 2
	28. 24	- - 3
	40. 53	- - 4
	53. 12	- - 5
Sumto medio	$12'.30''$	- - 1

In hoc experimento virga chalybea arcte ad ponduſculum biconicum Penduli fimpl. applicata, et longitudo fili toto experimenti tempore inuariata.

Therm. Reaumur. $13^{\circ}\frac{1}{4}$ ſupra o.

Secundum hocce experimentum motus Penduli fimplicis pro die Solari medio erit 86512, 6 Oſcill.

Experimentum 9.

d. [illegible] Sept,		
	$1^h.50'.0''$	- - 0
	2. 1. 55	- - 1
	14. 13	- - 2
	26. 30	- - 3
	39. 0	- - 4
	51. 36	- - 5
Sumto medio	$12'.9''$	- - 1

Longitudo fili accurata et invariata.

Therm. Reaumur. $13^{\circ}\frac{1}{4}$ ſupra o.

Ex hoc experimento patet, Pendulum fimplex ſpatio diei Solaris medii conficere 86509, 3 Oſcillat.

Experi-

Experimentum 10.

d. $\frac{10}{21}$ Sept.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcillat.	
	$8^h.20'.40''$	- - 0	Longitudo fili accurata et invariata.
	32. 55.	- - 1	Therm. Reaumur. $12^{\circ}\frac{1}{2}$ ſupra o.
	45. 25.	- - 2	Secundum hocce experimentum Pendulum ſimplex ſpatio diei Solaris medii abſolvet 86511, 7 Oſcillat.
	57. 54.	- - 3	
	9. 10. 30.	- - 4	
	23. 3.	- - 5	
	35. 20.	- - 6	
Sumto medio	$12'.24''$	- - 1	

Motus igitur Penduli ſimplicis pro die Solari medio determinationes, ex praecedentibus experimentis, Regaliae ſumma cura inſtitutis, deductae, ſequentes ſunt:

Ex 1.	Experimento 86508, 9	Oſcillat. Therm. Reaumur.	13°. ſupra o
2.	- - - - 86510, 2	- - - - -	$13\frac{1}{4}$ — —
3.	- - - - 86511, 1	- - - - -	$13\frac{1}{2}$. — —
4.	- - - - 86512, 0	- - - - -	13. — —
5.	- - - - 86509, 6	- - - - -	$13\frac{1}{4}$. — —
6.	- - - - 86509, 4	- - - - -	$13\frac{1}{4}$. — —
7.	- - - - 86508, 8	- - - - -	13. — —
8.	- - - - 86512, 6	- - - - -	$13\frac{1}{4}$. — —
9.	- - - - 86509, 3	- - - - -	$13\frac{1}{4}$. — —
10.	- - - - 86511, 7	- - - - -	$12\frac{1}{2}$ — —
Per medium igitur	86510, 4	Oſcillat. Therm. Reaum.	13°. ſupra o

IV.

IV.

Experimenta exquiſitiora, beneficio Penduli ſimplicis, circa grauitatem in Inſula Oſilia inſtituta.

Cum inutile foret, omnia ac ſingula experimenta, quae circa grauitatem, Penduli ſimplicis beneficio, in Inſula Oſilia inſtitui, perſcribere; in ſequentibus inquiſitionibus in numerum Oſcillationum Penduli ſimplicis ſpatio 24. horarum temporis medii confectorum, ea tantum adſcripſi experimenta exquiſitiora, quae ad medium inter omnia experimenta vno eodemque die ſucceſſiue et diligentiſſime capta, proxime accedunt; notato etiam medio, quod ex ceteris experimentis ſimul captis colligitur, vt denique medium inter omnia experimenta innoteſcat. Notandum tamen eſt, differentiam quae diuerſis experimentis vno eodemque die diligenter inſtitutis interceſſit, in ſpatio temporis retardationi vnius Oſcillation. Penduli ſimplicis reſpondente per medium concluſo 20 vel 25 Oſcillationes Horologii Aſtron. raro exaequaſſe, nunquam ſuperaſſe.

Inquiſitio 1.

An. 1757. d. $\frac{16}{17}$. Oct.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	$11^h. 3'. 0''$	- - 0
	14. 50 -	- - 1
	27. 5 -	- - 2
	39. 15 -	- - 3
	51. 15 -	- - 4
	3. 40 -	- - 5
Sumto medio	$12'. 2''$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſ. et toto experimenti tempore inuariata.

Therm. Reaum. 7°. ſup. 0.

Secundum obſeruationes in Cap. I. relatas, motus Horol. Aſtron. diei Solaris medio reſpondens fuit 86630, 4 Oſcillat. Pendulum ſimplex igitur eodem temporis ſpatio conficiet 86510, 4 Oſcillat.

Inquiſitio 2.

d. $\frac{23}{24}$ Nou.	$1^h. 30'. 0''$	- - 0
	41. 30 -	- - 1
	52. 50 -	- - 2
	2. 4. 25	- - 3
	15. 45 -	- - 4
	27. 0 -	- - 5
Sumto medio	$11'. 26''\frac{7}{10}$	- - 1
Per medium inter duo alia exper. hodie inſt.	11. 29 -	- - 1
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna	$11'. 28''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.

Therm. Reaum. 7° ſupra 0.

Dies Solaris medius ex obſeruationibus d. 18 et 19 Nou. habitis, et in Cap. I. relatis, aequatur $86635\frac{1}{4}$ Oſcillat. Horologii Aſtron. vnde prodibit motus Pend. ſimplicis pro eodem temporis ſpatio ſecundum haec exper. 86509, 3 Oſcillat.

Inqui-

Inquiſitio 3.

d. 20 Nou. / 1 Dec.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	$2^h.50'.50''$	- - 0
	3. 2. 10 -	- - 1
	13. 27 -	- - 2
	24. 44 -	- - 3
	36. 14 -	- - 4
	47. 44 -	- - 5
Sumto medio	$11'.20''$	- - 1
Per medium inter 3. alia exper. hodie inſtituta.	11. 24 -	- - 1
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna.	11. 23 -	- - 1

Longitudo fili in hiſce exper. accuratiſſ. et inuariata. Therm. Reaum. 6° ſupra o. Ex his experimentis colligitur motus Penduli ſimplicis 86635¼ Oſcillationibus Horologii Aſtron. ſiue diei Solari medio reſpondens 86508,4 Oſcillat.

Inquiſitio 4.

d. 23 Nou. / 4 Dec.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	$3^h.37'.10''$	- - 0
	49. 14 -	- - 1
	4. 0. 53 -	- - 2
	12. 22 -	- - 3
	24. 20 -	- - 4
	36. 20 -	- - 5
Sumto medio	$11'.51''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata. Therm. Reaum. 6°. ſupra o. Eadem aëris temperatura inter 5. et 7°. Therm. Reaum. ſupra o per haſce dies conſeruata, motus Horol. Aſtron. diei Solari medio reſpondens erit 86635¼ Oſcillat. adeoque motus Penduli ſimpl. ad idem temporis ſpatium ex hoc exper. deductus 86513, 4 Oſcillat.

Inquiſitio 5.

d. 27/8 Nov./Dec.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	3h 46'. 0"	- - 0
	57. 14	- - 1
	4. 8. 35	- - 2
	20. 5	- - 3
	31. 15	- - 4
	42. 40	- - 5
Sumto medio	11'.18"½	- - 1
Per medium inter 2 alia experimenta hodie inſtituta.	11. 26	- - 1
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna.	11'.23"½	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata. Therm. Reaumur. 6°. ſupra o. Poſito, vt ſupra, motu Horologii Aſtron. pro die Solari medio 86635, Oſcill. prodibit motus Penduli ſimplicis iſti temporis ſpatio reſpondens 86508, 5 Oſcillat.

Inquiſitio 6.

1758. d. 17/28 Ian.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	1h 15'. 0"	- - 0
	26. 47	- - 1
	38. 25	- - 2
	50. 20	- - 3
	2. 2. 10	- - 4
	13. 55	- 5
Sumto medio	11'.46"	- - 1
Per medium inter 3 alia experimenta hodie inſtituta.	11. 49	- - 1
Per medium igitur inter omnia exper. hodierna.	11'.48"¼	- - 1

Longit. fili in hiſce exper. accurata et inuariata. Therm. Reaum. 1°½ inf. o. Horolog. Aſtr. ſecundum obſeru. in Cap. I. relatas, ſpatio diei Solaris medii confecit 86636, 8 Oſcillationes: hinc erit motus Penduli ſimplicis ad idem temporis ſpatium ex hiſce exper. deductus 86514, 5 Oſcillat.

Inqui-

Inquiſitio 7.

	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
d. 26 Ian. / 6 Febr.	3ʰ.50′. 0″	- - 0
	4. 2. 0	- - 1
	14. 5	- - 2
	26. 20	- - 3
	38. 20	- - 4
	50 40	- - 5
Sumto medio	12′. 4″½	- - 1
Per medium inter 2 alia experimenta hodie inſtituta.	12. 7	- - 1
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna.	12. 6″½	- - 1

Longitudo fili in his experimentis accurata et inuariata. Therm. Reaum. 2°½ inf. 0. Ex obſeruationibus ſupra relatis motus Horologii Aſtron. pro die Solari medio fuit 86636,1 Oſcillat. Habebimus itaque ſecundum haec experimenta motum Penduli ſimplicis pro eodem temporis ſpatio 86516,8 Oſcillat.

Inquiſitio 8.

	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
d. 29 Mart. / 9 Apr.	5ʰ. 5′. 0″	- - 0
	17. 10	- - 1
	29. 40	- - 2
	41. 55	- - 3
	54. 0	- - 4
	6. 6. 5	- - 5
Sumto medio	12′.15″½	- - 1
Per medium inter 3 alia experimenta hodie inſtituta.	12. 12	- - 1
Per medium itaque inter omnia exper. hodierna.	12′.12″$\frac{3}{5}$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſima et inuariata. Therm. Reaum. 2° ſup. 0. Horologium Aſtron. ſecundum obſeruationes in Cap. I. exhibitas, hiſce diebus ſpatio diei Solaris medii 86632,8 Oſcillationes abſoluit; Pendul. ſimplex igitur eodem tempor. ſpatio ex hiſce experimentis conficiet 86514,6 Oſcillat.

Inquiſitio 9.

	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend ſimpl. Oſcill.
d. $\frac{13}{25}$. Apr.	1^h. 9′. 0″	- - 0
	21. 20	- 1
	33. 34	- - 2
	46. 3	- - 3
	58. 42	- - 4
	2. 11. 27	- - 5
Sumto medio	12′.22″$\frac{1}{3}$	- - 1
Per medium inter 4 alia experimenta d. 14 et 15 Apr. inſtituta.	12. 25	- - 1
Per med. igitur inter omnia exper. d. 14 et 15 Apr. capta.	12′.24″$\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili in hiſce experimentis accuratiſſima et inuariata.

Therm. Reaum. 9°. ſupra o.

Ex obſeruation. in Cap. I. relatis, deducitur motus Horologii Aſtron. diei Solari medio reſpondens 86625 Oſcillat. Ex quo itaque colligimus motum Penduli ſimplicis ad idem temporis ſpatium ſecundum haec experimenta 86508, 6 Oſcillat.

Inquiſitio 10.

d. $\frac{22}{2}$. Maii / Iun.	3^h. 12′. 0″	- - 0
	24. 20	- - 1
	36. 35	- - 2
	48. 50	- - 3
	4. 1. 23	- - 4
	13. 53	- - 5
Sumto medio	12′.19″$\frac{1}{3}$	- - 1
Per medium inter 6 alia experim. d. 21. et 22 Maii inſtituta.	12′.22$\frac{1}{3}$	- - 1
Per medium igitur inter omnia exper. d. 21 et 22 Maii inſtit.	12′.22″	- - 1

Longitudo fili in his experimentis accuratiſſima et inuariata.

Therm. Reaum. 8°$\frac{1}{2}$ ſup. o.

Horologium Aſtron. ſpatio 24 horarum temporis medii abſoluit 86625 Oſcillationes: hinc motus Penduli ſimplicis pro eodem temporis ſpatio ex hiſce experimentis erit 86508, 3 Oſcillat.

Se-

Sequentia experimenta, cum ad ſtabiliendam veram grauitatis differentiam Petropoli inter et Oſiliam Inſulam maximi ſint momenti, tum propter aeris temperaturam, cum ob anni tempeſtatem, quae maxime congruunt cum circumſtantiis experimentorum huiuſce generis anno 1757. Petropoli inſtitutorum, omnia prouidi praecauique, vt haecce experimenta maxima cum cura atque diligentia caperentur. Antequam vero experimenta ipſa referam, obſeruationes quas ad vices Horologii Aſtronomici examinandas inſtitui, hic apponere iuuat.

1758.

d $\frac{4}{15}$. Aug. mane 6^b. Therm. Reaum. iuxta Horol. Aſtr. et Pend ſimpl. coll. 14°. ſupra o
poſtmer. 5^b. - - - - - - 15. ——
veſp. $11^b.59'.55''$ Horol. Aſtr. App. α Aquil. ad 1 fil. vert. Tranſit. 14. ——
12. 1. 81 - - - ad 2 fil. vert. - - -
d $\frac{5}{16}$. Aug. mane 7^b. Therm. Reaumur. - - - - - $14\frac{1}{4}$ ——
poſtmer. 6^b. - - - - - - - - $15\frac{1}{4}$ ——
veſp. $11^b.59'.41''\frac{1}{3}$ Horol. Aſtr. App. α Aquil. ad 1 fil. vert. Tranſit. $14\frac{1}{2}$ ——
12. 1. $17\frac{1}{2}$ - - - ad 2 fil. vert. - - -
d $\frac{6}{17}$ Aug. mane 7^b. Therm. Reaumur. - - - - 14 ——
poſtmer. $5^b\frac{1}{2}$ - - - - - - - $15\frac{1}{2}$ ——
veſp. $11^b.59'.27''\frac{1}{3}$ Horol. Aſtr. App. α Aquil. ad 1 fil. vert. Tranſit. $14\frac{1}{2}$ ——
12. 1. $3\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{4}$. - - ad 2 fil. vert. - - -

In-

Inquiſitio 11.

d. $\frac{4}{15}$. Aug.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	11^{h}.43′. 0″	- - 0
	54. 58	- - 1
	0. 6. 53	- - 2
	19. 9	- - 3
	31. 25	- - 4
	43. 30	- - 5
Sumto medio	12′. 2″	- - 1
Per medium inter 5 alia experimenta hodie inſtituta.	12. $6\frac{1}{5}$	- - 1
Per medium igitur inter omnia experimenta hodierna.	12′. 5″$\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili in his experimentis accuratiſſima et inuariata.

Therm Reaum. 14°$\frac{1}{2}$. ſup. 0.

Ex obſeruationibus ſupra exhibitis deducitur motus Horologii Aſtron. diei Solari medio reſpondens $86622\frac{2}{3}$ Oſcillat. Habebimus itaque motum Penduli ſimplicis ad idem temporis ſpatium ſecundum haecce experimenta 86503,3 Oſcillat.

Inquiſitio 12.

d. $\frac{5}{16}$. Aug.	0^{h}.35′ 0″	- - 0
	47. 10	- - 1
	59. 30	- - 2
	1. 11. 35	- - 3
	23. 55	- - 4
	36. 5	- - 5
Sumto medio	12′. 12″$\frac{2}{3}$	- - 1
Per medium inter 4 alia experimenta hodie capta:	12. 15	- - 1
Per medium igitur inter omnia exper. hodierna.	12′. 14″$\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili in omnibus hiſce experimentis accuratiſſ. et inuariata.

Therm Reaum 14°$\frac{1}{2}$ ſup. 0.

Motus Penduli ſimplicis diei Solari medio, ſiue $86622\frac{2}{3}$ Oſcillationibus Horol. Aſtr. reſpondens, ſecundum haec experimenta erit 86504,7 Oſcillat.

Inqui-

Inquiſitio 13.

d. $\frac{6}{17}$. Aug.	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	$4^h.25'.0''$	- - 0
	37. 22	- - 1
	49. 40	- - 2
	5. 1. 55	- - 3
	14. 15	- - 4
	26. 15	- - 5
Sumto medio	$12'.19''$	- - 1
Per medium inter 4 alia experimenta hodie peracta.	12. 17	- - 1
Per medium igitur inter omnia experiment. hodierna.	$12'.17''\frac{4}{10}$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſima et inuariata. Therm. Reaum. $14^\circ\frac{1}{2}$. ſupra 0. Ex hiſce experimentis deducitur motus Penduli ſimplicis $86622\frac{2}{3}$ Oſcillationibus Horologii Aſtron. ſiue diei Solari medio reſpondens 86505,2 Oſcillat.

Praecedentes in grauitatem inquiſitiones recognoſcendo, ſequentes ex adductis experimentis, in Oſilia Inſula inſtitutis, colliguntur motus Penduli ſimplicis pro die Solari medio determinationes:

Ex 1. inquiſit. 1757. menſe Octobri	86510,4 Oſcillat.	Therm. Reaum. indicante	7°. ſupra 0
2. - - - menſe Nouembri	86509,2 - -		7°. —
3. - - - menſe Nouembri	86508,4 - -		5°. —
4. - - - menſe Nouembri	86513,4 - -		6°. —
5. - - - menſe Nouembri	86508,5 - -		6°. —

Ex 6. inquiſit. 1758.	menſe Ianuario	86514,5	Oſcillat.	Therm. Reaum. indicante $1^{0}\frac{1}{2}$ infra o
7. - - -	menſe Ianuario	86516,8	- -	$2^{0}\frac{1}{2}$ ——
8. - - -	menſe Martio	86514,6	- -	2^{0}. ſupra o
9. - - -	menſe Aprili	86508,6	- -	9^{0}. ——
10. - - -	menſe Maio	86508,3	- -	$8^{0}\frac{1}{2}$ ——
11. - - -	menſe Auguſto	86503,3	- -	$14^{0}\frac{1}{2}$ ——
12. - - -	menſe Auguſto	86504,7	- -	$14^{0}\frac{1}{2}$ ——
13. - - -	menſe Auguſto	86505,2	- -	$14^{0}\frac{1}{2}$ ——

Si varias haſce motus Penduli ſimplicis determinationes inuicem pro variis Thermometri gradibus comparemus, facili negotio cognoſcimus, variationem temperaturae trium graduum Thermometri Reaumuriani accurate ſatis reſpondere variationi duarum Oſcillationum in motu Penduli ſimplicis pro ſpatio temporis 24. horarum.

V.

Experimenta circa grauitatem, beneficio Penduli ſimplicis, Pernauiae inſtituta.

An. 1758. d. $\frac{20}{31}$. Aug. veſp. $9^{h}.1'.26''$ Horol. Aſtr. App. α Aquilae ad filum vert. Teleſcopii fixi bipedalis.

d. $\frac{21}{1}$. $\frac{\text{Aug.}}{\text{Sept.}}$ veſp. $9^{h}.1'.11''$ Horol. Aſtr. App. α Aquilae ad idem filum vert.

Experi-

Experimentum 1.

d. $\frac{21}{1}$. $\frac{Aug.}{Sept.}$ mane	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend ſimpl. Oſcill.
	9^h.10′. 0″	- - 0
	22. 18	- - 1
	34. 50	- - 2
	47. 14	- - 3
	59. 42	- - 4
	10. 12. 12	- - 5
Sumto medio	12′.24″	- - 1

Longitudo accuratiſſima et inuariata.
Therm. Reaum. 17°$\frac{1}{2}$. ſupra 0.
Ex obſeruationibus ſupra deſcriptis, motus Horol. Aſtron. diei Solari medio reſpondens fuit 86621,5 Oſcillat. vnde colligitur motus Penduli ſimplicis ad idem temporis ſpatium, ſecundum hocce experimentum 86505 Oſcillat.

Experimentum 2.

d. $\frac{21}{1}$. $\frac{Aug.}{Sept.}$ mane	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend ſimpl. Oſcill.
	14^h.34′ 0″	- - 0
	46. 30	- - 1
	59. 10	- - 2
	11. 11. 32	- - 3
	23. 57	- - 4
	36. 17	- - 5
Sumto medio	12′.20″$\frac{1}{5}$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſ. et inuariata.
Therm. Reaum. 17°$\frac{1}{2}$. ſupra 0.
Poſito, vt ſupra, motu Horologii Aſtron. pro die Solari medio = 86621,5 Oſcillat. prodibit ex hoc experimento motus Penduli ſimplicis ad idem temporis ſpatium 86506 Oſcillat.

Experimentum 3.

Eod. poſtmerid. T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcillat.
$4^h. 6'. 0''$	- - 0
18. 45	- - 1
31. 35	- - 2
44. 35	- - 3
57. 5	- - 4
5. 10. 0	- - 5
Sumto medio $12'.47''\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata. Therm. Reaum. 18°. ſupra o. Secundum hocce experimentum Pendulum ſimplex ſpatio diei Solaris medii conficiet 86508,6 Oſcillationes.

Per medium igitur inter omnia experimenta motus Penduli ſimplicis, diei Solari medio reſpondens, in temperatura aeris $17°\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. ſupra o Pernauiae erit 86506,5 Oſcillat.

VI.

Experimenta exquiſitiora circa grauitatem, mediante Pendulo ſimplici Dorpati inſtituta.

Experimentum 1.

An. 1758 d. $\frac{21 \text{ Sept.}}{3 \text{ Oct.}}$ $0^h.54'. 0''$	- - 0
1. 6. 0 -	- - 1
18. 11 -	- - 2
30. 10 -	- - 3
42. 20 -	- - 4
54. 25 -	- - 5
Sumto medio $12'. 4''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata. Therm. Reaum 11° ſupra o. Ex obſeruat. in Cap. I. exhibitis, motus Horol. Aſtron. pro die Solari medio fuit 86630. Oſcillat. Pendulum ſimplex igitur ſecundum hocce experimentum eodem temporis ſpatio conficiet 86510, 3 Oſcillat.

Experi-

Experimentum 2.

	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
Eodem	$2^{h}.10'.45''$	- - 0
	22. 50 -	- - 1
	35. 6 -	- - 2
	47. 15 -	- - 3
	59. 33 -	- - 4
Sumto medio	$12'.\ 9''\frac{1}{2}$	- - 1

Longitudo fili accurata et invariata. Therm. Reaum. $11^{\circ}\frac{1}{2}$. ſupra o. Admiſſo motu Horol. Aſtron. ſupra definito, prodibit motus Penduli ſimplicis, diei Solari medio reſpondens, ex hoc experimento — 86511, 2 Oſcillat.

Experimentum 3.

Eodem	$5^{h}.\ 9'.\ 0''$	- - 0
	21. 25 -	- - 1
	33. 45 -	- - 2
	6. 10. 33 -	- - 5
Sumto medio	$12'.22''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata. Therm. Reaumur. 12°. ſupra o. Secundum hocce experimentum Pendulum ſimplex ſpatio die Solaris medii abſoluet 86513, 2 Oſcillat.

Experimentum 4.

d. $\frac{22\ Sept.}{3\ Oct.}$	$1^{h}.21'.\ 0''$	- - 0
	45. 36 -	- - 2
	57. 45 -	- - 3
	2. 22. 19 -	- - 5
Sumto medio	$12'.16''\frac{1}{3}$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſima et inuariata. Therm. Reaumur. $11^{\circ}\frac{1}{2}$. ſupra o. Pendulum ſimplex igitur ſecundum hoc experimentum ſpatio 24. horarum temporis medii conficiet 86512, 3 Oſcillationes.

Experimentum 5.

d. $\frac{22\text{ Sept.}}{3\text{ Oct.}}$	T. Horol. Aſtron.	Retardatio Pend. ſimpl. Oſcill.
	$2^h.25'.30''$	- - 0
	50. 4 -	- - 2
	3. 2. 25 -	- - 3
	27. 5 -	- - 5
Sumto medio	$12'.18''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.

Therm. Reaumur. $11^{\circ}\frac{1}{2}$ ſupra 0.

Ex hoc experimento concluditur motus Penduli ſimplicis diei Solari medio reſpondens 86512, 6 Oſcillat.

Experimentum 6.

d. $\frac{23\text{ Sept.}}{4\text{ Oct.}}$		
	$11^h.26'. 0''$	- - 0
	38. 10 -	- - 1
	50. 0 -	- - 2
	0. 2. 7 -	- - 3
	14. 30 -	- - 4
	26. 50 -	- - 5
Sumto medio	$12'. 6''$	- - 1

Longitudo fili accurata et inuariata.

Therm. Reaumur. $11^{\circ}\frac{1}{2}$. ſupra 0.

Secundum hoc experimentum Pendulum ſimplex ſpatio diei *Solaris* medii conficiet 86510, 7 Oſcillat.

Experimentum 7.

Eodem		
	$2^h.11'.50''$	- - 0
	24. 10 -	- - 1
	36. 34 -	- - 2
	49. 0 -	- - 3
	3. 1. 15 -	- - 4
	13. 40 -	- - 5
Sumto medio	$12'.21''\frac{2}{3}$	- - 1

Longitudo fili accuratiſſima et inuariata.

Therm. Reaum. 12°. ſupra 0.

Erit igitur ſecundum hoc experimentum motus Penduli ſimplicis ad diem Solarem medium 86513, 2 Oſcillat.

Colligi-

Colligimus itaque ſequentes numeros Oſcillationum Penduli ſimplicis ſpatio diei Solaris medii Dorpati confectarum:

Ex 1. Experimento	86510,3	Oſcillat.	Therm. Reaumur. indicante	11°. ſupra o	
2. - -	86511,2	- -		$11\frac{1}{4}$.	——
3. - -	86513,2	- -		12.	——
4. - -	86512,3	- -		$11\frac{1}{2}$.	——
5. - -	86512,6	- -		$11\frac{1}{2}$.	——
6. - -	86510,7	- -		$11\frac{1}{2}$.	——
7. - -	86513,2	- -		12.	——
Per medium igitur	86512	Oſcillat.		$11^{\circ}\frac{1}{2}$. ſupra o	

CAPVT III.

Retardationes Pendulorum Petropoli Reualiam, Arensburgum, Pernauiam, et Dorpatum.

I.

Cum obſeruationes atque experimenta, ad definiendas grauitatis differentias ſpectantia mihi inſtituta, in praecedentibus capitibus diligenter ſint expoſita, facili nunc negotio eas ſtabilire poſſumus Pendulorum retardationes, quae ex noſtris obſeruationibus, ſiue experimentis, ad eandem aeris temperiem reductis, fluunt, et quae deinde grauitatis differentiis, inter loca ſupra nominata determinandis, inſeruient. Vt autem de rei veritate eo certiores eſſe poſſimus, ad concluſiones ex obſeruationi-

ſeruationibus Penduli immutabilis beneficio habitis deductas, ſummam experimentorum, mediante Pendulo ſimplici inſtitutorum, adiicere non ab re fore viſum eſt.

II.

Retardatio Pendulorum Petropoli Reualiam.

Demonſtrauimus ſupra (CAP. I. p. 449.) Pendulum immutabile in temperie aeris 16°. Therm. Reaum. ſupra o ſpatio diei Solaris medii Petropoli conficere accuratiſſime 98947. Oſcillationes. Eiusdem Penduli motus 24. horis temporis medii reſpondens Reualiae, in temperie aeris 13°¼. Therm. Reaum. ſupra o repertus fuit per medium (pag. 451.) 98941,8 *Oſcillat.* Cum vero ſecundum obſeruationes in Oſilia *Inſula* inſtitutas variatio vnius gradus Thermometri Reaumur. producat variationem vnius Oſcillationis quam *proxime in* motu Penduli immutabilis diurno (pag. *466.*), motus Penduli immutabilis pro die Solari medio in temperatura aeris 16°. Therm. Reaum. ſupra o Reualiae erit 98938,8 Oſcillat. ita vt retardatio Penduli immutabilis Petropoli Reualiam vnius diei Solaris medii interuallo ſit 8,2 Oſcillat.

Simili modo vidimus (pag. 474.) motum Penduli ſimplicis diei Solari medio reſpondentem, in temperie aeris 17°½. Therm. Reaum. ſupra o Petropoli eſſe 86517. Oſcillat. Reualiae contra in temperatura aeris 13°. Therm. Reaumur. ſupra o, 86510,4 Oſcillat. (pag. 480.). Ratione autem habita variationis diuerſis

Thermo-

Thermometri gradibus reſpondentis ſupraque determiminatae (pag. 490.), prodibit motus Penduli ſimplicis, diei Solari medio et temperaturae aeris Petropoli obſervatae reſpondens, Reualiae 86507,4 Oſcillat. vnde concludimus retardationem Penduli ſimplicis Petropoli Revaliam vnius diei Solaris medii interuallo 9,6 Oſcillat.

III.

Retardatio Pendulorum Petropoli Arensburgum in Oſilia Inſula.

Petropoli obſeruaui, Pendulum immutabile in temperie aeris 16°. Therm. Reaum. ſupra o diei Solaris medii ſpatio abſoluere 98947. Oſcillationes (pag. 449.) In Oſilia autem Inſula huiusce Penduli motum ad diverſos Thermometri gradus diligentiſſime examinaui, eumque ſupra (pag. 465.) exhibui. Obſeruationes atque experimenta, huius Penduli beneficio 1758. Iulio et Auguſto menſe inſtituta, proxime quidem pro temperie aeris accedunt ad obſeruationes huc ſpectantes 1757. Auguſto menſe Petropoli habitas, eamque ob cauſam ad comparationem inter grauitatem inſtituendam maxime idonea eſſe videntur: haud iniucundum tamen fore iudico, omnes ac ſingulas obſeruationes, circa motum Penduli immutabilis in Inſula Oſilia habitas, ſecundum legem variationis motus huiusce Penduli ſupra inventam ad illam aeris temperaturam, in qua experimenta Petropoli ſunt inſtituta, reducere et hic exhibere. Colligitur igitur motus Penduli immutabilis pro die Solari

lari medio in Oſilia Inſula obſeruatus, et ad temperiem aeris 16°, Therm. Reaum. ſupra o reductus.

Ex oſeru. An. 1757.	menſe Oct.	in temp. aeris	$6^{\circ}\frac{1}{2}$.	ſupra o habitis	98934,8 Ok.
	—— Oct.		$7^{\circ}\frac{1}{2}$	——	98935,8
	—— Nou.		$6^{\circ}\frac{1}{2}$.	——	98933,8
1758.	—— Ian.		6°.	infra o	98933,3
	—— Ian.		3°.	——	98935 0
	—— Ian.		2°.	——	98934,6
	—— Febr.		$8^{\circ}\frac{1}{2}$.	ſupra o	98936,0 circ.
	—— Febr.		$5^{\circ}\frac{1}{2}$	infra o	98933,7
	—— Mart.		$1^{\circ}\frac{1}{2}$.	ſupra o	98936,0
	—— Aprili		$8^{\circ}\frac{1}{2}$.	——	98936,3
	—— Maio		8°.	——	98935,0
	Iulio et Auguſto		$13^{\circ}\frac{1}{2}$.	——	98933,3
				Per medium igitur	98934,7 Ok.

Quum vero obſeruationes, menſe Iulio et Auguſto habitae, ob rationes ſupra adductas caeteris ſint praeferendae, ſtatuere poſſumus, motum Penduli immutabilis pro die Solari medio ad temperiem aeris 16°. Therm. Reamur. ſupra o in Inſula Oſilia eſſe $98933\frac{1}{2}$. vel 98934. Oſcillat. ita vt retardatio Penduli immutabilis quaeſita Petropoli Arensburgum vnius diei Solaris medii interuallo ſit 13, vel $13\frac{1}{2}$. Oſcillat.

Secundum experimenta, mediante Pendulo ſimplici diligentiſſime inſtituta, dies Solaris medius exaequatur accuratiſſime 86517. Oſcillationibus Penduli ſimplicis Petropoli oſcillantis, Thermometro Reaum. indicante $17^{\circ}\frac{1}{2}$. ſupra o. In Oſilia Inſula varia, ad variam aeris tempe-

temperaturam, beneficio huius Penduli, inſtitui experimenta, ſupra iam deſcripta; ex quibus ea, quae menſe Auguſto ibi capta ſunt, ob adductas rationes, ad grauitatis differentiam Petropolin inter et Oſiliam Inſulam indagandam, aptiſſima iudicaui.

Nihilo tamen minus caetera etiam experimenta omnia, in Inſula Oſilia inſtituta, et ad temperiem aeris ſupra notatam 17°½ Therm. Reumur. ſupra o ſecundum regulam (pag. 490.) traditam reducta, in medium afferre vſui eſſe viſum eſt.

Prodibit igitur motus Penduli ſimplicis in Inſula Oſilia, diei Solari medio reſpondens, et ad temperiem aeris 17°½. Therm. Reaum. ſupra o reductus:

Inquiſ. 1757.	menſe Oct. in temp. aeris	7°.	ſupra o peracta	(1. exp)	86503,4 Oſcill.
- - - - -	Nou. - -	7°.	- - - - -	(3. exp.)	86502,3 - -
- - - - -	Nou. - -	6°.	- - - - -	(4. exp.)	86500,7 - -
- - - - -	Nou. - -	6°.	- - - - -	(1. exp.)	86505,7 - -
- - - - -	Nou. - -	6°.	- - - - -	(3. exp.)	86500,8 - -
- 1758. -	Ian. - -	1°½.	infra o - -	(4. exp.)	86501,8 - -
- - - - -	Ian. - -	2°½.	- - - - -	(3. exp.)	86503,5 - -
- - - - -	Mart. - -	2°.	ſupra o - -	(4. exp.)	86504,3 - -
- - - - -	Apr. - -	9°.	- - - - -	(5. exp.)	86502,9 - -
- - - - -	Maio - -	8°½.	- - - - -	(7. exp.)	86502,3 - -
- - - - -	Aug. - -	14°½.	- - - - -	(6. exp.)	86501,3 - -
- - - - -	Aug. - -	14°½.	- - - - -	(5. exp.)	86502,7 - -
- - - - -	Aug. - -	14°½.	- - - - -	(5. exp.)	86503,2 - -

Per medium igitur inter omnia experimenta 86502,4 Oſcill.

Cum itaque motus Penduli ſimplicis, per medium inter omnia experimenta concluſus, fere nihil diſcrepet a numero Oſcillationum huius Penduli, inter experimenta exquiſitiſſima menſe Auguſto inſtituta medio, maxima cum certitudine ſtabilire poſſumus motum Penduli ſimplicis in Oſilia Inſula ad diem Solarem medium in temperatura aeris 17°½. Therm. Reaum. ſupra o = 86502½. Oſcillat. adeoque retardationem Penduli ſimplicis vnius diei Solaris medii interuallo Petropoli Arensburgum in Oſilia Inſula 14½. Oſcillat.

IV.

Retardatio Pendulorum Petropoli Pernauiam.

Cum Pendulum immutabile Petropoli in temperie aeris 16°. Therm. Reaum. ſupra o, ſpatio diei Solaris medii conficiat 98947. Oſcillationes, Pernauiae autem eodem temporis interuallo in temperatura aeris 17°½. Therm. Reaum. ſupra o 98936. Oſcillationes, (pag. 466.) habebimus motum Penduli immutabilis, diei Solari medio et temperaturae aeris 16°. ſupra o reſpondentem, Pernauiae 98937, 6 Oſcillat. adeoque retardationem Penduli immutabilis Petropoli Pernauiam vnius diei Solaris medii interuallo 9, 4. Oſcillat.

Penduli ſimplicis motus pro die Solari medio, in temperie aeris 17°½. Therm. Reaum. ſupra o Petropoli aequatur 86517. Oſcillationibus; Pernauiae autem in eadem aeris temperatura 86506, 5 Oſcillat. (pag. 492.)

Vnde

Vnde colligitur retardatio Penduli ſimplicis vnius diei Solaris medii interuallo Petropoli Pernauiam — 10, 5 Oſcillat.

V.

Retardatio Pendulorum Petropoli Dorpatum.

Motus Penduli immutabilis, diem Solarem medium in temperatura aeris 11°. Therm. Reaum. ſupra 0 exaequans, Dorpati per medium fuit 98942,1 (pag. 469.). Reductione autem facta, ſecundum regulam ſupra traditam, prodibit huius Penduli motus, diei Solari medio in temperie aeris 16°. Therm. Reaum. ſupra 0 Dorpati reſpondens 98936, 7 Oſcillat. et propterea retardatio Penduli immutabilis interuallo vnius diei Solaris medii Petropoli Dorpatum 10, 3 Oſcillat.

Inuenimus (pag 495.) per medium inter experimenta, Penduli ſimplicis beneficio Dorpati inſtituta, motum Penduli ſimplicis Dorpati ita fuiſſe comparatum, vt in temperatura aeris 11°½. Therm. Reaum. ſupra 0 ſpatio diei Solaris medii ad 86512. Oſcillationes aſſurgeret; a quo numero, ſi ſubtrahantur ſecundum regulam noſtris experimentis probatam 4. Oſcillationes pro differentia temperaturae aeris, remanet motus Penduli ſimplicis, diei Solari medio in temperie aeris 17°½. Therm. Reaum. ſupra 0 Dorpati reſpondens, 86508. Oſcillat. vnde denique colligitur retardatio Penduli ſimplicis Petropoli Dorpatum vnius diei Solaris medii interuallo 9. Oſcillat.

CAPVT IV.

Meditationes circa decrementa grauitatis, noſtris obſeruationibus et experimentis probata.

Ex obſeruationibus atque experimentis ſupra deſcriptis, ſatis, me iudice, intelligitur, decrementa grauitatis Petropoli Reualiam, Arensburgum, Pernauiam et Dorpatum, quae ex Pendulorum retardationibus, in praecedente capite definitis, cognoſcuntur, multo maiora eſſe iis, quae ex recepta Telluris Theoria colliguntur. Decrementa praecipue grauitatis Petropoli Reualiam et Arensburgum in Oſilia Inſula, pro parua illa *latitudinis* differentia, adeo inſignia ſunt, totque experimentis diuerſorum inſtrumentorum beneficio inſtitutis probata, vt attentione noſtra digna ſint. Diſcrimina *quidem in* decrementis illis grauitatis occurrunt exigua inter Pendulum ſimplex, et illud, quod vocatur immutabile; (hoc enim paulo minora, illud contra paulo maiora prodit grauitatis decrementa): cauſam vero in vitiis inſtrumentorum potius, quam in erroribus obſeruationum, latere palam eſt, poſtquam obſeruationibus atque experimentis ſupra deſcriptis ſatis ſuperque probaui, quantam cautionem curamque adhibuerim, vt experimenta, vtriusque Penduli beneficio inſtituenda, ex ſententia ſuccederent. Simili modo quin differentia, quae inter experimenta haecce recens capta, et ea, quae 5 vel 6 abhinc annis beneficio exquiſitiſſimi Horologii cuiusdam Aſtronomici Petro-

Petropoli et in Oſilia Inſula inſtitui, obuia eſt, cauſis quibusdam occultis, ſiue ignotis, adſcribenda ſit, nullum dubitandi locum relinqui exiſtimo. Horologium enim, quo tunc ad iſta experimenta vſus ſum, quam accuratiſſime affabreque ſecundum inuenta et praecepta Cel. *Grahami* eſt elaboratum. Omni cura in hoc incubui, vt Horologium illud Aſtronomicum, capſis ſoliſdiſſimis incluſum, ita transportaretur, vt virgae longitudo nulli mutationi, praeter illam, quae ex diuerſis caloris gradibus oritur, obnoxia eſſet.

Illud in ſpecula Aſtronomica Arensburgenſi ita ad motum adornaui, vt ſitum eundem obtinerent omnes Horologii partes, in quo Petropoli poſitae fuerant; eius motum ſaepiſſime per octo fere menſes, praeſentibus iis, quos ex Academia rerum marinarum adiutores habui, ad coelum exploraui, et obſeruato inſigni illo grauitatis decremento Petropoli Arensburgum, illud cum Academia Imperiali, neque minus cum Ill. *de la Condamine* communicaui. Poſtquam Ill. *de la Condamine* humaniſſime ad me ſuam hac de re ſententiam perſcripſerat, cauſasque indicauerat, quas ille detexit, cum ſimile quid in itinere ipſi in motu Horologii cuiusdam Aſtronomici obſeruatum eſt, et quae ſuſpicioni locum aperire poſſunt, eas omnes in meo Horologio diligentiſſime examinaui, nihilque inueni, quo tale quid effici poſſet; ſiquidem motus Horologii per octo illos menſes in Oſilia inſula maximae ſemper fuit regularis aequabilisque. Horologio noſtro eadem via eademque cura atque cautione, quae in tranſportatione eiusdem Petropoli Arensburgum adhibitae fuerant, mari Arensburgo Petropolin reuecto, et in eodem loco, quem ante abitum

in

in Oſiliam Inſulam in ſpecula mea Aſtronomica Petroburgenſi occupaverat, collocato, obſervavi motum Horologii diurnum in eadem aeris temperatura, neglectis minutis aliquot ſecundis, accuratiſſime aequari motui illi diurno, quo Horologium noſtrum Petropoli anno ſuperiori, ante iter in Oſiliam Inſulam ſuſceptum, proceſſerat. Nemo igitur dubitabit, quin decrementum illud grauitatis inſigne Petropoli Arensburgum memorati Horologii Aſtronomici beneficio detectum, et per multos menſes conſtanter obſeruatum, admirabili hocce Horologii conſenſu ſecum ipſo confirmetur atque probetur quam maxime. Si quis enim inſignem illam differentiam in motu Horologii animaduerſam perturbationi ignotae Horologii, ſiue partium, quibus machina haec componitur, tribuere malit: iure quaero, qui fit, vt perturbatio illa notabilis mirum in modum in Horologio, Arensburgo Petropolin transportato, adeo exacte ſit reſtituta? Ex Tabulis, motum Horologii *noſtri Aſtronomici*, cum Petropoli, tum in *Oſilia Inſula* obſeruatum, exhibentibus, quas cum conuentu Academ. ſaepius communicaui, facillime intelligitur, Horologium noſtrum Aſtronomicum, virga ex ebeno parata inſtructum, pro variis Thermometri gradibus, varia quidem celeritate procedere, lignumque re vera ſecundum longitudinem a frigore contrahi, et a colore extendi, ſed tamen ſatis regulariter, ita vt in eadem aeris temperatura Horologium Petropoli conſtanter multo celerius (30″ circiter interuallo diei ſiderei) moueatur, quam Arensburgi in Oſilia Inſula et Reualiae. Praeterea inſigne grauitatis decrementum Petropoli Reualiam et Arensburgum illo tempore

pore ex iis colligebatur experimentis, quae inſtrumenti cuiusdam elatere inſtructi, et ab artifice quodam Lubecenſi ad augmenta vel decrementa grauitatis obſeruanda excogitati, et ad *B. Richmannum* transmiſſi, beneficio Arensburgi et Reualiae inſtitui. *B. Richmannus* enim hocce inſtrumentum ipſe Petropoli examini ſubiecerat, et ad me, propter difficultatem parandi Penduli ſimplicis accuratiſſimi in officina mechanica Petroburgenſi, Arensburgum transmiſerat. Silentio hic praetereo eas obſeruationes, quas eodem tempore alius Horologii Aſtronomici minus accurati beneficio inſtitui, et ex quibus haud minor grauitatis differentia Petropolin inter et Arensburgum colligitur. Quia igitur hiſce rationum momentis memorabile illud grauitatis decrementum Petropoli Reualiam et Arensburgum probabile redditur quam maxime, operae pretium viſum eſt, non ſolum mihi et Academiae Imperiali, verum etiam iis viris doctis extraneis, quibuscum meas communicaueram obſeruationes, vt obſeruata iſta notatu digniſſima nouis experimentis, aliorum inſtrumentorum ad hunc vſum accommodatorum beneficio inſtituendis, verificarentur; quod equidem experimenta noſtra, ſupra relata, vtriusque Penduli, ſimplicis nempe atque immutabilis, beneficio peracta, praeſtitura eſſe confido. Diſcrimina quidem inter noua haecce experimenta et ea occurrunt, quae 5 vel 6 ab hinc annis mediante Horologio Aſtronomico, ſecundum praecepta *Grahami* elaborato, inſtitui; ſed circumſtantiis omnium horum experimentorum ſatis iam candideque enarratis, iudicium ſit penes lectorem,

 vtrum

vtrum grauitatis decrementa inſignia Petropoli Reualiam et Arensburgum, ex prioribus noſtris experimentis 5 ab hinc annis, Horologii Aſtronomici exquiſitiſſimi beneficio inſtitutis, deducta, in rei veritate fundentur, an potius, fortaſſis parte aliqua, ignotis mihi prorſus Horologii vitiis, perturbationibusue, ſint adſcribenda. Attamen experimenta noſtra recens diuerſorum inſtrumentorum beneficio inſtituta conſiderando, cognoſcimus, decrementa grauitatis exinde concluſa, re ipſa maiora eſſe, quam, vt cum regularitate figurae Telluris, eiusque texturae internae, componi poſſent; et in hoc experimenta recens, Penduli immutabilis aeque, ac Penduli ſimplicis beneficio, peracta, egregie concinunt cum iis, quae mediante Horologio Aſtronomico 5 ab hinc annis inſtitui; excepta quantitate inſoliti decrementi grauitatis, quae ex experimentis recentioribus minor prodit. Quod ad exiguam illam quantitatem attinet, de qua in decrementis grauitatis Petropoli Reualiam, Arensburgum et Pernauiam experimenta, mediante Pendulo *immutabili* inſtituta, diſcrepant ab iis, quae beneficio Penduli ſimplicis capta ſunt, cum decrementa illa grauitatis ex his paulo maiora colligantur, quam ex illis, tantillam differentiam obſeruationum et experimentorum erroribus tribuere poſſemus: ſcire tamen intereſt, vtrum experimentis, ope Penduli ſimplicis peractis, an vero experimentis, mediante Pendulo immutabili inſtitutis, magis fidendum ſit. Haec quidem, ob accuratiorem et commodiorem modum numerandi Oſcillationes Penduli immutabilis, certo temporis ſpatio reſpondentes, praeferenda eſſe videntur;

dentur; illis autem propter inſtrumenti ſimplicitatem maior fides haberi poteſt: dubium enim nullum eſt, quin motus Penduli immutabilis variis cauſis magis perturbari, eiusque viciſſitudines minus regulares reddi poſſint, quam Oſcillationes Penduli ſimplicis harumque mutationes. Perpenſa denique differentia, quam inter experimenta circa grauitatem recens inſtituta, et ea inuenimus, quae aliquot ab hinc annis Horologii Aſtronomici exquiſitiſſimi beneficio peracta ſunt, neſcio qualis exactitudo in dignoſcenda grauitatis differentia ab experimentis, Horologiorum beneficio inſtitutis, ſperanda ſit. Conſtructio enim Horologii Aſtronomici, quo 5 abhinc annis ad experimenta inſtituenda vſus ſum, ſimilis eſt ſtructurae Penduli immutabilis, quod nunc ad iſta experimenta adhibui, (vel potius perfectior, ob pondus multo maius, quo Horologium noſtrum Aſtronomicum ad motum cietur) excepta virga, quae in hoc ex chalybe, in illo ex ebeno, eſt parata. Hiſce rationum momentis in hanc fere adductus ſum ſententiam, vt grauitatis differentiam, ex experimentis Penduli ſimplicis beneficio inſtitutis, ſaepiusque repetitis, collectam, caeteris paribus, magis fidam eſſe crederem. Caeterum, rationibus noſtris expoſitis, de hoc iuſti harum rerum aeſtimatores iudicent Reſtat nunc, vt decrementa grauitatis, ex noſtris experimentis deducta, paucis ad ea comparemus, quae ex recepta Telluris theoria pro diuerſa locorum latitudine colliguntur.

I.

Admiſſis experimentis circa grauitatem, ab Aſtronomis Academiae Reg. Pariſ. ſumma cura inſtitutis, decrementum grauitatis Petropoli Reualiam pro differentia latitudinis dimidii gradus, ſecundum axioma, quod grauitatis incrementa ab Aequatore Polos verſus ſequantur quam proxime rationem quadratorum ſinuum latitudinis, producit retardationem diurnam 2 Oſcillationum Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis.

Secundum experimenta, mediante Pendulo immutabili inſtituta, retardatio diurna Penduli Petropoli Reualiam eſt 8, 2 Oſcillat. Penduli immutabilis (pag. 496.) ſiue 7, 2 Oſcillat. Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis.

Ex experimentis Penduli ſimplicis *beneficio captis* retardatio Penduli diurna Petropoli Reualiam colligitur 9, 6 Oſcillat. Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis. (pag. 497.)

II.

Decrementum grauitatis Petropoli Arensburgum in Oſilia Inſula, differentiae latitudinis $1\frac{2}{3}$ grad. reſpondens, per Theoriam collectum, efficit retardationem diurnam $5\frac{1}{2}$ vel 6 Oſcillationum Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis.

Per

Per experimenta, ope Penduli immutabilis peracta, inuenimus retardationem huius Penduli diurnam Petropoli Arensburgum in Oſilia Inſula 13½ Oſcillat. (p. 498.), adeoque retardationem Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis 12 Oſcillat.

Per experimenta, mediante Pendulo ſimplici inſtituta, ſtabilitur retardatio diurna Petropoli Arensburgum 14½ Oſcillat. Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis. (pag. 499.)

III.

Decrementum grauitatis Petropoli Pernauiam, differentiae latitudinis 1½. grad. reſpondens, ex Theoria inventum, producit retardationem diurnam 5½. Oſcillat. Penduli ſimplicis ad ſingula min. ſec. temporis medii oſcillantis.

Secundum experimenta ſupra exhibita, retardatio Penduli immutabilis diurna Petropoli Pernauiam eſt 9, 4 Oſcillat. (pag. 501.) ſiue retardatio diurna Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis 8, 2 Oſcillat.

Experimenta Penduli ſimplicis beneficio peracta, exhibent retardationem diurnam Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis Petropoli Pernauiam 10, 5 Oſcillat. (pag. 501.)

IV.

Eodem modo ex decremento denique grauitatis Petropoli Dorpatum, differentiae latitudinis $1\frac{3}{5}$. grad. reſpondente, per Theoriam collecto, oritur retardatio diurna $5\frac{1}{3}$ Oſcillat. Penduli ſimplicis ad ſingula min. ſec. temporis medii oſcillantis.

Retardatio autem Penduli immutabilis diurna Petropoli Dorpatum fuit 10, 3 Oſcillat. (pag. 501.) vnde emergit retardatio diurna Penduli ſimplicis ad ſingula min. ſec. temporis medii oſcillantis 9 Oſcillat.

Experimenta noſtra, mediante Pendulo ſimplici inſtituta, oſtendunt retardationem diurnam Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſec. temporis medii oſcillantis Petropoli Dorpatum itidem 9. Oſcillat.

Hiſce comparationibus conſtat, decrementa *grauitatis* Petropoli Reualiam, Arensburgum, Pernauiam et Dorpatum noſtris experimentis ſtabilita, notabiliter ſuperare ea, quae ex Theoria deducuntur. Decrementa praeſertim grauitatis Petropoli Arensburgum et Reualiam adeo a Theoria deflectunt, vt duplo et triplo, imo quadruplo et quintuplo, maiora ſint, quam pro Theoria. Tanta differentia pro tam paruo locorum interuallo, tot experimentis, diuerſorum inſtrumentorum beneficio inſtitutis, notatu quin ſit digna, et defectui materiae in illis regionibus maxime tribuenda, nullus dubito; niſi forte grauitas pro diuerſa locorum longitudine diuerſa ſit.

Spero

Spero itaque fore, vt haecce experimenta incitamento ſint, grauitatis, etiam in locis ſub eodem parallelo ſitis, et ſatis magno longitudinis interuallo ab inuicem remotis, inueſtigandae: eiusmodi enim experimentorum maxima cum accuratione inſtitutorum numerus ad huc valde eſt exiguus, et hanc ob cauſam diligenter adaugendus; eo magis, quod hactenus nulla inſtituta ſunt Pendulorum experimenta eo conſilio, vt grauitas pro diuerſa locorum longitudine examinaretur. Haec vero experimenta, noſtris ſimilia, ſed longius in Longitudinem extendenda, ad veram Theoriam Telluris condendam maximi eſſe momenti apertum eſt omnibus. Neque deſunt experimenta, viris doctiſſimis exercitatiſſimisque inſtituta, quae irregularitatem notatu digniſſimam in augmentis grauitatis ab Aequatore Polos verſus produnt, vel ſaltem regularitatem maxime ſuſpectam reddunt: ex. gr. Celeberr. *Picardus* aſſeuerat, in longitudine Penduli ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis Vraniburgi et Pariſiis, imo ad auſtraliſſimam Galliae oram ſub latit. $43\frac{1}{2}$. grad. ſibi nullam eſſe obſeruatam differentiam ſenſibilem, quamuis maximam ad experimenta adhibuerit diligentiam accurationemque; cum tamen pro iſto latitudinis interuallo, differentia longitudinis Penduli ad ſingula min. ſec. oſcillantis, ſecundum Theoriam ſit $\frac{1}{4}$ lineae, ſiue 50. circiter Oſcillat. interuallo 24. horarum Penduli ad ſingula min ſec. oſcillantis; quantitatem vero hanc adeo ſenſibilem experimentorum praeciſionem Cel. *Picardi* effugiſſe vix credibile eſt. Inſolitis itaque grauitatis differentiis probatis, de regularitate curuaturae Meridianorum

rum terreſtrium dubitare fas eſt. Operae igitur pretium erit, vt, praeter Pendulorum experimenta, etiam graduum diuerſorum menſurae ſub eodem Meridiano capiantur quam diligentiſſime, neque negligantur graduum parallelorum dimenſiones, praeſertim iis in locis, vbi grauitatis effectus a Theoria inſigniter deflectat: Pendulorum enim experimentis, cum graduum terreſtrium menſura coniunctis, tutius iudicare poſſumus, vtrum irregularitates circa Telluris ſuperficiem, an vero in intimis Terrae viſceribus, lateant.

CAPVT V.

De Longitudine Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis.

I.

In praecedentibus capitibus de differentia tantum grauitatis, quam in ſuperficie Telluris experimur, Petropolin inter et loca nonnulla, ad Eſtoniae et Liuoniae oras ſita, egimus; nunc autem abſolutam Penduli ſimplicis, ad ſingula minuta ſecunda temporis medii Oſcillantis longitudinem grauitati proportionalem, definire animus eſt: quod haud ingratum fore eo magis confido, cum circa longitudinem Penduli experimenta in noſtris regionibus adhuc nulla ſint inſtituta. Duobus vero modis Penduli longitudinem hic determinare poſſumus; Pen-

Penduli nimirum immutabilis, et Penduli ſimplicis beneficio, quae eo conſilio a Cel. *de la Caille* huc ſunt transmiſſa, vt comparatione inter motum horum Pendulorum, primo Pariſiis, deinde Petropoli, obſeruatum inſtituta, de vera Penduli ſimplicis longitudine in noſtris regionibus eo certius conſtaret. Vera enim Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis longitudo, quamplurimis et accuratiſſimis experimentis, beneficio Penduli ſimplicis huc transmiſſi inſtitutis, a Cel. *de la Caille* Pariſiis ſtabilita eſt 3. ped. 8 lin. 55: quare ad longitudinem Penduli ſimplicis in noſtris regionibus definiendam non neceſſe eſt, niſi vt longitudo Penduli Pariſina augeatur in ratione quadratorum numerorum Oſcillationum Penduli eodem temporis ſpatio et in eadem aeris temperatura Pariſiis et noſtris in regionibus confectarum.

II.

Longitudo Penduli ſimplicis Arenſburgi, in Oſilia Inſula, ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis.

Cel. *de la Caille* An. 1756 initio Aprilis menſis obſeruauit, Pendulum immutabile in temperie aeris $6^{\circ}\frac{1}{3}$. Therm. Reaum. ſupra o ſpatio diei Solaris medii

 Pari-

Pariſiis conficere 98908 Oſcillationes; in eadem aeris temperatura Pendulum hoc immutabile in Oſilia Inſula abſoluit 98945 Oſcillationes: longitudo itaque Penduli Pariſina erit ad longitudinem Penduli in Oſilia Inſula, vt $(98908)^2$ ad $(98945)^2$. Vnde emergit longitudo Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii in Oſilia Inſula oſcillantis 3. ped. 8, 88. lin.

Simili modo Cel. *de la Caille* An. 1755. d. 9. Maii ſumma diligentia et accuratione obſeruauit, Pendulum ſimplex in temperie aeris 12°. Therm. Reaum. ſupra o ſpatio diei Solaris medii Pariſiis abſoluere 86454. Oſcillationes. Secundum noſtra experimenta huius Penduli motus temperaturae aeris 12°. Therm. Reaum. ſupra o, et diei Solari medio reſpondens, in Oſilia Inſula erit 86506 Oſcillat. Vnde colligitur longitudo Penduli ſimplicis ad ſingula min. ſec. temporis medii in Oſilia Inſula oſcillantis 3. ped. 9, 08. *lin.*

III.

Longitudo Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii Petropoli oſcillantis.

Pendulum immutabile, conſeruata ſemper eadem aeris temperatura, in Oſilia Inſula ſpatio diei Solaris medii

medii confecit $98933\frac{1}{5}$ vel 98934 Oſcillationes, dum Petropoli eodem temporis ſpatio abſoluerat 90947 Oſcillationes. Subducto igitur calculo, longitudo Penduli ſimplicis ad ſingula min. ſec. temporis medii Petropoli oſcillantis, ſecundum experimenta Penduli immutabilis beneficio inſtituta, erit 3. ped. 9, 00 lin.

Pendulum ſimplex ſecundum, experimenta huius Penduli beneficio inſtituta, in temperie aeris $17^{\circ}\frac{1}{2}$. Therm. Reaum. ſupra o ſpatio diei Solaris medii An. 1757. menſe Auguſto, Petropoli confecit 86517 Oſcillationes: vnde colligimus motum Penduli ſimplicis pro die Solari medio, et temperie aeris 12°. Therm. Reaum. ſupra o Petropoli eſſe 86520, 7 Oſcillat. In eadem temperie aeris idem Pendulum ſimplex Pariſiis eodem temporis interuallo abſoluit 86454 Oſcillationes. Hiſce poſitis, prodibit longitudo Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii Petropoli oſcillantis 3. Ped. 9, 23 lin.

IV.

Longitudines Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii Reualiae, Pernauiae et Dorpati oſcillantis.

Eadem ratione emerget ex noſtris experimentis, et iis, quae Cel. *de la Caille* Pariſiis inſtituit, longitudo

Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis:

Reualiae	Per Pendulum immutabile	3. Ped.	8, 93 Lin.
	Per Pendulum ſimplex - -	3.	9, 13
Pernauiae	Per Pendulum immutabile	3.	8, 92
	Per Pendulum ſimplex - -	3.	9, 12
Dorpati	Per Pendulum immutabile	3.	8, 91
	Per Pendulum ſimplex - -	3.	9, 14

Ex hiſce calculis conſtat, Pendulum ſimplex maiorem conſtanter exhibere longitudinem Penduli, quam Pendulum immutabile, exiſtente differentia 20. circiter part. lineae centeſ. ſiue $\frac{1}{5}$ lin. quod diſcrimen adeo ſane eſt notabile, vt longitudinem Penduli directe inueſtigari operae pretium ſit.

V.

Inquiſitio in Longitudinem *Penduli* ſimplicis ad ſingula min. ſec. temporis medii oſcillantis ex noſtris experimentis directe eliciendam.

Ad hocce negotium perficiendum iis vti iuuat experimentis, quae Auguſto menſe An. 1758. in Oſilia Inſula, Penduli ſimplicis beneficio, ſumma diligentia inſtitui et p. 488 et 489 deſcripſi. Per medium inter iſta experimenta Pendulum ſimplex in temperatura

aeris

aeris 14°½. Therm. Reaum. ſupra o ſpatio diei Solaris medii abſoluit 86504,4 Oſcillationes. Pendulum ſimplex igitur celerius mouebatur, quam pro tempore medio, exiſtente differentia 104,4 Oſcill. pro horis 24. Cel. *de la Caille* experimenta exquiſitiſſima, Penduli ſimplicis beneficio An. 1755. d. 9. Maii, in temperie aeris 12°. Therm. Reaum. ſupra o inſtituit, et longitudinem virgae chalybeae inuenit 3. ped. 3. lin. accuratiſſime reſpondere. In noſtris experimentis longitudo virgae, pro differentia temperaturae, paulo maior ſit neceſſe eſt, $\frac{2}{100}$ lin. fere, et haec virgae longitudo mihi ſatis accurata viſa eſt, quantum ego quidem iudicare potui. Diameter ponduſculi biconici mihi viſa eſt aequare 9,92 lin. pedis Pariſ. Hiſce praemiſſis calculum ſequenti modo adornare poſſumus:

	Ped. Lin.
Longitudo virgae ad ponduſculum applicata in temp. aeris 14°½ - - - - -	3. 3,02
Semidiameter ponduſculi - - - - -	4,96
Diſtantia centri grauitatis ponduſculi a puncto Oſcillationis - - - - -	3. 7,98
a qua ſi ſubtrahantur - - - - -	0,02
prodibit diſtantia centri Oſcillationis Penduli ſimplicis a puncto ſuſpenſionis, ſiue longitudo Penduli - - - - - -	3. 7,96

 Cum

Cum Pendulum in hoc ſtatu ſpatio 24. hor. 104,4 Oſcillationibus celerius procederet, quam pro tempore medio; ad longitudinem Penduli ſupra inuentam addatur - - - - -		Ped. lin. 1,06
vt prodeat longitudo Pendulis ſimplicis - -	3.	9,02
Additis denique - - - - - - - -		0,05
habebimus veram longitudinem Penduli ſimplicis ad ſingula min. ſec. temporis Solaris medii in Oſilia Inſula, in loco aere vacuo oſcill.	3 P.	9,07 Lin.

Haec longitudo Penduli ſimplicis, cum vnica tantum parte lineae centeſima ab ea Penduli longitudine diſcrepet, quam ſupra ex comparatione numerorum Oſcillationum Penduli ſimplicis Pariſiis et in Oſilia Inſula, in eadem aeris temperatura confectorum, deduximus, argumento eſt, in numeros atque menſuras a Cel. *de la Caille* ad me perſcriptas, nullum irrepſiſſe errorem. Ex quo porro liquet, differentiam hanc notabilem inter Pendulum immutabile + et Pendulum ſimplex, perturbationi, cui ſiue Pendulum immutabile, ſiue Pendulum ſimplex fuit obnoxium, eſſe adſcribendam. Ex conſenſu autem ſatis egregio Penduli immutabilis cum Pendulo ſimplici, noſtris in experimentis horum Pendulorum beneficio captis obuio, patet ſimul, hanc perturbationem, ſi qua acciderit, non Pendulis in meam manum traditis, ſed potius in via Pariſiis Petropolin accidiſſe; ita vt nihil exinde de accuratoine noſtrorum

rum experimentorum, mediantibus hiſce Pendulis Petropoli, Reualiae, Arensburgi, Pernauiae et Dorpati inſtitutorum, neque de certitudine concluſionum ex illis collectarum detrahatur, ſed tota ſuſpicio in grauitatis differentiam Pariſios inter et noſtras regiones cadat. Caeterum non video equidem, qua ratione Pendulum ſimplex Pariſiis ad nos tranſportatum perturbari, vel vitiari potuerit, niſi fortaſſis virga chalybea, ad longitudinem fili Penduli ſimplicis menſurandam deſtinata, in via Pariſiis Petropolin paululum incuruata, et propterea longitudo Penduli iuſto minor reddita ſit; id quod experimentis a Cel. *de la Caille* huius Penduli beneficio Pariſiis iterum inſtituendis, aptiſſime eſt dilucidandum.

Interim tamen ab argumento noſtro non alienum eſſe videtur, longitudinem Penduli ſimplicis ex iis indagare obſeruationibus, quas Horologii noſtri Aſtronomici exquiſitiſſimi, ſupra deſcripti beneficio, in hunc finem et Pariſiis et Petropoli ſumma diligentia inſtitui. Obſeruaui nempe An. 1749. in Obſeruatorio Ill. *le Monnier* Pariſiis, in temperatura aeris 125°. Therm. *de l'Isleani*, reuolutionem fixarum eſſe accuratiſſime $23^h.56'.12''$ Horologii Aſtron. Horologio hocce excellentiſſimo, maxima cum cura atque cautione Petropolin tranſportato, conſeruata ſemper longitudine virgae huius Horologii diligentiſſime eadem, ex magno obſeruationum numero inueni reuolutionem fixarum in eadem aeris temperatura 125°. Therm. *de l'Isleani* Petropoli eſſe $23^h.57'.14''$ eiusdem Horol. Admiſſa igitur longitudine

dine Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis, a Cel. *de la Caille* Pariſiis inventa 3. ped. 8,55 lin. erit $(23^h.56'.12'')^2$ ad $(23^h\ 57'.14'')^2$ vt 3. ped. 8, 55 lin. ad longitudinem Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii oſcillantis Petroburgenſem 3. ped. 9, 18 lin. quae vix 5 partibus lineae centeſimis differt ab illa ex noſtris experimentis, Penduli ſimplicis beneficio inſtitutis, ſupra collecta. Egregius hicce conſenſus argumento eſſe poſſet, Pendulo ſimplici magis, quam Pendulo immutabili, eſſe fidendum; ita vt longitudinem Penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda temporis medii Petropoli oſcillantis ſtabilire poſſimus 3. ped. 9, 20 lin. menſur. Pariſ.

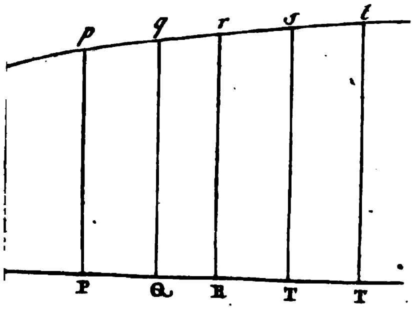


Fig. 2.

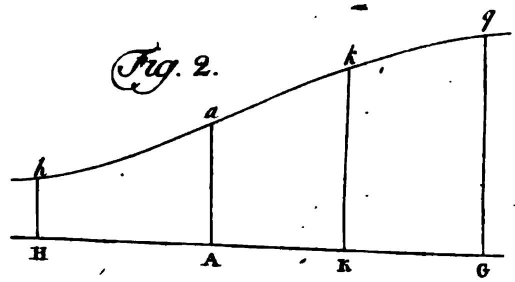




Fig. 4.

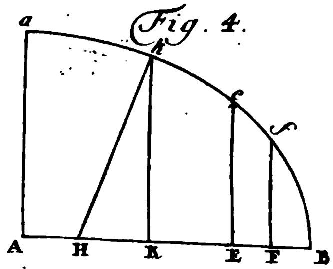


Fig. 5.

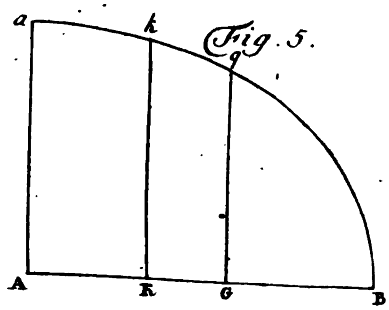


Fig. 6.

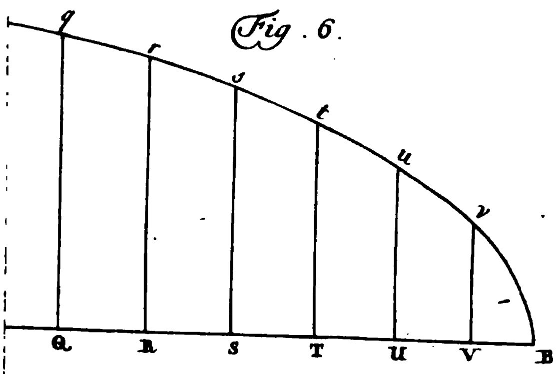


Fig. 7.

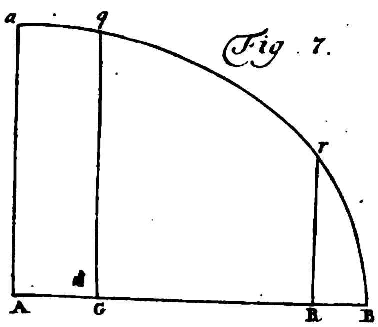
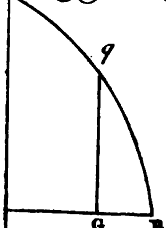


Fig. 8.



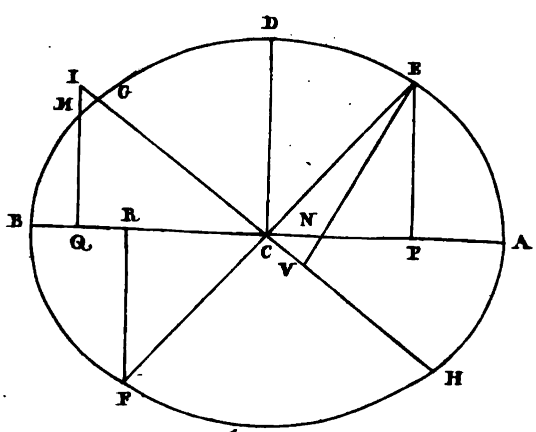
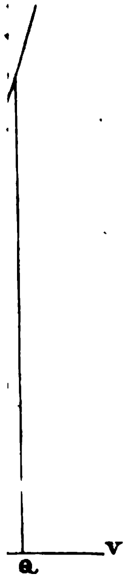


Fig. 9.



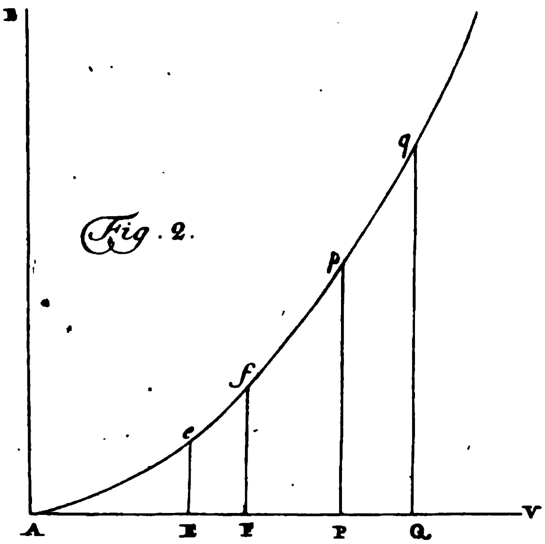
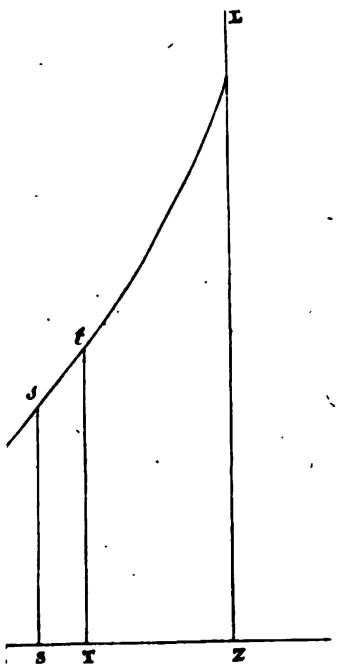


Fig. 2.



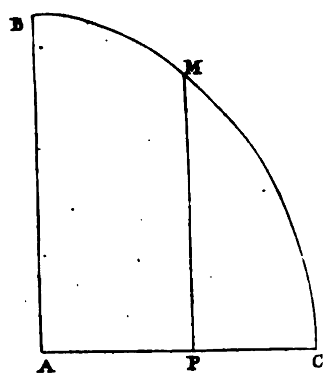
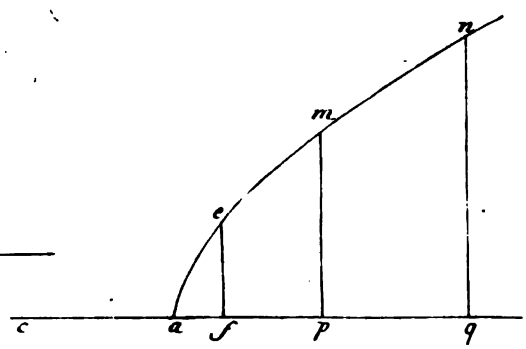


Fig. 4.



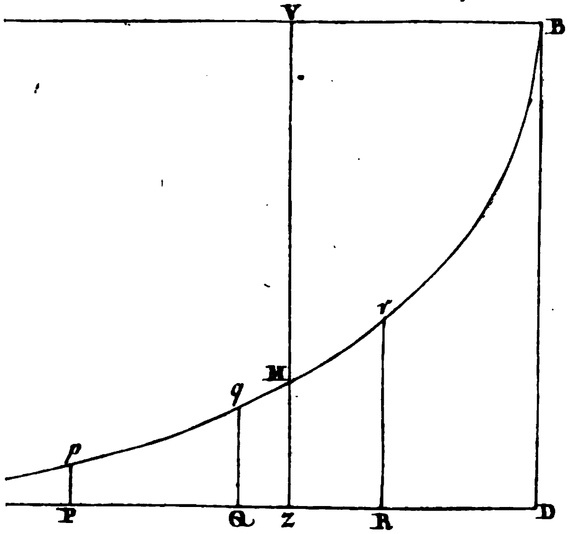
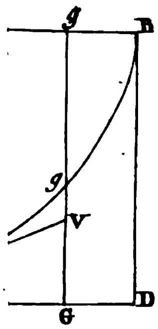


Fig. 1.



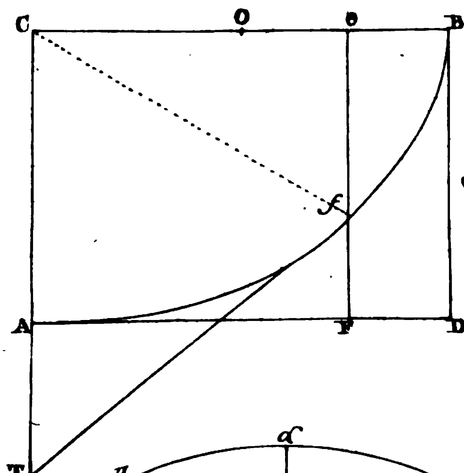


Fig. 3.

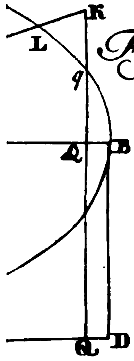


Fig. 4.

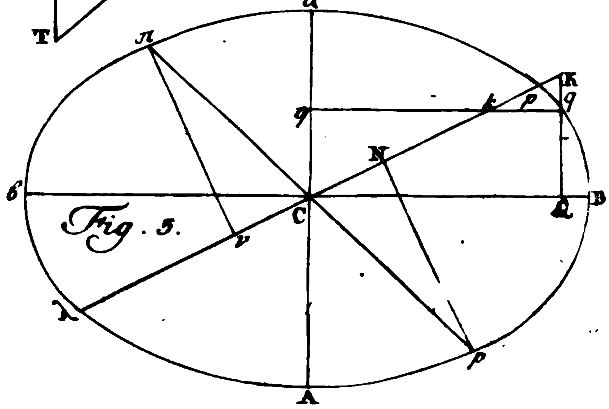


Fig. 5.

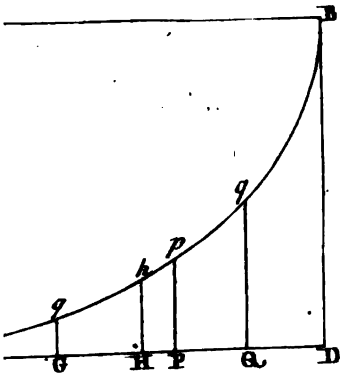


Fig. 2.

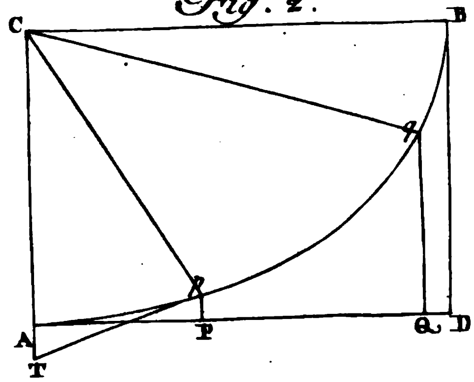




Fig. 3.

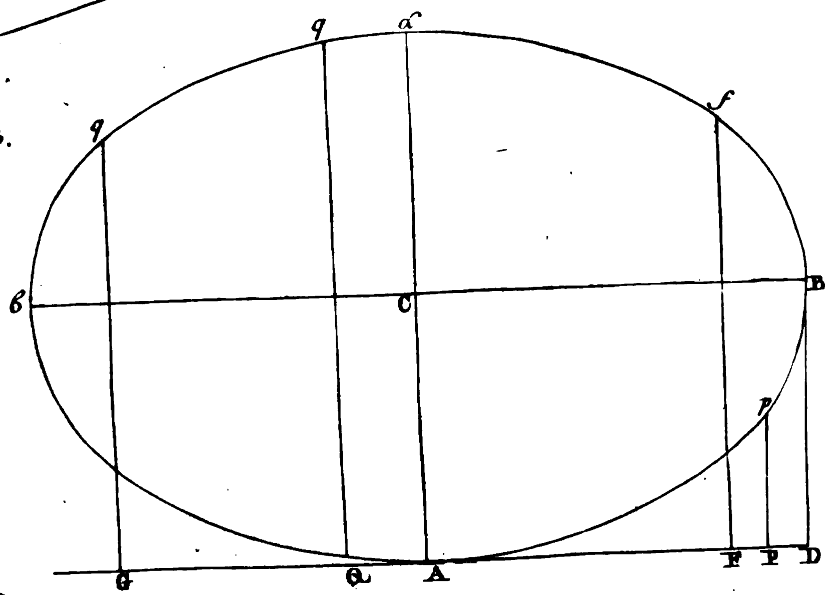


Fig. 4.

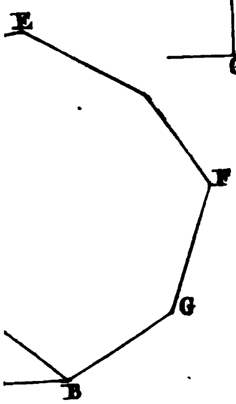




Fig. 2.

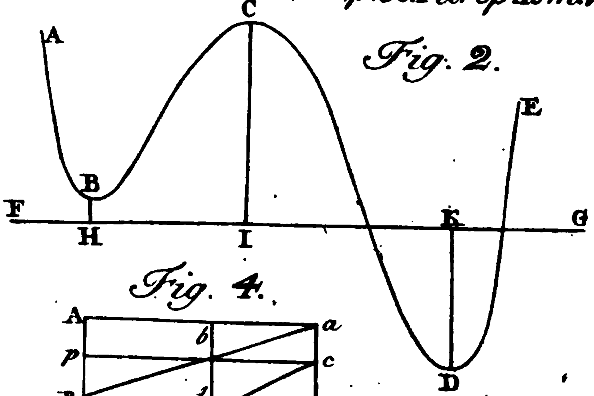


Fig. 4.

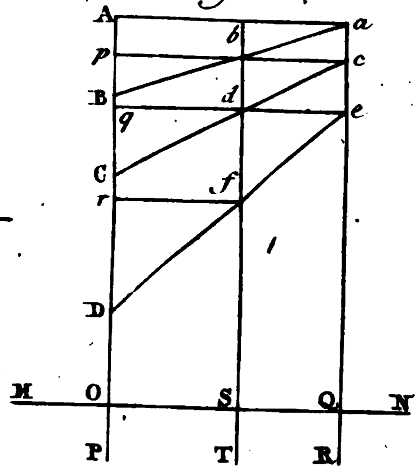


Fig. 5.

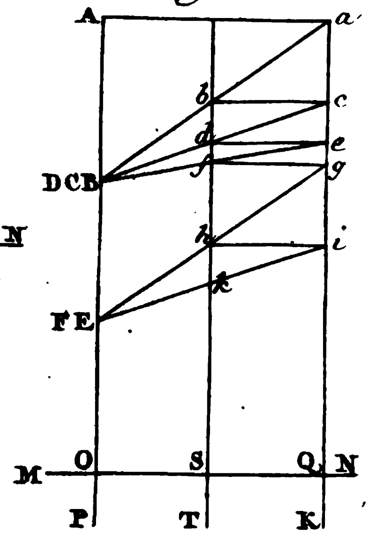
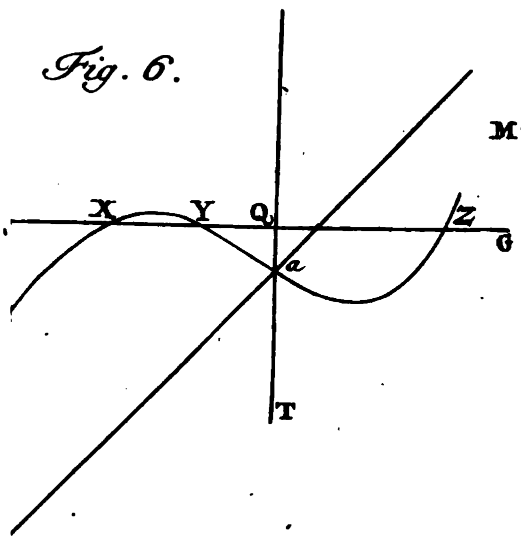
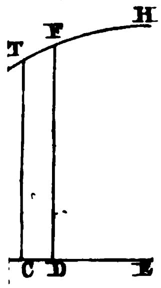


Fig. 6.





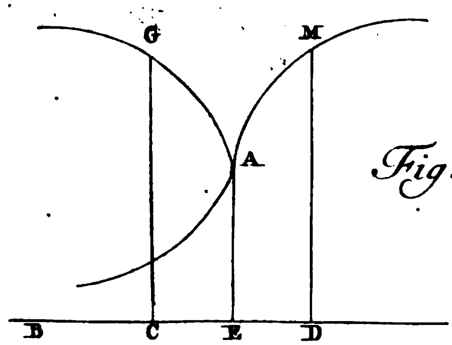
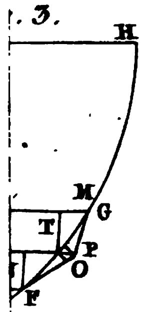


Fig. 2.

. 3.



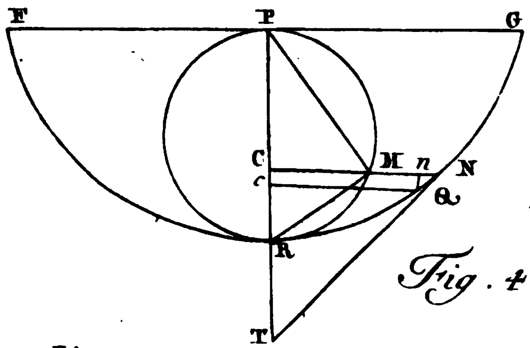
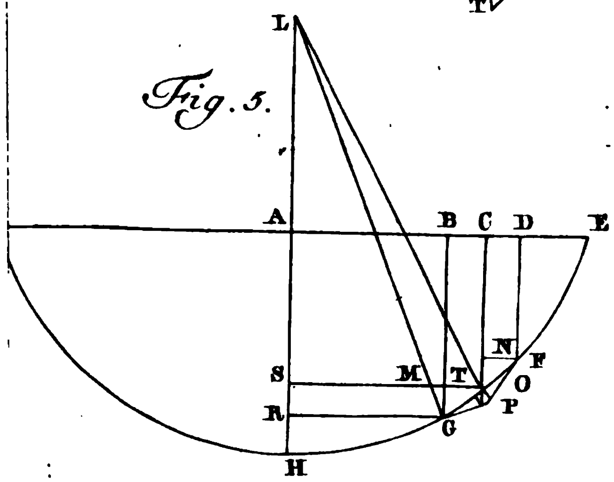


Fig. 4.

Fig. 5.



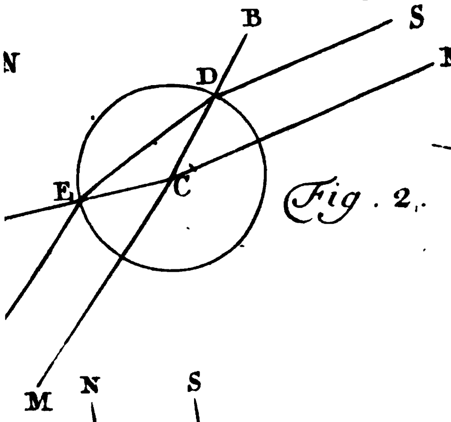


Fig. 2.

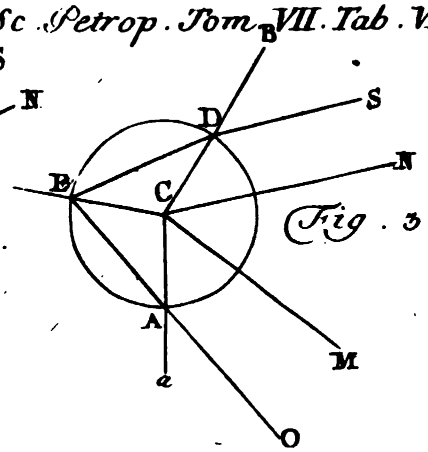


Fig. 3.

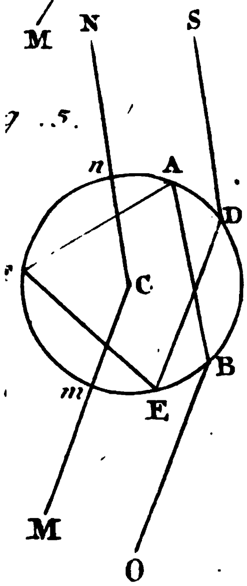


Fig. 5.

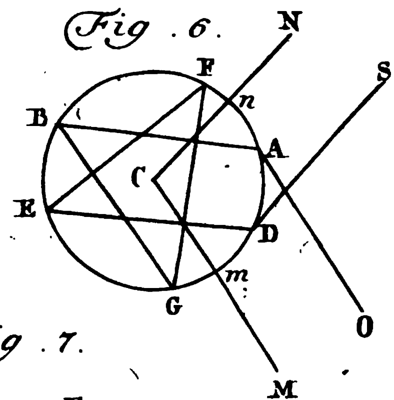


Fig. 6.

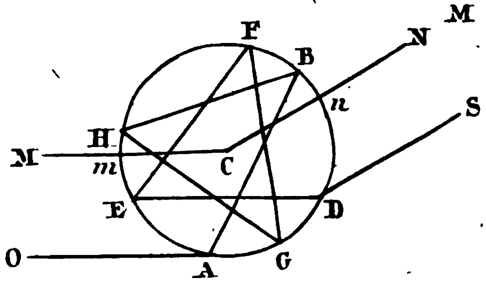
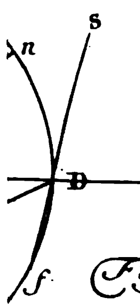


Fig. 7.



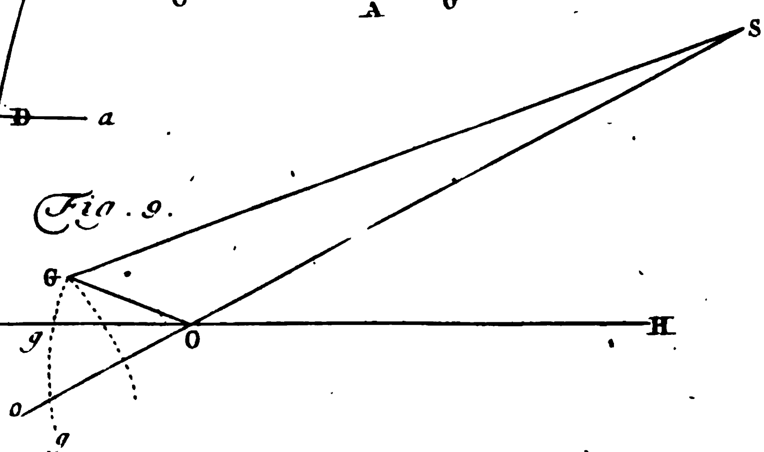
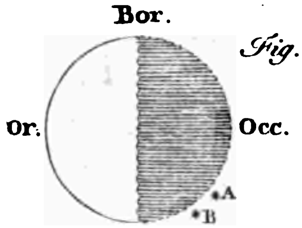


Fig. 9.

Fig. 1.



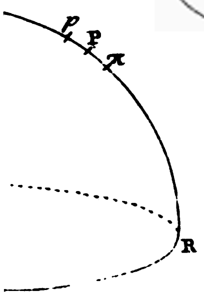
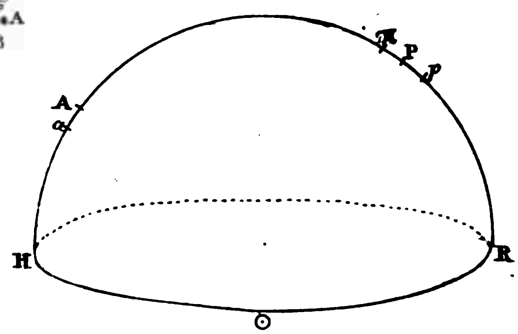


Fig. 3.



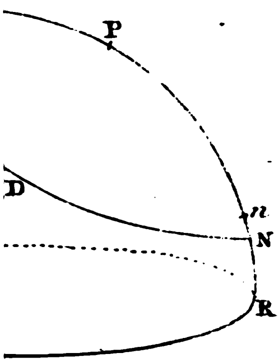
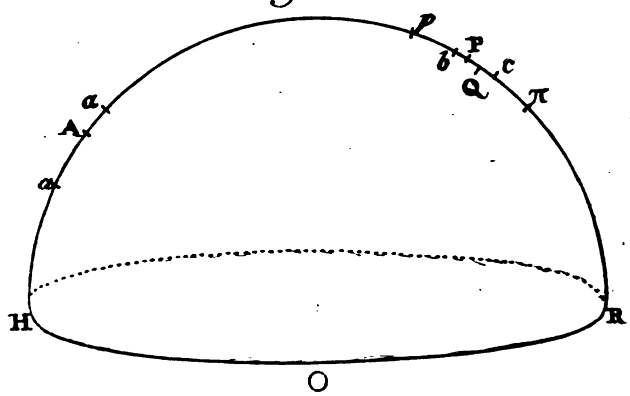


Fig. 5.



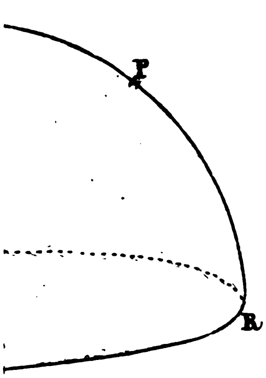
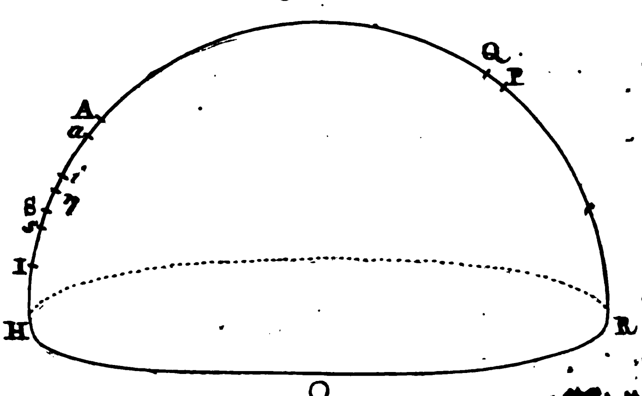
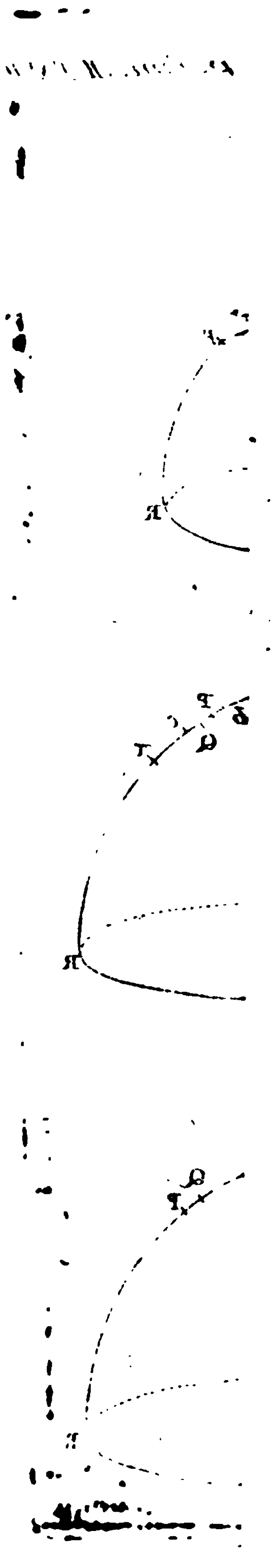
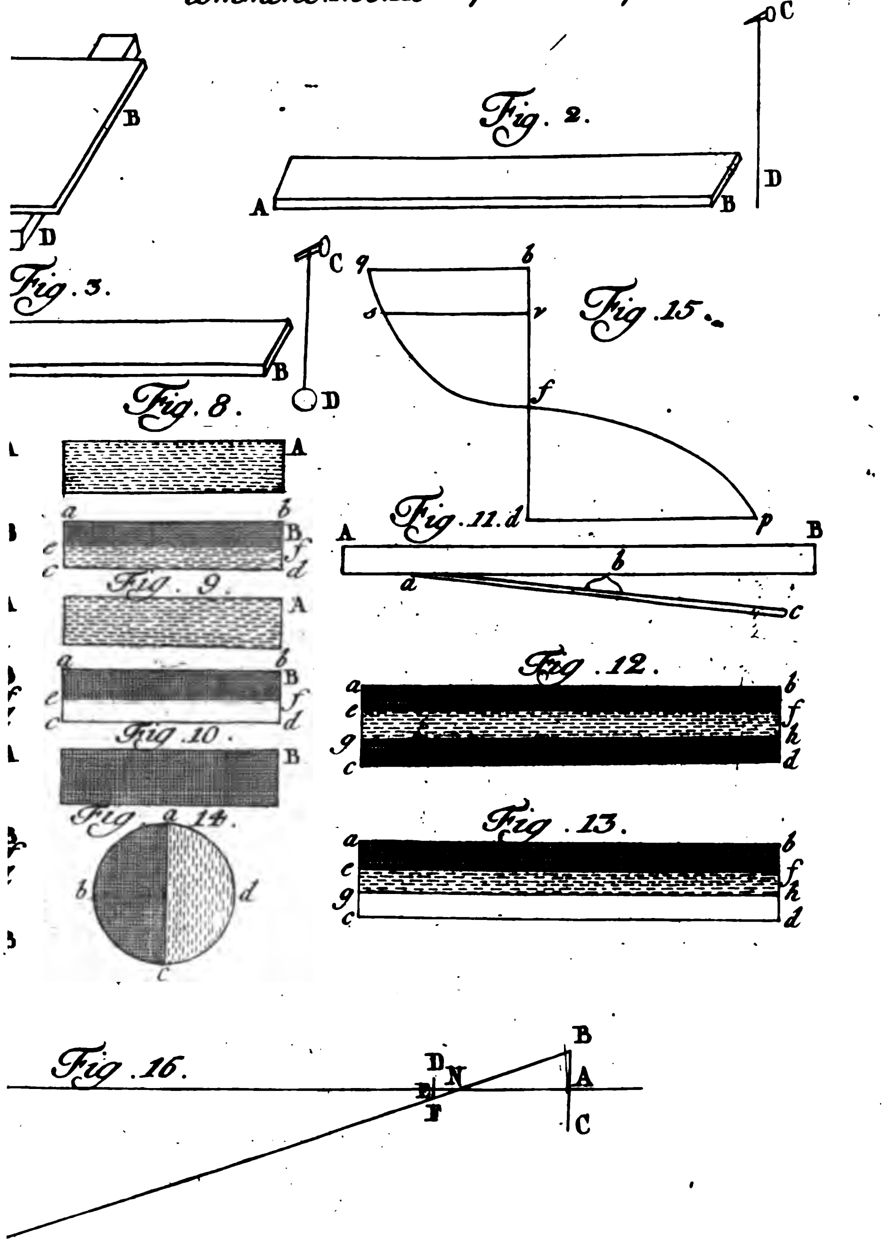
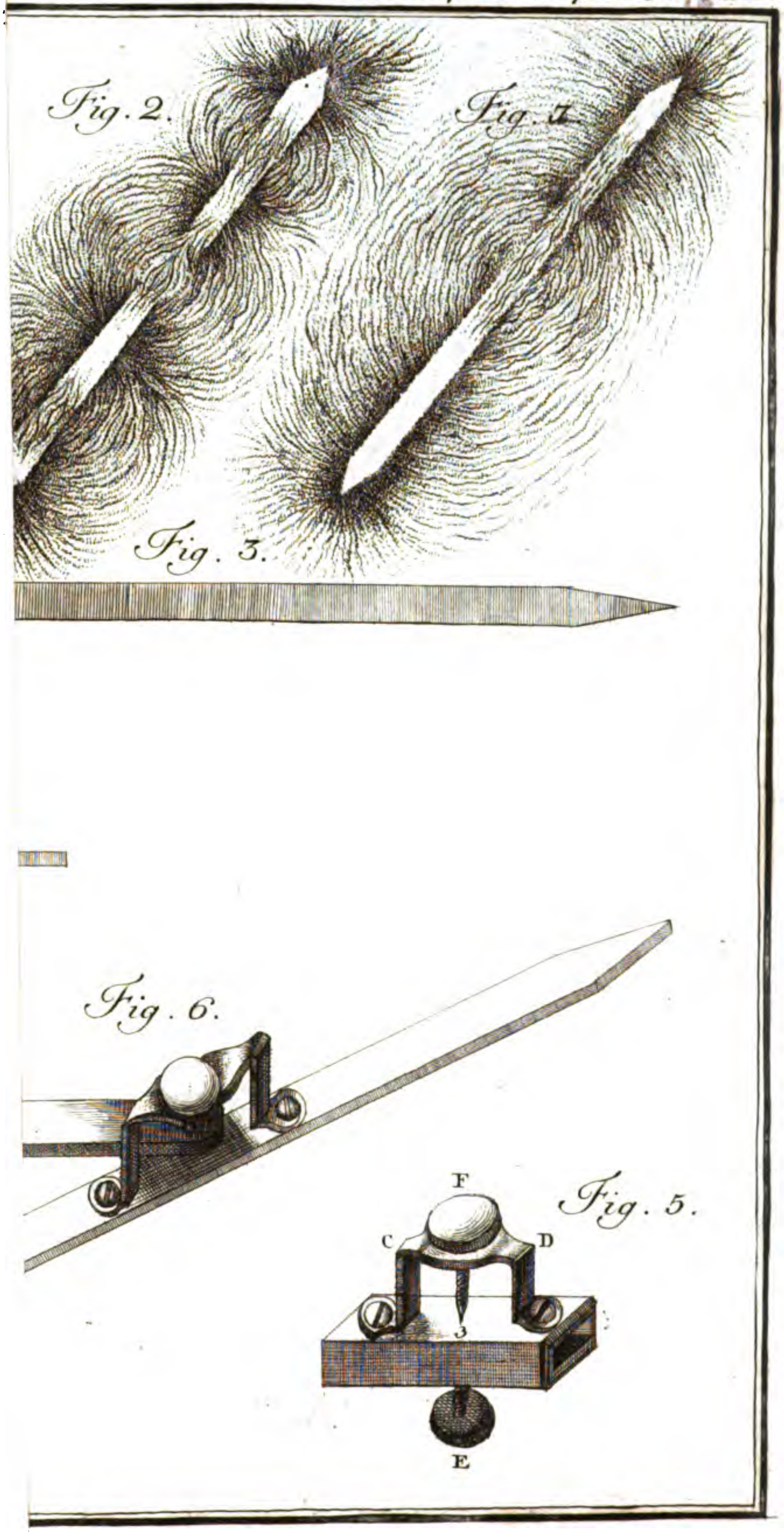


Fig. 7.






Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.


Fig. 2.
Fig. 7.
Fig. 3.
Fig. 6.
Fig. 5.
F
C
D
3
E



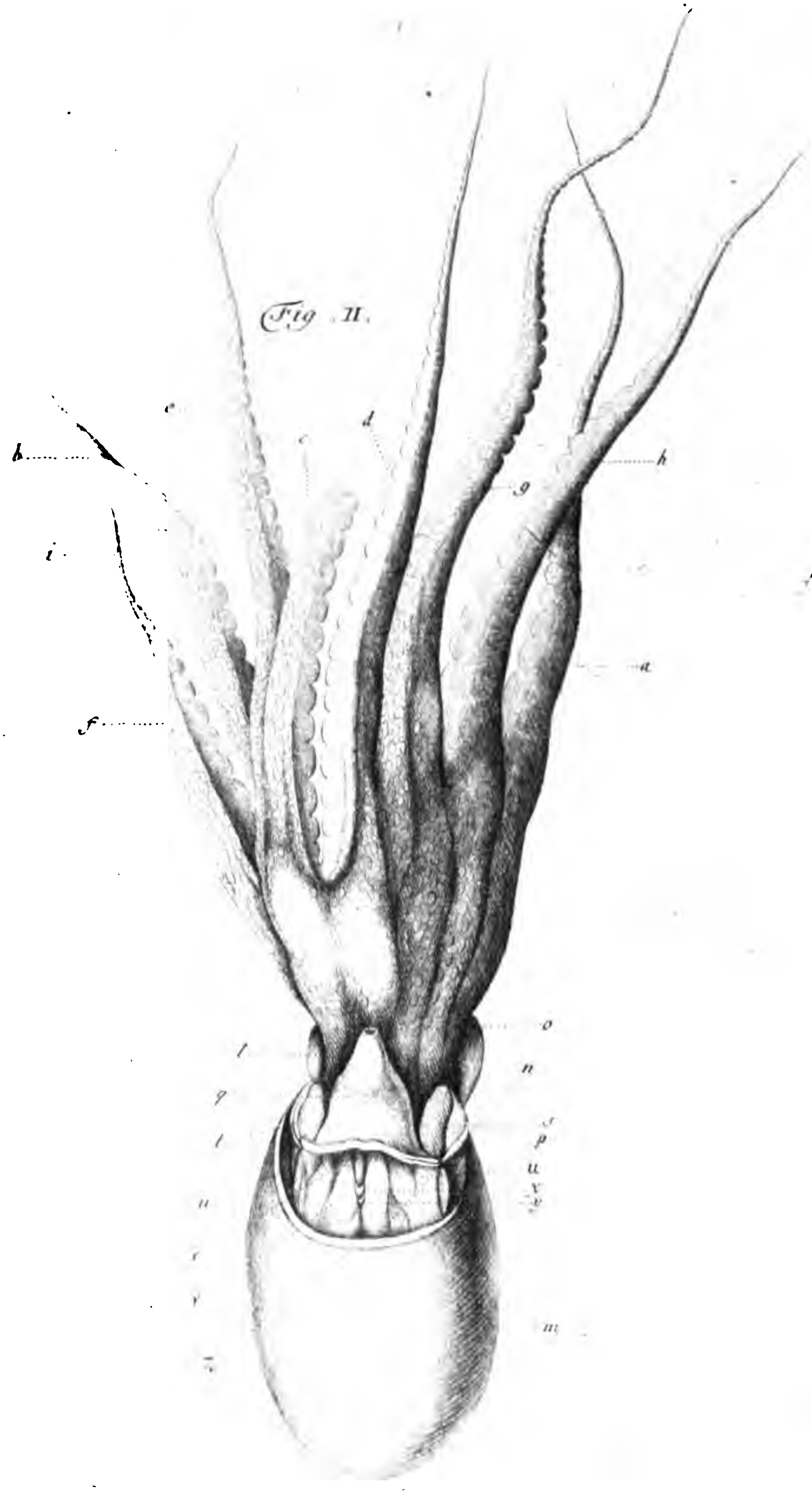
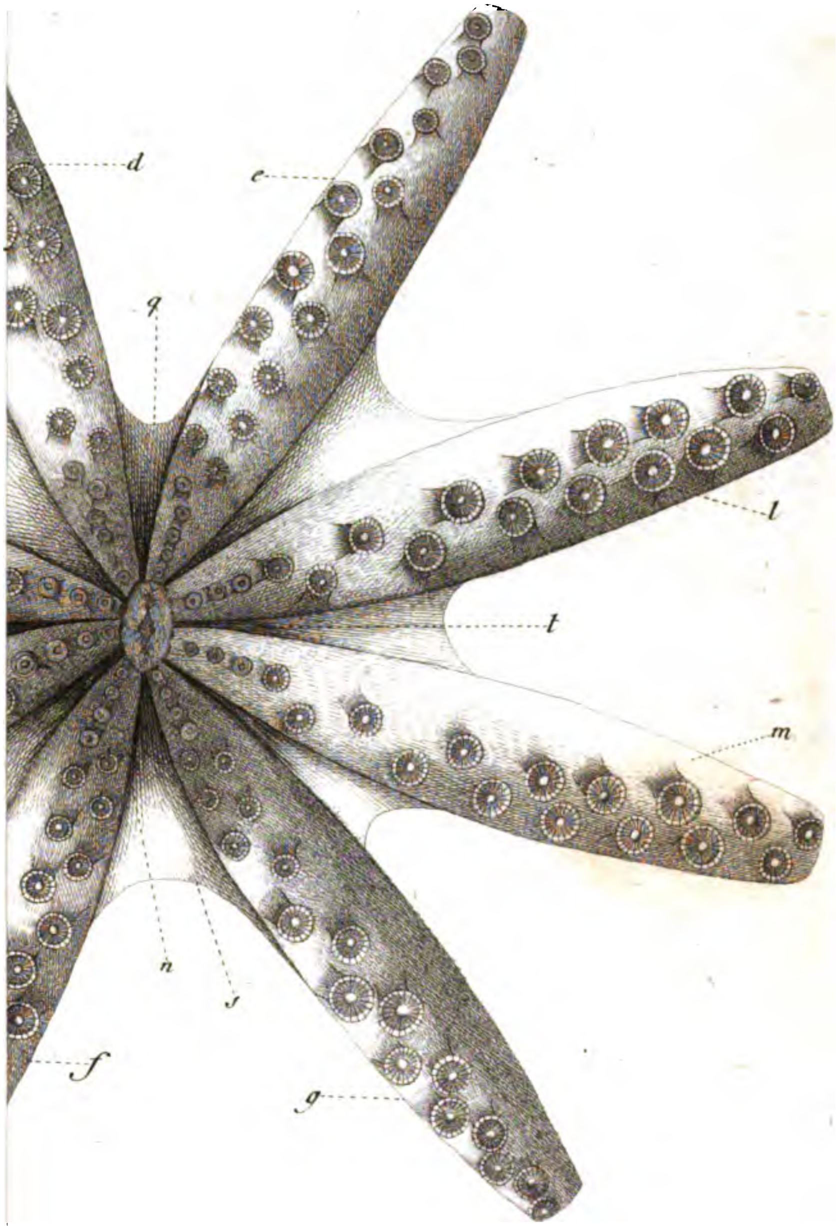
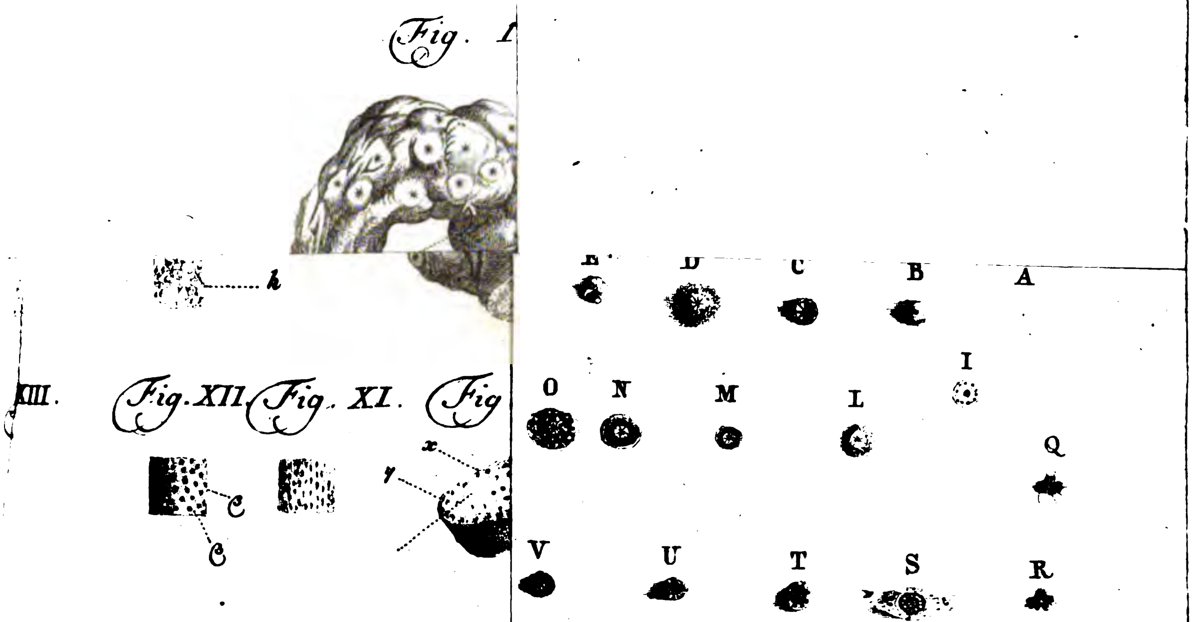

Fig. II.
b
c
d
e
f
g
h
i
a
o
t
n
q
p
l
u
x
v
m

Fig. III.



…c. Imp. Sc. Petrop. Tom. VII. Tab. XIII.



. VI.

Fig. V.

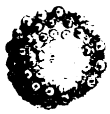


Fig. IV



Fig. XIV.



Fig. XIII.

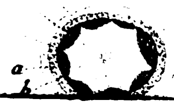


Fig. XI



Fig. I



. V.



III

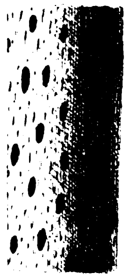


Fig. II

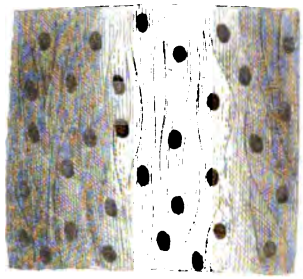


Fig. I

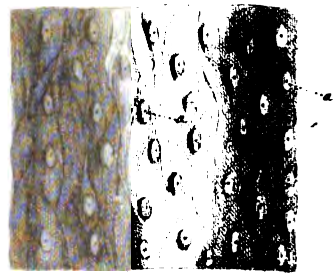


Fig. X



Fig. V



Fig. VII

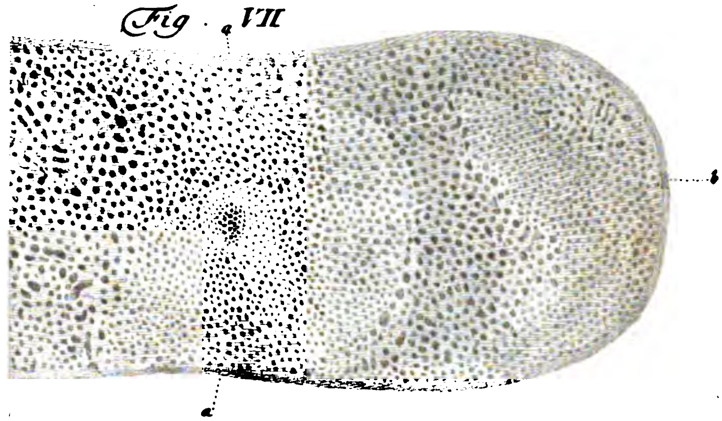
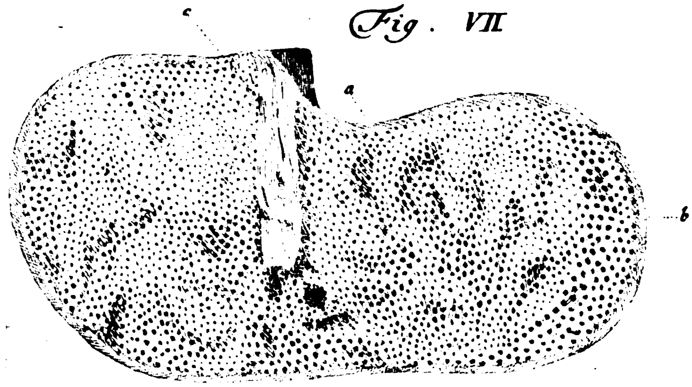
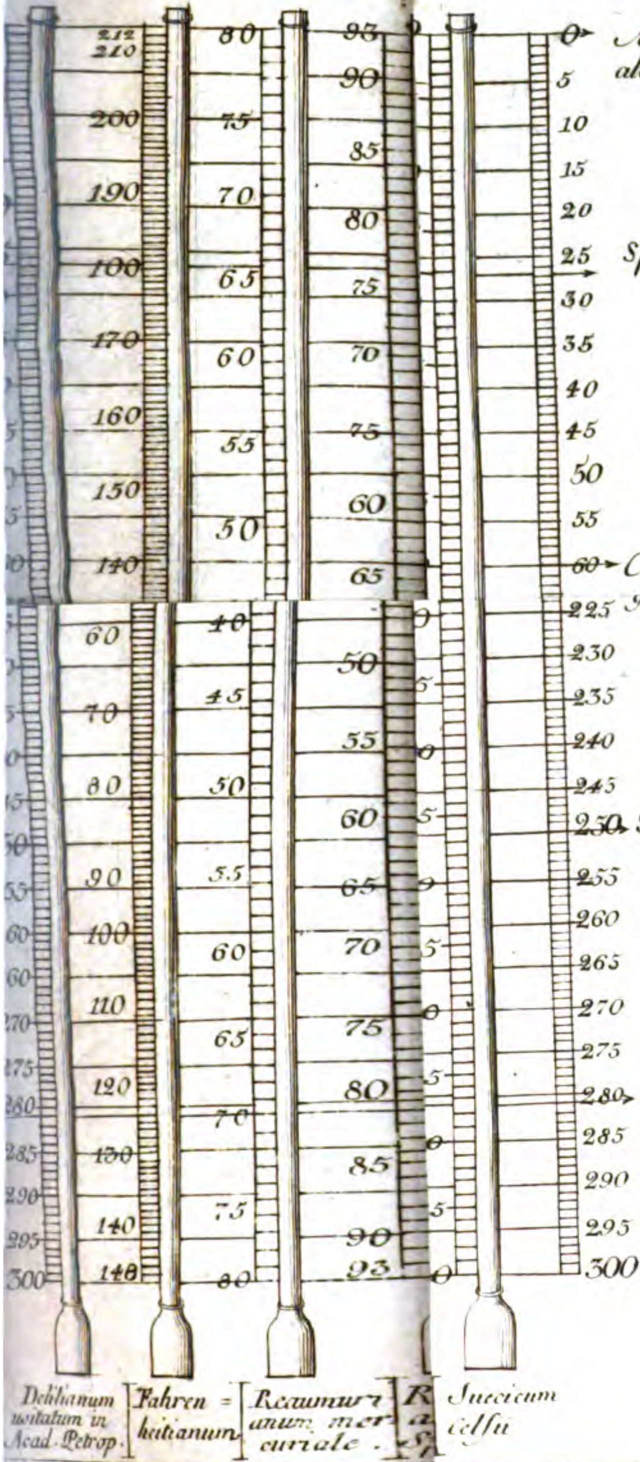


Fig. VII




a
c

Comparatio Thermo torum.



Aquae bullientis calor ſub altitudine barometrica 28. ped. reg. Paris.

Spiritus vini ebulliens.

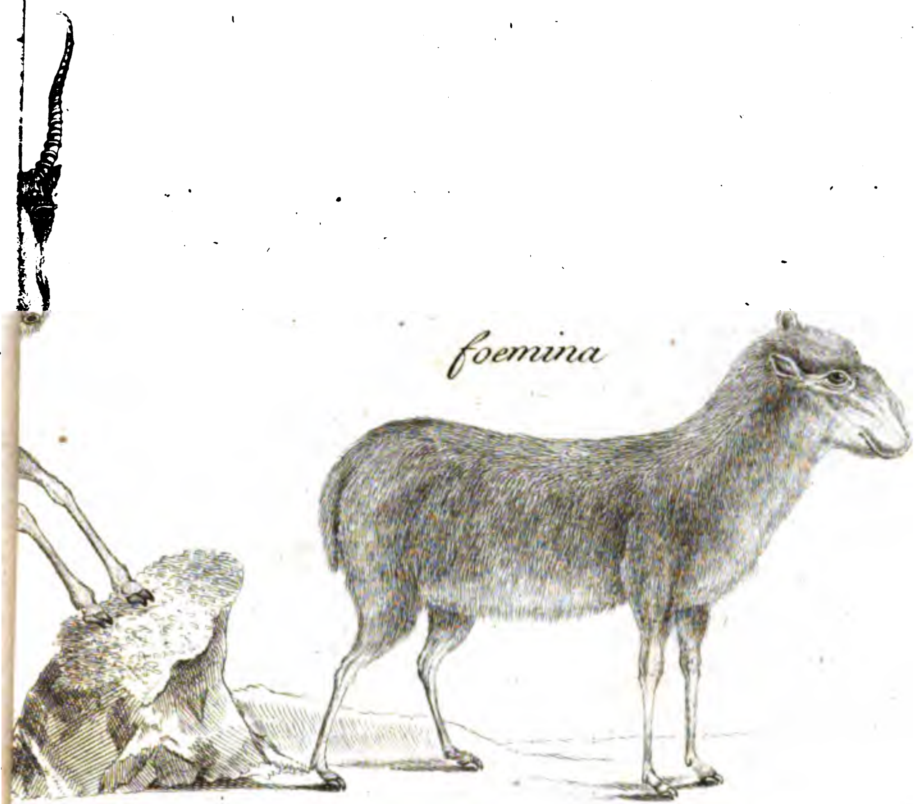
Cera liquefit

gelatus eſt.

Frigus in Sibiria ſaepius obſeruatum

Frigus maximum adhuc obſeruatum contigit Jeniſeae Jan. 5. 1735. st. v.

Ibex imberbis



3 2044 092 615 335